Résumé de cours n°5 — Réduction des endomorphismes

Dans toute la suite, $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. Si E est un K-espace vectoriel, on note i_E l'automorphisme identité de E ($i_E : x \in E \mapsto x \in E$). On note $I_n \in M_n(K)$ la matrice identité d'ordre n.

Motivation : Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E. On cherche des bases de E dans lesquelles la matrice de f est la plus "simple" possible.

Définition 1. (a) Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. L'endomorphisme f de E est **diagonalisable** (resp. **trigonalisable**) s'il existe une base B de E telle que la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale (resp. triangulaire).
(b) La matrice $A \in M_n(K)$ est **diagonalisable** (resp. **trigonalisable**) s'il existe une matrice diagonale (resp. triangulaire) semblable à A.

Problème. Caractériser les endomorphismes diagonalisables ou trigonalisables d'un K-espace vectoriel de dimension finie et dans ce cas, déterminer une base B qui convient. Sous forme matricielle, on a le problème équivalent : caractériser les matrices $A \in M_n(K)$ telles qu'il existe une matrice P inversible telle que la matrice $A' = P^{-1}AP$ soit diagonale ou triangulaire. Dans ce cas, déterminer P.

Exemple 1. Soit $p \in L(\mathbb{R}^2)$ dont la matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Si $b_1 = (2,1)$ et $b_2 = (1,1)$, alors $B = (b_1, b_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ telle que $M_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc l'endomorphisme p est diagonalisable.

Définition 2. Soit E un K-e.v. (pas nécessairement de dimension finie). Soit $f \in L(E)$. Un vecteur $u \in E$ est un **vecteur propre** (en abregé v.p.) de f si $u \neq 0$ et s'il existe $\lambda \in K$ tel que $f(u) = \lambda u$.

Remarque. Si u est un vecteur propre de f, la droite $D = vect(u)$ est un s.e.v. de E stable par f et le scalaire λ tel que $f(u) = \lambda u$ est unique.

Définition 3. Soient E un K-e.v. et $f \in L(E)$. On appelle **valeur propre** (en abregé va.p.) de f tout scalaire $\lambda \in K$ tel qu'il existe un vecteur $u \neq 0$ dans E vérifiant $f(u) = \lambda u$. On dit alors que u est un vecteur propre de f **associé à la valeur propre** λ. L'ensemble des valeurs propres de f est appelé **le spectre** de f.

Exemple. Si p est l'endomorphisme de l'exemple 1, on a $p(b_1) = b_1$ et $p(b_2) = 0$, donc b_1 et b_2 sont des vecteurs propres de p, associés aux valeurs propres 1 et 0, respectivement.

Proposition 1. Soit E un K-e.v. de dimension finie n. L'endomorphisme $f \in L(E)$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.

Recherche des valeurs propres

Proposition 2. Soient E un K-e.v. de dimension finie n et $f \in L(E)$. Les valeurs propres de f sont les racines dans K du polynôme de dégré n de $K[X]$: $P(\lambda) = det(f - \lambda i_E)$. Si $\mathcal{B}$ est une base de E et $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, alors $P(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}tr(A)\lambda^{n-1} + \cdots + det(A)$.

Remarque. Cette dernière formule ne dépend pas de la base choisie dans E, en particulier, si A et A' sont les matrices de f dans deux bases de E, $tr(A) = tr(A')$.

Définition 4. Soient E un K-e.v. de dimension finie n, $f \in L(E)$ et $A \in M_n(K)$.
(a) Le polynôme $P = det(f - \lambda i_E)$ (resp. $P = det(A - \lambda I_n)$) est appelé **le polynôme caractéristique** de f (resp. de A).

(b) Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $A = (a_{ij}) = M_{\mathcal{B}}(f)$. Le scalaire $tr(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$ est appelé **la trace de** f et est noté $tr(f)$.

Exemple. Si p est l'endomorphisme de l'exemple 1, son polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$, dont les racines sont 0 et 1. Le spectre de p est $\{0, 1\}$ et sa trace vaut 1.

Etude des sous-espaces propres

Proposition 3. Soient E un K-e.v. (pas nécessairement de dimension finie) et $f \in L(E)$.
(a) Si λ est une va.p. de f, alors $E_\lambda = \{u \in E, f(u) = \lambda u\}$ est un sous-espace vectoriel de E non réduit à $\{0\}$ et stable par f.
(b) Si E est de dimension finie n, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ est une base de E et $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, alors E_λ est l'ensemble des vecteurs $x = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$ tels que $X = M_{\mathcal{B}}(x)$ est solution du système linéaire homogène $(A - \lambda I_n)(X) = 0$.

Définition 5. Soient E un K-e.v. (pas nécessairement de dimension finie) et $f \in L(E)$. Si λ est une va.p. de f, alors le sous-espace $E_\lambda = \{u \in E, f(u) = \lambda u\}$ est appelé **le sous-espace propre de f associé à** λ.

Exemple 2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in L(\mathbb{R}^3)$, définie pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f((x, y, z)) = (x + 2y + \alpha z, 2x + y + \alpha z, x - y + 3z).$$

Déterminer les sous-espaces propres de f.

Proposition 4. Soient E un K-e.v. (pas nécessairement de dimension finie) et $f \in L(E)$.
(a) Si λ_1 et λ_2 sont deux va.p. distinctes de f alors $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$.
(b) Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres distinctes de f et $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sont des vecteurs propres associés à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ respectivement, alors $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ est libre.

Corollaire 1. (condition suffisante de diagonalisation) Soient E un K-e.v. de dimension finie n et $f \in L(E)$. Si f a n valeurs propres distinctes dans K alors f est diagonalisable.

Remarque. L'exemple 2 montre que la condition précédente n'est pas nécessaire : l'endomorphisme f n'a pas trois va.p. distinctes mais si $\alpha = 0$, f est diagonalisable.

Corollaire 2. Soient E un K-e.v. (pas nécessairement de dimension finie) et $f \in L(E)$. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres distinctes de f alors la somme $E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_p}$ est directe, soit, $E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_p} = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$.

Compléments sur la somme et la somme directe de plusieurs sous-espaces

Définition 1. Soient E un K-e.v. (pas nécessairement de dimension finie) et $E_1, E_2, \ldots, E_p$ p sous-espaces vectoriels de E ($p \in \mathbb{N}, p \geq 2$). Alors :

$$E_1 + E_2 + \cdots + E_p = \{v \in E \mid \exists v_1 \in E_1, \ldots, \exists v_p \in E_p,\ v = v_1 + \cdots + v_p\}$$

est un sous espace vectoriel de E appelé le **sous-espace somme** des s.e.v. $E_1, E_2, \ldots, E_p$.

Proposition 1. Si $E_1, E_2, \ldots, E_p$ sont de dimension finie et $B_1, \ldots, B_p$ sont des bases de $E_1, E_2, \ldots, E_p$, respectivement, alors $B_1 \cup \ldots \cup B_p$ est une famille genératrice de $E_1 + E_2 + \cdots + E_p$.

Définition 2. Soient E un K-e.v. (pas nécessairement de dimension finie) et $E_1, E_2, \ldots, E_p$ p sous-espaces vectoriels de E ($p \in \mathbb{N}, p \geq 2$). On dit que les s.e.v. $E_1, E_2, \ldots, E_p$ sont en **somme directe** si tout vecteur $v \in E_1 + E_2 + \cdots + E_p$ s'écrit de façon unique sous la forme $v = v_1 + \cdots + v_p$, où $v_1 \in E_1, \ldots, v_p \in E_p$. On écrit alors $E_1 + E_2 + \cdots + E_p = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p$.

Proposition 2. Les s.e.v. $E_1, E_2, \cdots, E_p$ de E sont en somme directe si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :
(1) $v_1 + \cdots + v_p = 0$ avec $v_1 \in E_1, \ldots, v_p \in E_p$ implique $v_i = 0,\ 1 \leq i \leq p$.
(2) $E_1 \cap E_2 = \{0\},\ (E_1 + E_2) \cap E_3 = \{0\},\ \ldots,\ (E_1 + E_2 + \cdots + E_{p-1}) \cap E_p = \{0\}$.

Si $E_1, E_2, \cdots, E_p$ sont de dimension finie alors les conditions (1) ou (2) sont équivalentes à la condition suivante :
(3) Si $B_1, \ldots, B_p$ sont des bases de $E_1, \ldots, E_p$, respectivement, alors $B_1 \cup \ldots \cup B_p$ (notation à préciser en cours) est une base de $E_1 + E_2 + \cdots + E_p$.

Corollaire. Soit E un K-e.v. de dimension finie n et soient $E_1, E_2, \ldots, E_p$ p sous-espaces vectoriels de E ($p \in \mathbb{N}, p \geq 2$). Alors :

(a) $E_1, E_2, \ldots, E_p$ sont en somme directe si et seulement si $dim(E_1 + E_2 + \cdots + E_p) = dim(E_1) + dim(E_2) + \cdots + dim(E_p)$.

(b) $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :
$$E = E_1 + E_2 + \cdots + E_p \quad , \quad dim(E_1) + dim(E_2) + \cdots + dim(E_p) = n$$
(c) Si $E_1, \ldots, E_p$ sont en somme directe, alors $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ si et seulement si $dim(E_1) + \cdots + dim(E_p) = n$

Conditions nécéssaires et suffisantes de diagonalisation et de trigonalisation

Théorème 1. Soient E un K-e.v. de dimension finie n, $f \in L(E)$ et $\lambda \in K$ une racine d'ordre de multiplicité α du polynôme caractéristique de f. Alors $dim(E_\lambda) \leq \alpha$.

Théorème 2. (CNS de diagonalisation) Soient E un K-e.v. de dimension finie n et $f \in L(E)$. L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si :

1. Le polynôme caractéristique de f a n racines (distinctes ou pas) **dans** K. On dit alors que P est **scindé dans** K et P s'écrit :
$$P(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \ldots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$
où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont les racines distinctes de P, d'ordre de multiplicité $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ respectivement et $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = n$.

(2) Pour $1 \leq i \leq p$ on a $dim(E_{\lambda_i}) = \alpha_i$.

Théorème 3. (CNS de trigonalisation) Soient E un K-e.v. de dimension finie n et $f \in L(E)$. L'endomorphisme f est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans K.

Exemple. L'endomorphisme f de l'exemple 2 n'est pas diagonalisable, lorsque $\alpha \neq 0$ (3 est une va.p. double de f et $dimE_3 = 1$). Le polynôme caractéristique de f est scindé dans $\mathbb{R}$, donc f est trigonalisable. Montrer que pour tout vecteur $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a - b + 4c \neq 0$, (u_1, u_2, v) est une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est triangulaire.

Corollaire 1. Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire.

Corollaire 2. Soit $A \in M_n(K)$. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$, alors $Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ et $det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$.

Applications de la diagonalisation et de la trigonalisation

I. Puissances d'une matrice $A \in M_n(K)$

(1) A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Alors il existe $P \in M_n(\mathbb{C})$ inversible telle que $P^{-1}AP = D$ soit une matrice diagonale. Si les coefficients diagonaux de D sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, les coefficients diagonaux de D^k sont $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$, $k \geq 1$.On a alors $A^k = PD^kP^{-1}$, pour $k \geq 1$.

Remarque. Si $K = \mathbb{R}$, P et D peuvent avoir des coefficients complexes, mais A^k est une matrice à coefficients réels, $k \geq 1$. Exemple : calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Il nous faut quelques résultats supplémentaires.

Définition 6. Soit E un K-espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie). Un endomorphisme f de E est **nilpotent** s'il existe un entier positif p tel que $f^p = 0$. Une matrice $A \in M_n(K)$ est **nilpotente** s'il existe un entier positif p tel que $A^p = 0$.

Exemples. 1. Tout endomorphisme f d'un K-e.v. E tel que $Imf \subset Kerf$ est nilpotent.
2. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ telle que $a_{i,j} = 0, i \leq j$. Alors A est nilpotente.

Lemme. Soit $B \in M_n(K)$. Si l'on peut écrire B sous la forme $B = B_1 + N$, où $B_1 \in M_n(K)$, $N \in M_n(K)$ est nilpotente et $NB_1 = B_1N$, alors on a, pour tout entier $k > 0$:

$$B^k = B_1^k + C_k^1 B_1^{k-1} N + \cdots + C_k^{k-1} B_1 N^{k-1} + N^k.$$

(Si $N^p = 0$, dans la somme précédente il y a au plus p termes non nuls, pour tout $k > p$.)

Théorème. (forme de Jordan, admis) Toute matrice $A \in M_n(C)$ est semblable à une matrice de la forme $B = D + N$, avec $DN = ND$, où $D \in M_n(K)$ est une matrice diagonale et $N = (n_{ij}) \in M_n(K)$ est une matrice nilpotente telle que $n_{ij} = 0,\ i \geq j \geq 1$ ou $j - i \geq 2$, et $n_{i,i+1}$ vaut 0 ou 1, $1 \leq i \leq n-1$.

, oexistTd(t11.202 Tf-2(342()-30(p)42(lessaitr21du24-3ce)]TJ-3ce)deuxitne)-32(dme)-mc"Tf4.30
kNfTfITTfTdTfTdnITTfvTdβTfTdTembaB

Exemple 3. Soient $\beta \in \mathbb{R}$ et $f_\beta \in L(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, est la matrice A_β ci-dessous. Justifier, sans calcul, que f_β n'est pas diagonalisable. Montrer que A_β est semblable à une des matrices B_1, B_2 ou B_3 suivantes :

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $A \in M_n(K)$, non diagonalisable sur $\mathbb{C}$. S'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = B = D + N$, où la matrice D est diagonale, la matrice N est nilpotente et $ND = DN$ (le théorème admis dit que c'est possible, et dans chaque cas vous aurez des indicatio da32(te)]TJ-33.331-1d