Université Paris Sud | S3 MIAS 2003-2004
Centre d'Orsay | Mathématiques

Résumé de cours n°1 — Compléments d'analyse

I. Equivalents

Nous allons introduire une notion qui permet de comparer le comportement de deux fonctions au voisinage d'un point et qui sera fort utile dans les prochains chapitres du cours. Dans toute la suite, a désigne un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

Définition 1. Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles définies dans un voisinage V de a, sauf peut-être en a. On dit que f est **équivalente** à g en a (ou quand x tend vers a) s'il existe une fonction $\epsilon : V \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = g(x)(1+\epsilon(x)), \quad x \in V, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0.$$

On note alors $f \sim g$ en a, ou $f(x) \sim g(x), x \to a$.

Exemples. $\sin x \sim x$ et $\ln(1+x^3) \sim x^3$, $x \to 0$, $\quad e^{1/x} - 1 \sim 1/x$ en $+\infty$.

Conséquences de la définition

1. Si $g(x) \neq 0$ dans un voisinage de a (sauf peut-être en a), dire que f est équivalente à g en a équivaut à dire que $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. (Dans WIMS, seul ce cas a été traité.)

2. La relation "$f \sim g$ en a" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions réelles définies dans un voisinage de a (exercice). On peut alors utiliser l'expression "f et g sont équivalentes en a".

3. Si la fonction f admet un DL d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en $a \in \mathbb{R}$, de la forme :
$f(x) = c(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x)$, où $c \neq 0$ et $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$, alors $f(x) \sim c(x-a)^n$, $\quad x \to a$
0n a des énoncés analogues si $a = +\infty$ ou $a = -\infty$, ce qui motive la définition suivante :

Définition 2. On dit que cx^p, où $c \in \mathbb{R}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, est un **infiniment petit** (resp. **grand**) d'ordre p au voisinage de 0 (resp. de $+\infty$).

En général, on cherche à trouver un infiniment petit ou grand d'ordre p équivalent à la fonction que l'on étudie. Il y a des fonctions pour lesquelles un tel équivalent n'existe pas : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^p(\ln x)^q = 0$, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{Z}$.

4. Si $f \sim g$ en a et g admet une limite lorsque x tend vers a, alors f admet une limite lorsque x tend vers a et l'on a $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$. Si l'on a $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = l$, $\quad l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on a $f \sim g$ en a **si** $l \in \mathbb{R}^*$, et "n'importe quoi" dans les autres cas (en particulier, si $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}^*$, $f \sim l$ en a).

5. Si $f \sim g$ en a alors $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = 0$ **si** g est bornée au voisinage de a et "n'importe quoi" dans le cas contraire.

Règles de calcul sur les équivalents

L'utilisation d'équivalents peut simplifier le calcul de limites et l'étude d'expressions complexes, quitte à bien maîtriser les opérations permises.

Proposition. Soient f_1, f_2, g_1 et g_2 des fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ telles que $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ en a. Alors :
(i) $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ en a.
(ii) Si $\frac{f_1}{f_2}$ est définie au voisinage de a alors $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$ en a.
(iii) En général, $f_1 + f_2$ n'est pas équivalente à $g_1 + g_2$ en a.
(iv) En général, e^{f_1} et $\ln(f_1)$ ne sont pas équivalents à e^{g_1} et $\ln(g_1)$ en a.

Exemple. Calculer la limite en zéro (si elle existe) des fonctions réelles f_1 et f_2 définies au voisinage de 0, 0 exclu, par :

$$f_1(x) = \frac{(x - \sin x)\tan(x^2)}{(x^3 + 2x^2)(\ln(1+x))^3}, \qquad f_2(x) = \frac{e^x - \cos x - \ln(1+x) - \tan(3x^2/2)}{x(\mathrm{Arcsin}\,(x^2))}.$$

II. Borne supérieure et fonctions croissantes

Rappel de quelques définitions. Soit E une partie de $\mathbb{R}$. On dit que E est **majorée** (resp. **minorée**) s'il existe un nombre réel M (resp. m) tel que tout $x \in E$ vérifie $x \leq M$ (resp. $x \geq m$). Un tel nombre M (resp. m) s'appelle un **majorant** (resp. **minorant**) de E. On dit que E est **bornée** si E est majorée et minorée. S'il existe un majorant A (resp. minorant a) de E qui appartient à E, on dit que A est **le plus grand élément** ou **le maximum** de E (resp. que a est **le plus petit élément** ou **le minimum** de E).

On dit que la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est majorée, minorée ou bornée sur E si $f(E) = \{f(x), x \in E\}$ est une partie majorée, minorée ou bornée de $\mathbb{R}$. On dit que f atteint son maximum, son minimum ou ses bornes sur E si $f(E)$ a un plus grand élément, un plus petit élément ou un maximum et un minimum, respectivement.

Axiome de la borne supérieure (ou théorème!). Toute partie E non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet un plus petit majorant. Ce plus petit majorant de E s'appelle la **borne supérieure** de E et se note **sup E**.

Corollaire. Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet un plus grand minorant. Ce plus grand minorant de E s'appelle la **borne inférieure** de E et se note **inf E**.

Caractérisation de la borne supérieure. Soit $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ et E majoré. La borne supérieure de E est le seul nombre réel M ayant les deux propriétés suivantes :

(i) $\forall x \in E, \quad x \leq M$.

(ii) $\forall \epsilon > 0, \quad \exists x \in E, \quad M - \epsilon < x \leq M$.

Exemples. 1. $E =]1, 3]$, $inf\ E = 1$ et $sup\ E = 3$; 3 est le maximum de E et E n'a pas de minimum.

2. $E = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 3\} \subset \mathbb{R}$. Alors $inf\ E = -\sqrt{3}$, $supE = \sqrt{3}$ et E n'a pas de minimum ou de maximum (l'axiome de la borne supérieure (resp. inférieure)n'est pas verifié dans $\mathbb{Q}$).

3. Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction majorée sur E. Alors $sup_{x \in E} f(x) = sup\ f(E)$ est un nombre réel tel que $f(x) \leq sup_{x \in E}\ f(x),\ x \in E$ (attention : un nombre réel M vérifiant $f(x) \leq M,\ x \in E$, est un majorant quelconque de f sur E). Il n'existe pas nécessairement $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = sup_{x \in E}\ f(x)$. Cette dernière condition est vérifiée lorsque E est un segment (intervalle fermé et borné) et f est continue sur E (voir le cours sur la continuité du S1).

Théorème. Soit a un nombre réel et b un nombre réel ou $+\infty$. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante sur $[a, b[$. Alors la fonction f admet une limite en b et on a :

(i) Si f est majorée sur $[a, b[$, $\lim\limits_{x \to b} f(x) = sup_{x \in [a,b[} f(x) \in \mathbb{R}$ (la limite est finie).

(ii) Si f n'est pas majorée sur $[a, b[$, $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$.

On a un énoncé analogue lorsque on considère une fonction $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ croissante, où $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$: si f est minorée, f admet une limite finie en a, si f n'est pas minorée, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Exercice. Ecrire les énoncés analogues pour une fonction décroissante sur un intervalle semi-ouvert borné ou une demi-droite. Dessiner des graphes de fonctions réelles vérifiant les différentes conclusions énoncées.

III. Rappels sur les intégrales définies

Nous donnons une définition de l'intégrale d'une fonction bornée sur un segment (qui utilise les notions de bornes supérieure et inférieure), sans trop préciser le langage employé et sans justifications. Cette définition et la preuve des propriétés qui s'en suivent sont délicates, elles seront abordées dans l'option "Topologie" du S4 MIAS (vous pouvez aussi consulter [PO] et [LM], Analyse 1ère année). Nous vous demandons de connaîttre les propriétés de l'intégrale, de savoir les appliquer et de connaîttre les contre-exemples qui montrent que certaines hypothèses sont essentielles.

Définition 1. (intégrale d'une fonction **bornée** sur un **segment**)

Soient a et b deux nombres réels, $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur $[a, b]$. Une subdivision d de $[a, b]$ est une suite de $n \in \mathbb{N}^*$ nombres réels tels que $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. A cette subdivision d associons les sommes :

$$s_d = \sum_{1 \le i \le n-1} (x_i - x_{i-1}) inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{et} \quad S_d = \sum_{1 \le i \le n-1} (x_i - x_{i-1}) sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Géométriquement, lorsque $f \ge 0$, s_d (resp. S_d) est l'aire sous la courbe d'une fonction en escalier au-dessous (resp. au-dessus) de la courbe représentative de f. Notons E (resp. F) l'ensemble de toutes les sommes s_d (resp. S_d) lorsque on considère toutes les subdivisions d de $[a, b]$. On peut prouver que l'on a $s_d \le S_{d'}$ pour toutes les subdivisions d et d' de $[a, b]$. Il s'ensuit que l'ensemble E est majoré et que l'ensemble F est minoré, donc ils admettent une borne supérieure et une borne inférieure, respectivement. On dit que la fonction f est **intégrable sur le segment** $[a, b]$ (au sens de Riemann) si on a $sup\ E = inf\ F = I$ et dans ce cas on dit que I est **l'intégrale de la fonction f sur le segment** $[a, b]$ et on écrit $I = \int_a^b f(t)dt$. Géométriquement, $\int_a^b f(t)dt$ représente l'aire algèbrique "sous la courbe de f".

Conventions. $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt, \qquad \int_a^a f(t)dt = 0.$

Question. Quelles fonctions bornées sur un segment sont-elles intégrables ?

Proposition 1. Toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotone sur le segment $[a, b]$ est bornée et intégrable sur $[a, b]$. (facile, [LM], Analyse 1ère année, p.146)

Théorème 1. Toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$. (admis, résultat profond à voir en option, en S4 MIAS)

Exercice 1. (a) Soit $\chi_{1/2} : x \in [0, 1] \to \mathbb{R}$, $\chi_{1/2}(x) = 0, x \ne 1/2$, $\chi_{1/2}(1/2) = 1$. La fonction $\chi_{1/2}$ est intégrable sur le segment $[0, 1]$.

(b) Soit $\chi_{\mathbb{Q}} : x \in [0, 1] \to \mathbb{R}$, $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0$, $x \notin \mathbb{Q}$, $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 1$, $x \in \mathbb{Q}$. La fonction $\chi_{\mathbb{Q}}$ n'est pas intégrable sur le segment $[0, 1]$.

Définition 2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur le segment $[a, b]$. On dit que f est une fonction **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ de $[a, b]$ telle que la restriction de f à chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ soit continue et admette des limites finies à droite en x_{i-1} et à gauche en x_i, pour $1 \le i \le n$.

Proposition 2. Toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ est bornée et intégrable sur $[a, b]$ et on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^{x_1} f(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt + \cdots + \int_{x_{n-1}}^b f(t)dt.$$

Propriétés de l'intégrale (conséquences de la définition)

Proposition 3.(linéarité de l'intégrale) Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur le segment $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions $f + g$ et λf sont intégrables sur $[a, b]$ et l'on a :

$$\int_a^b (f(t)+g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt, \qquad \int_a^b (\lambda f)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt.$$

Dans le langage de l'algèbre linéaire, cela veut dire que l'ensemble des fonctions bornées et intégrables sur le segment $[a,b]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que l'application définie sur cet espace par $f \mapsto \int_a^b f(t)dt$ est une forme linéaire.

Proposition 4. (relation de Chasles) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur le segment $[a,b]$ et $c \in [a,b]$. Alors f est intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ et l'on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b g(t)dt.$$

Proposition 5. (intégrales et inégalités) Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur le segment $[a,b]$.

(a) Si $m \leq f(t) \leq M,\ t \in [a,b],$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$.

(b) Si $f(t) \geq 0,\ \ t \in [a,b],$ alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

(c) Si $f(t) \leq g(t),\ \ t \in [a,b],$ alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

(d) La fonction $|f|$ est intégrable sur $[a,b]$ et l'on a : $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.

Propriétés de l'intégrale liées à la continuité de la fonction sur un intervalle

Proposition 6. (formule de la moyenne) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a,b]$. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que : $\int_a^b f(t)dt = (b-a)f(c)$.

Théorème 2. (théorème fondamental du calcul intégral) Soient I un intervalle non réduit à un point, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Posons , pour $x \in I$,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Alors la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I et l'on a $F'(x) = f(x)$, pour $x \in I$.

Attention. Si f est une fonction bornée et intégrable sur un segment $[a,b]$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est bien définie sur $[a,b]$, mais f peut ne pas admettre de primitive sur ce segment (prendre la fonction $\chi_{1/2}$ définie dans l'exercice 1).

Corollaire 1. Si la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I, alors la fonction F définie precedemment est une primitive de f sur l'intervalle I ; l'ensemble des primitives de f sur I s'écrit $\{F + C, C \in \mathbb{R}\}$.

Corollaire 2. (formule de calcul des intégrales définies) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I. Soient a et b dans I et G une primitive quelconque de f sur I. Alors on a : $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$.

Corollaire 3. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, $u : J \to I$ et $v : J \to I$ deux fonctions dérivables sur l'intervalle J. Alors la fonction définie pour $x \in J$ par $H(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ est dérivable sur J et l'on a : $H'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$.

Proposition 7. (formule d'intégration par parties) Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, f et g deux fonctions à valeurs réelles définies et continuement dérivables sur I. Alors por tous a et b dans I on a : $\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$.

Proposition 8. (formule de changement de variable) Soit $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $\phi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ une fonction continuement dérivable. Alors $I = \phi([\alpha,\beta]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et pour toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue on a : $\int_\alpha^\beta f(\phi(u)\phi'(u)du = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt$.