Résumé de cours n°6 – Suites et séries de fonctions – Section 2

Notations. Dans toute la suite, K désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et E est une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on se donne une fonction $f_n : E \to K$. Alors $(f_n)_{n\geq 0}$ est une **suite de fonctions** définies dans E (le plus souvent, E sera un intervalle ou une réunion d'intervalles et $K = \mathbb{R}$).

Questions. Nous savons dire quand une suite de nombres réels ou complexes est convergente. Si l'on a une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définies sur $E \subset \mathbb{R}$, comment définir une convergence de cette suite ? Si la limite est une fonction f, est-ce que f hérite des propriétés éventuelles des fonctions f_n (continuité, dérivabilité, intégrabilité) ?

Définition 1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur une partie E de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans K. On dit que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ **converge simplement sur** E si pour tout $x \in E$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est convergente. Dans ce cas, la fonction $f : E \to K$ définie pour $x \in E$ par $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ est appelée **la limite simple** de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ sur E et on dit que **la suite de fonctions** $(f_n)_{n\geq 0}$ **converge simplement vers la fonction** f **sur** E.

On peut égalemment considérer des suites de fonctions définies sur E qui convergent simplement sur une partie E' de E.

Exemple fondamental 1. Soient $E = [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$. Alors $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0, 0 \leq x < 1$, $f(1) = 1$. Les fonctions f_n sont continues, dérivables et intégrables sur $[0,1]$. La fonction f n'est pas continue sur $[0,1]$, elle y est intégrable et $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 f(t)dt$.

Exemple 2. Soient $E = [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \sin nx/\sqrt{n}$, $x \in [0,1]$. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ et des suites numériques $(f'_n(0))_{n\geq 1}$ et $(\int_0^1 f_n(t)dt)_{n\geq 1}$.

Exemple 3. Soient $E = [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, dont le graphe est un triangle isocèles de base le segment $[0, 1/n]$ et de hauteur n. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ et de la suite numérique $(\int_0^1 f_n(t)dt)_{n\geq 1}$.

Ces trois exemples montrent que si une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions réelles définies sur un segment converge simplement vers une fonction f sur ce segment, la fonction f n'hérite pas nécessairement des "bonnes propriétés" des fonctions f_n, d'où l'intérêt de définir un autre type de convergence, ayant des "meilleures propriétés".

Définition 2. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur une partie E de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans K. On dit que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ **converge uniformément sur** E **vers une fonction** $f : E \to K$ si quel que soit $\epsilon > 0$, il existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$, on a $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, pour tout $x \in E$. On dit alors que f est **la limite uniforme de la suite** $(f_n)_{n\geq 0}$ **sur** E.

(Fait en cours : interprétation géométrique, écriture avec des quantificateurs.)

Proposition 1. Si la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions définies sur E et à valeurs dans K converge uniformément sur E vers une fonction $f : E \to K$, alors on a :
(i) La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f sur E.
(ii) Si les fonctions f_n sont bornées lorsque $n \geq n_0$, $(n_0 \in \mathbb{N})$, alors la fonction f est bornée.
(iii)Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n > n_1$, les fonctions $f_n - f$ sont bornées.

Corollaire. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur une partie E de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans K et $f : E \to K$. La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur E si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

(1) Les fonctions $f_n - f$ sont bornées pour n assez grand et $\lim_{n\to\infty}(\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|) = 0$.

(2) Il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels positifs telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ vérifiant :

$(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq n_0)\ (\forall x \in E)\ (|f_n(x) - f(x)| \leq a_n)$

Question. Si la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur E vers une fonction f, les propriétés (ii) et (iii) de la Proposition 1 restent-elles valables ?

Cas particulier. Si $E = [a,b]$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ et si les fonctions $f_n - f$ sont continues sur le segment $[a,b]$ alors $|f_n - f|$ a un maximum sur $[a,b]$: il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $|f_n(x_0) - f(x_0)| = \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$. Si de plus les fonctions $f_n - f$ sont dérivables sur $[a,b]$, le point x_0 est à chercher dans l'ensemble

$$\{x \in [a,b], (f_n - f)'(x) = 0\} \cup \{a, b\}.$$

Dans les exercices, si le calcul de $\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$ n'est pas aisé (sans Maple ...), on essaie d'abord de trouver une suite (a_n) vérifiant la condition 2 du Corollaire.

Exercice. Dans les exemples 1, 2 et 3 la suite de fonctions donnée converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

Théorème 1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions réelles définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction f sur I.

(i) Si chaque fonction f_n est continue en $x_0 \in I$, alors f est continue en x_0.

(ii) Si chaque fonction f_n est continue sur I, alors f est continue sur I.

Remarque. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions réelles définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction f sur I. Alors :

- Si f n'est pas continue sur I, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas uniformément vers f.
- Si $(f_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas uniformément vers f, on ne peut rien affirmer sur la continuité de f (ref. exemples 1 et 3).

Théorème 2. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions réelles définies et continues sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction f sur $[a,b]$. On pose, pour $x \in [a,b]$ et pour $n \in \mathbb{N}$:

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt, \qquad F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Alors la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers F sur $[a,b]$. En particulier :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

(Le Théorème 2 ne s'étend pas aux intégrales généralisées : exemple donné en cours.)

Théorème 3. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions réelles définies et continuement dérivables sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. On suppose que :

(i) Il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que la suite numérique $(f_n(x_0))_{n\geq 0}$ soit convergente.

(ii) La suite de fonctions $(f'_n)_{n\geq 0}$ est uniformément convergente sur $[a,b]$ vers une fonction g.

Alors la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f continuement dérivable sur $[a,b]$ telle que $f' = g$.

Remarque. Dans le Théorème 3, si l'on remplace les conditions (i) et (ii) par la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ vers une fonction f sur $[a,b]$, la fonction f n'est pas forcément dérivable sur $[a,b]$ (exemple donné en cours).

Définition 4. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ou une réunion d'intervalles. On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définies sur I et à valeurs dans K **converge uniformément sur tout segment** vers une fonction $f : E \to K$, si pour tout intervalle fermé borné non vide $[a,b] \subset I$, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Question. Dans les exemples 1 et 3, y-a-il convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ sur tout segment de $[0,1]$? de $[0,1[$? de $]0,1[$?

Théorème 4. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions réelles définies sur un intervalle (ou une réunion d'intervalles) I de $\mathbb{R}$.
(i) Si la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I, alors la fonction f est continue sur I.
(ii) Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers une fonction f sur I, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continuement dérivable sur I et si la suite de fonctions $(f'_n)_{n\geq 0}$ est uniformément convergente sur tout segment de I vers une fonction g, alors la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout segment de I vers f, f est continuement dérivable sur I et on a $f' = g$.

Séries de fonctions

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on se donne une fonction $u_n : E \to K$ ($E \subset \mathbb{R}$, non vide, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors $\sum u_n$ est une **série de fonctions** définies sur E. Comme pour les séries numériques, cette notation ne préjuge pas d'une convergence (dans un sense à déterminer) de la série, elle indique que l'on s'intéresse à l'étude de la suite de fonctions $(s_n)_{n\geq 0}$, où s_n est la fonction définie pour $x \in E$ par :

$$s_0(x) = u_0(x), \quad s_1(x) = u_0(x) + u_1(x), \quad s_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$$

La fonction u_n est **le terme général** et les fonctions s_n sont les **sommes partielles** de la série de fonctions $\sum u_n$.

Comme pour les suites de fonctions, nous allons nous intéresser aux différents types de convergence d'une série (il y en aura trois !) et à la façon dont la somme d'une série hérite des “bonnes propriétés” de ses termes généraux.

Définition 1. On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ **converge simplement sur** E (resp. **converge uniformément sur** E) si la suite de fonctions $(s_n)_{n\geq 0}$ converge simplement (resp. uniformément) sur E. Dans ce cas, on définit une fonction $u : E \to K$ en posant , pour tout $x \in E$, $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$. La fonction u est appelée **la somme de la série** et se note $u = \sum_{n\geq 0}^{\infty} u_n$.

Proposition 1. Si la série de fonctions $\sum u_n$ définies sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans K converge simplement (resp. uniformément) sur E alors la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 0}$ converge simplement (resp. uniformément) vers la fonction nulle sur E.

Définition 2. On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ **converge normalement sur** E si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :
1. Il existe une série convergente de nombres réels positifs $\sum a_n$ telle que $|u_n(x)| \leq a_n$, pour $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$.
2. La série numérique $\sum \sup\limits_{x\in E} |u_n(x)|$ est convergente.

Proposition 2. Toute série de fonctions $\sum u_n$ définies sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans K qui converge normalement sur E est uniformément convergente sur E. La réciproque est fausse.

Remarque. On peut égalemment considérer des séries de fonctions définies sur E qui convergent simplement, uniformément ou normalement sur une partie E' de E, ou sur tout segment contenu dans E. Si E est un intervalle ou une réunion d'intervalles, toute série de fonctions $\sum u_n$ qui converge simplement, uniformément ou normalement sur tout segment de E, converge simplement sur E vers une fonction $u : E \to \mathbb{R}$.

Exemples. (a) Soient $E = \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, étudier la convergence simple, uniforme et normale des séries de fonctions de terme général suivant :
1. $u_n(x) = x^n$ $(u_0(0) = 1)$; 2. $u_n(x) = x^n/n!$; 3. $u_n(x) = (-1)^n/\sqrt{n^2 + x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$.
(b) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs décroissante telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Montrer que pour tout $0 < \alpha < \pi$, les séries de fonctions : $\sum a_n e^{inx}$, $\sum a_n \cos nx$ et $\sum a_n \sin nx$ sont uniformément convergentes sur l'ensemble $\cup_{k\in\mathbb{Z}}[\alpha + 2k\pi, 2(k+1)\pi - \alpha]$.

Proposition 3. (propriétés élémentaires) Soit $\sum u_n$ une série de fonctions à valeurs réelles définies sur une partie non vide E de R, qui converge simplement sur E vers une fonction $u : E \to \mathbb{R}$.
(a) Si toutes les fonctions u_n sont croissantes (resp. décroissantes) sur E, alors u est croissante (resp. décroissante) sur E.
(2) Si E est symétrique par rapport à zéro et si toutes les fonctions u_n sont paires (resp. impaires), alors la fonction u est paire (resp. impaire).
(3) Si $E = \mathbb{R}$ et toutes les fonctions u_n sont périodiques de même période T, alors u est une fonction périodique, de période T.

Proposition 4. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans K, simplement (resp. uniformément, normalement) convergentes sur E. Alors les séries de fonctions $\sum(u_n + v_n)$ et $\sum \lambda u_n$ $(\lambda \in K)$ sont simplement (resp. uniformément, normalement) convergentes sur E.

Théorème 1'. Soit $\sum u_n$ une série de fonctions réelles définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction u sur I.
(i) Si chaque fonction u_n est continue en $x_0 \in I$, alors u est continue en x_0.
(ii) Si chaque fonction u_n est continue sur I, alors u est continue sur I.

Théorème 2'. Soit $\sum u_n$ une série de fonctions réelles définies et continues sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction u sur $[a, b]$. On pose, pour $x \in [a, b]$ et pour $n \in \mathbb{N}$: $U_n(x) = \int_a^x u_n(t)dt$, $U(x) = \int_a^x u(t)dt$. Alors la série $\sum U_n$ converge uniformément vers U sur $[a, b]$. En particulier : $\sum_{n=0} \int_a^b u_n(t)dt = \int_a^b u(t)dt$.

Théorème 3'. Soit $\sum u_n$ une série de fonctions réelles définies et continuement dérivables sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On suppose que :
(i) Il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la serie numérique $\sum u_n(x_0)$ soit convergente.
(ii) La série $\sum u'_n$ est uniformément convergente sur $[a, b]$ vers une fonction v.
Alors la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction u continuement dérivable sur $[a, b]$ telle que $u' = v$.

Théorème 4'. Soit $\sum u_n$ une série de fonctions réelles définies sur un intervalle (ou une réunion d'intervalles) I de $\mathbb{R}$.
(i) Si la série $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u et si u_n est continue sur I, pour $n \in \mathbb{N}$, alors la fonction u est continue sur I.
(ii) Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement vers une fonction u sur I, si u_n est continuement dérivable sur I pour $n \in \mathbb{N}$ et si la série de fonctions $(u'_n)_{n\geq 0}$ est uniformément convergente vers une fonction v sur tout segment de I, alors la série $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers u, u est continuement dérivable sur I et on a $u' = v$.