Résumé de cours n°6 – Suites et séries de fonctions – Section 1

Notations. Dans toute la suite, K désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et E est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (le plus souvent, E sera un intervalle ou une réunion d'intervalles et $K = \mathbb{R}$). Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on se donne une fonction $f_n : E \to K$. Alors on peut considérer :

- La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$; on dit alors que la fonction f_n est le **terme général** de cette suite.

- La série de fonctions $\sum f_n$. Comme pour les séries numériques, étudier cette série est, par définition, étudier la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ des **sommes partielles** $s_n = f_0+f_1+\ldots+f_n$, $n \geq 0$; la fonction f_n est le **terme général** de la série $\sum f_n$.

Questions. Nous savons dire quand une suite ou série de nombres réels ou complexes est convergente. Si l'on a une suite ou une série de fonctions, comment définir une convergence de cette suite ou série ? Y a-t-il plusieurs définitions possibles ? Si la limite est une fonction f, est-ce que f hérite des propriétés éventuelles des fonctions f_n (continuité, dérivabilité, intégrabilité) ?

Suites de fonctions

Définition 1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur une partie E de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans K. On dit que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ **converge simplement sur** E si pour tout $x \in E$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est convergente. Dans ce cas, la fonction

$$f : E \to K, \qquad x \in E \mapsto f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

est appelée **la limite simple** de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ sur E et on dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ **converge simplement** (en abrégé CVS) vers la fonction f sur E.

On peut égalemment considérer des suites de fonctions définies sur E qui convergent simplement sur une partie E' de E.

Exemple fondamental 1. Soient $E = [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$. Alors $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0, 0 \leq x < 1$, $f(1) = 1$. Les fonctions f_n sont continues, dérivables et intégrables sur $[0,1]$. La fonction f n'est pas continue sur $[0,1]$, elle y est intégrable et $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 f(t)dt$.

Séries de fonctions

Définition 2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur une partie E de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans K.

(a) On dit que la série $\sum u_n$ **converge simplement sur** E si pour tout $x \in E$, la série numérique $\sum u_n(x)$ est convergente. Dans ce cas, la fonction

$$u : E \to K, \qquad x \in E \mapsto u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \in K, \text{ qui se note } u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n,$$

est appelée **la somme** de la série de fonctions $\sum u_n$ sur E.

(b) On dit que la série $\sum u_n$ **converge normalement sur** E (en abrégé CVN) s'il existe une série convergente de nombres réels positifs $\sum a_n$ telle que $|u_n(x)| \leq a_n$, pour tout $x \in E$ et pour tout $n \geq 0$.

On peut égalemment considérer des séries de fonctions définies sur E qui convergent simplement ou normalement sur une partie E' de E.

Remarques. 1. Les conditions (a) et (b) sont équivalentes, respectivement, aux conditions :

(a') On dit que la série $\sum u_n$ **converge simplement sur** E si la suite des sommes partielles $(s_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur E.

(b') On dit que la série $\sum u_n$ **converge normalement sur** E si la série numérique $\sum \sup_{x\in E} |u_n(x)|$ est convergente.

Proposition 1. Si la série de fonctions $\sum u_n$ définies sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans K converge normalement sur E, alors elle converge simplement sur E et la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur E. De plus, il existe une suite numérique $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $|u_n(x)| \leq a_n,\ x \in E,\ n \geq 0$ (pour résumer cette dernière phrase, on dit que la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers zéro sur E).

Exemple fondamental 2. Soient $E = [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = x^n,\ x \in [0,1]$ $(u_0(0) = 1)$. Alors :

• La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction

$$u : [0,1[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{1}{1-x}.$$

• La série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $[0,1[$ ($\sup_{x\in[0,1]} |u_n(x)| = 1$, $n \geq 0$).

• Pour tout nombre réel a, $0 < a < 1$, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur le segment $[0,a]$ (donc sur tout segment de $[0,1[$).

• Les fonctions u_n sont continues, dérivables et intégrables sur $[0,1]$. La fonction u est continue et dérivable sur $[0,1[$ et l'intégrale généralisée $\int_0^1 u(t)dt$ n'est pas convergente.

Exemple fondamental 3. Soient $E = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R},\ (u_0(0) = 1)$. Alors :

• La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x$.

• La série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$ (les fonctions u_n ne sont pas bornées sur $\mathbb{R}$).

• Pour tout $a > 0$, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur le segment $[-a,a]$ (donc sur tout segment de $\mathbb{R}$).

Proposition 2. (propriétés élémentaires) Soit $\sum u_n$ une série de fonctions à valeurs réelles définies sur une partie non vide E de R, qui converge simplement sur E vers une fonction $u : E \to \mathbb{R}$.
(a) Si toutes les fonctions u_n sont croissantes (resp. décroissantes) sur E, alors u est croissante (resp. décroissante) sur E.
(2) Si E est symétrique par rapport à zéro et si toutes les fonctions u_n sont paires (resp. impaires), alors la fonction u est paire (resp. impaire).
(3) Si $E = \mathbb{R}$ et toutes les fonctions u_n sont périodiques de même période T, alors u est une fonction périodique, de période T.

Proposition 3. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans K, simplement (resp. normalement) convergentes sur E. Alors les séries de fonctions $\sum(u_n + v_n)$ et $\sum \lambda u_n$ $(\lambda \in K)$ sont simplement (resp. normalement) convergentes sur E.

Théorème 1. Soit $\sum u_n$ une série de fonctions réelles définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui converge normalement vers une fonction u sur I.
(i) Si chaque fonction u_n est continue en $x_0 \in I$, alors u est continue en x_0.
(ii) Si chaque fonction u_n est continue sur I, alors u est continue sur I.

Théorème 2. Soit $\sum u_n$ une série de fonctions réelles définies et continues sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ qui converge normalement vers une fonction u sur $[a,b]$. On pose, pour $x \in [a,b]$ et pour $n \in \mathbb{N}$: $U_n(x) = \int_a^x u_n(t)dt$, $\quad U(x) = \int_a^x u(t)dt$. Alors la série $\sum U_n$ converge normalement vers U sur $[a,b]$. En particulier : $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)dt = \int_a^b u(t)dt$.

Théorème 3. Soit $\sum u_n$ une série de fonctions réelles définies et continuement dérivables sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On suppose que :
(i) Il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la serie numérique $\sum u_n(x_0)$ soit convergente.
(ii) La série $\sum u'_n$ est normalement convergente sur $[a, b]$ vers une fonction v.
Alors la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[a, b]$ vers une fonction u continuement dérivable sur $[a, b]$ telle que $u' = v$. Si, de plus, la série $\sum u_n(x_0)$ est absolument convergente, la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

Théorème 4. Soit $\sum u_n$ une série de fonctions réelles définies sur un intervalle (ou une réunion d'intervalles) I de $\mathbb{R}$.
(i) Si la série $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment de I vers une fonction u et si u_n est continue sur I, pour $n \in \mathbb{N}$, alors la fonction u est continue sur I.
(ii) Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement vers une fonction u sur I, si u_n est continuement dérivable sur I pour $n \in \mathbb{N}$ et si la série de fonctions $(u'_n)_{n\geq 0}$ converge normalement vers une fonction v sur tout segment de I, alors la série $\sum u_n$ converge simplement sur I vers une fonction u, u est continuement dérivable sur I et on a $u' = v$. Si, de plus, la série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente pour tout $x \in I$, alors la série $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment de I.

Attention. Si I est un intervalle semi-ouvert ou ouvert, une série qui converge normalement sur tout segment de I n'est pas nécessairement normalement convergente sur I (voir les exemples 2 et 3).

Compléments : suites et séries uniformément convergentes

Définition 3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur une partie E de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans K.
(a) On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ **converge uniformément sur E vers une fonction** $v : E \to K$ si quel que soit $\epsilon > 0$, il existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$, on a $|u_n(x) - v(x)| < \epsilon$, pour tout $x \in E$. On dit alors que v est **la limite uniforme de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ sur E.**
(b) On dit que la série $\sum u_n$ **converge uniformément sur** E si la suite des sommes partielles $(s_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur E vers une fonction $u : E \to K$.

On peut égalemment considérer des séries de fonctions définies sur E qui convergent uniformément sur une partie E' de E, ou sur tout segment de E.

On peut montrer que toute série uniformément convergente sur E est simplement convergente sur E (avec les notations de la définition 3, u est alors la somme de la série), mais n'est pas nécessairement normalement convergente sur E. On peut aussi montrer (nous allons l'admettre) que dans les théorèmes 1, 2, 3 et 4 la convergence normale peut être remplacée par la convergence uniforme (dans les hypothèses et dans les conclusions).

Une des motivations pour introduire la notion de convergence uniforme est l'étude des séries trigonométriques $\sum a_n e^{inx}$, $\sum a_n \cos nx$ et $\sum a_n \sin nx$: ces séries sont normalement convergentes sur $\mathbb{R}$, ou sur tout segment de $\mathbb{R}$, si et seulement si la série numérique $\sum a_n$ est absolument convergente. Par contre, on a (résultat qui peut être utile pour l'étude des séries de Fourier en S4 MIAS) :

Proposition 4. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs décroissante telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Pour tout $0 < \alpha < \pi$, les séries de fonctions : $\sum a_n e^{inx}$, $\sum a_n \cos nx$ et $\sum a_n \sin nx$ sont uniformément convergentes sur l'ensemble $E_\alpha = \cup_{k\in\mathbb{Z}} [\alpha + 2k\pi, 2(k+1)\pi - \alpha]$. Par conséquent, leurs sommes sont continues sur E_α.