Université Paris Sud — S3 MIAS 2003-2004
Centre d'Orsay — Mathématiques

Résumé de cours n°2 — Intégrales généralisées

Question. Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si I est un intervalle semi-ouvert borné ou une demi-droite ou si la fonction f n'est pas bornée sur I, "l'aire sous la courbe de f" peut-elle être finie ?

Exemple. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1/x^\alpha,\ x > 0$. Calculer $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)dt$ et $\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 f(t)dt$.

Dans toute la suite, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$ et $a < b$. Alors $[a, b[$ est un intervalle semi-ouvert borné ou une demi-droite.

Définition 1. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a, x]$, pour tout $x \in [a, b[$. On dit que f **est intégrable sur** $[a, b[$ si la fonction F définie sur $[a, b[$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ a une limite finie quand x tend vers b. Dans ce cas on note $\lim_{x\to b} F(x) = \int_a^b f(t)dt$ et on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est **convergente** ou que $\int_a^b f(t)dt$ est l'intégrale **généralisée** ou **impropre** de f sur $[a, b[$.

Si F n'admet pas de limite finie quand x tend vers b (donc n'a pas de limite ou a limite infinie), on dit que f n'est pas intégrable sur $[a, b[$ ou que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est divergente.

Attention. On dit souvent : " étudier la convergence de l'intégrale ". Dans ce type d'énoncé on **ne suppose pas** que l'intégrale converge, donc ce symbole n'a de sens (c'est-à-dire, est un nombre réel) et ne peut intervenir dans des calculs que si l'on vérifie d'abord la convergence de l'intégrale.

Exemple fondamental 1. (intégrales de Riemann, à mémoriser) Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
$\int_0^a \frac{1}{t^\alpha}dt$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Exercice. Soient $c \in \mathbb{R}$ ou $c = -\infty$, $d \in \mathbb{R}$, $c < d$. Soit $f :]c, d] \to \mathbb{R}$. Dire sous quelles conditions on peut envisager l'étude de l'intégrale $\int_c^d f(t)dt$ et dans ce cas, quand elle est convergente ou divergente.

Remarque. ("fausses" intégrales généralisées) Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $\int_a^b f(t)dt$ est une intégrale impropre. Mais si $b \in \mathbb{R}$ et f a une limite finie à gauche en b, elle se prolonge par continuité au point b : l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et coïncide avec l'intégrale définie $\int_a^b f(t)dt$.

Définition 2. (intégrale généralisée aux deux - ou plusieurs - bornes) Soient a et b dans $\mathbb{R}$, $a < b$, ou $a = -\infty$, ou $b = +\infty$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur tout segment $[c, d] \subset]a, b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si les intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont convergentes, où $c \in]a, b[$ (la définition ne dépend pas du choix de c). On définira de même la convergence de l'intégrale d'une fonction définie sur un intervalle privé d'un nombre fini de points et intégrable sur tout segment contenu dans cette réunion (en prennant autant de points intermediaires que nécessaire).

Attention. L'étude de la convergence d'une intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ n'équivaut pas à chercher si la fonction $x \mapsto \int_{-x}^x f(t)dt$ a une limite quand x tend vers $+\infty$ (considérer $\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} 1/(1 + t^2)dt$).

Intégrales généralisées des fonctions de signe constant

Dans la plupart des problèmes, on cherche la convergence de l'intégrale généralisée d'une fonction dont on ne connait pas une primitive, donc l'étude des intégrales généralisées ne se réduit pas à des calculs de primitives et de limites. Il faut d'autres techniques : pour les fonctions qui gardent un signe constant sur l'intervalle d'intégration, les comparaisons et les équivalents vont être les principaux outils. Pour simplifier, nous prendrons des fonctions positives, à vous de transcrire les énoncés dans le cas des fonctions négatives.

Théorème 1. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction positive sur l'intervalle $[a, b[$ et intégrable sur tout intervalle $[a, x]$, $x \in [a, b[$. L'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si la fonction F définie pour $x \in [a, b[$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est majorée sur l'intervalle $[a, b[$.

Théorème 2. Soient f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $[a, b[$, vérifiant $0 \leq f \leq g$ et intégrables sur tout intervalle $[a, x]$, $x \in [a, b[$.
(a) Si l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ est convergente, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.
(b) Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est divergente, alors l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ est divergente.

Exemple. Etudier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt$ (important en probabilités).

Exemple fondamental 2. (intégrales de Bertrand, à mémoriser). Soient α et β dans $\mathbb{R}$.

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1, \beta > 1$.

$\int_0^{1/2} \frac{1}{(t)^\alpha(|\ln t|)^\beta}dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ ou $\alpha = 1, \beta > 1$.

Théorème 3. Soient f et g deux fonctions définies et **positives** sur l'intervalle $[a, b[$, intégrables sur tout intervalle $[a, x]$, $x \in [a, b[$. Si $f \sim g$ en b alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Exemple. $\int_0^{+\infty} \frac{t\ln(1+\sqrt{t})}{t^3+t\sin t+3}dt$ converge-t-elle ?

Intégrales généralisées des fonctions de signe quelconque

Rappel : dans toute la suite, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$ et $a < b$.

Proposition 1. (linéarité de l'intégrale généralisée) Soient $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ et $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a, b[$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions $f + g$ et λf sont intégrables sur $[a, b[$ et l'on a :

$$\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt, \qquad \int_a^b (\lambda f)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt.$$

Corollaire. L'ensemble $\mathcal{I}$ des fonctions définies et intégrables sur l'intervalle $[a, b[$, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et l'application $f \in \mathcal{I} \mapsto \int_a^b f(t)dt$ est une forme linéaire sur $\mathcal{I}$.

Remarques.
1.Cette proposition sert aussi à montrer qu'une intégrale diverge : si $\int_a^b f(t)dt$ converge et $\int_a^b g(t)dt$ diverge, alors $\int_a^b (f(t) + g(t))dt$ diverge ; par contre, si $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ divergent , on ne peut rien conclure sur la convergence ou la divergence de $\int_a^b (f(t) + g(t))dt$.

2. Chaque fois que dans un calcul on est amené à décomposer une intégrale convergente en une somme d'intégrales (en particulier losqu'on a une fraction rationnelle) il faut s'assurer que **chacune d'elles converge.** Exemple : $I = \int_2^\infty \frac{1}{t^2-1}dt$.

Définition 3. Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a,x]$, pour tout $x \in [a,b[$.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est **semi-convergente** si elle est convergente et n'est pas absolument convergente.

Théorème 4. Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur tout intervalle $[a,x]$, $x \in [a,b[$. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente alors elle est convergente et on a

$$|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Exemple. Etudier la convergence de $I = \int_2^\infty \dfrac{\sin(\ln t) + \cos(e^t)}{\sqrt{t^3 - 1}}\, dt$.

Théorème 5. (changement de variable dans les intégrales impropres) Soient $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$ ou $d = +\infty$, $c < d$. Soient $\phi : [c,d[\to [a,b[$ une bijection croissante de classe C^1 et $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)dt$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

Remarque. On a des énoncés analogues pour une bijection de classe C^1 et décroissante $\phi : [c,d[\to]a,b]$ (attention : on aura alors $\int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$), ou pour une bijection de classe C^1 croissante ou décroissante $\phi :]c,d[\to]a,b[$.

Intégration par parties dans les intégrales impropres : c'est à manier avec prudence (peut conduire à des formes indéterminées $\infty - \infty$); il est préférable de l'utiliser sur des intégrales définies et passer ensuite à la limite (nous verrons quelques exemples ci-dessous).

Méthode d'étude de la convergence d'une intégrale généralisée

Comment rédiger l'étude de la convergence de $I = \int_a^b f(t)dt$ (où $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$ et f est une fonction qui s'écrit en termes de fonctions élémentaires) ?

1. Déterminer l'ensemble de définition de f ; préciser les segments sur lesquels f est intégrable (le plus souvent, f est continue, continue par morceaux ou monotone sur ces segments) et les points où il faut étudier la convergence.

Exemple. Montrer que étudier la convergence de $I = \int_0^{+\infty} \dfrac{|t-1|\sin(t^5)}{t^3 \ln t} dt$ revient à étudier la convergence de quatre intégrales, que l'on explicitera.

Dans la suite, on considère $J = \int_\alpha^\beta f(t)dt$, où $a \leq \alpha < \beta \leq b$, on suppose que f est intégrable sur tout segment $[\alpha, \gamma]$, $\gamma \in [\alpha, \beta[$ et on se propose d'étudier la convergence de J pour la borne β.

2. Vérifier si la fonction f est de signe constant dans un voisinage V de β. Si OUI, on cherche à :

- majorer f par une fonction g dont l'intégrale sur J converge ;
- minorer f par une fonction g dont l'intégrale sur J diverge ;
- trouver une fonction g de signe constant sur V, $g \sim f$ en β, dont on connaît la nature de l'intégrale sur J (par exemple, intégrales de Riemann et de Bertrand).

3. On suppose que f est de signe quelconque au voisinage de β. On cherche alors à savoir si J est absolument convergente, par des arguments "simples" (il peut être difficile de montrer qu'une intégrale n'est pas absolument convergente, donc si la question n'est pas posée, dans certains cas il est préférable de poursuivre l'étude par d'autres méthodes). Si J est absolument convergente, alors J est convergente.

4. Si J n'est pas absolument convergente, ou si on n'a pas pu l'établir facilement, on cherche à utiliser un des outils suivants :

(i) Changement de variable. Exemple : $I_1 = \int_1^\infty t^\gamma \cos(t^3)dt,\ \gamma \in \mathbb{R}$.

(ii) Intégration par parties. Exemples :

$$I_2 = \int_1^\infty \frac{\cos t}{t}dt, \qquad I_3 = \int_5^\infty \frac{\sin t}{\ln t}dt, \qquad I_4 = \int_5^\infty \frac{\sin t}{\ln t + \sin t}dt.$$

(iii) Utilisation d'un développement limité. Exemples :

$$I_5 = \int_5^\infty \frac{\sin t}{\ln(t + \sin t)}dt, \qquad I_6 = \int_0^\infty (\sqrt{t^2 + \cos t} - t)dt.$$

Remarque. Lorsqu'on utilise un DL, f s'écrira comme la somme de plusieurs fonctions et on pourra conclure à la convergence de J si chaque terme conduit à une intégrale convergente, à la divergence de J si tous les termes, sauf un, conduisent à une intégrale convergente, et le terme restant conduit à une intégrale divergente. Le terme qui contient le reste doit être étudié avec soin, en général, l'ordre du DL doit permettre de montrer que son intégrale est absolument convergente. En général, si on utilise un DL généralisé (en puissances de X, fonction de x telle $\lim_{x\to 0} X(x) = 0$) d'ordre n en zéro, on a intérêt à écrire le dernier terme et le reste dans une seule expression, de la forme

$$a_n(X(x))^n(1 + \epsilon(x)) = a_n(X(x))^n\ 0(1),\ \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0,\ a_n \in \mathbb{R}^*.$$

Exemple fondamental 3. (à mémoriser, résultats établis en cours ou TD)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $I_\alpha = \int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha}dt$, $J_\alpha = \int_1^\infty \frac{\cos t}{t^\alpha}dt$.

- si $\alpha > 1$, I_α et J_α sont absolument convergentes ;
- si $0 < \alpha \leq 1$, I_α et J_α sont semi-convergentes ;
- si $\alpha \leq 0$, I_α et J_α sont divergentes.

****

Preuve du Théorème 5. Puisque $\phi : [c, d[\to [a, b[$ est une bijection croissante de classe C^1, alors la fonction réciproque ϕ^{-1} est une bijection croissante et continue de $[a, b[$ dans $[c, d[$ (Polycopié du S1, p. 79 à 81). On a $\phi(c) = a$, $\lim_{t\to d}\phi(t) = b$, $\lim_{x\to b}\phi^{-1}(x) = d$ et pour tout $t \in [c, d[$, $\phi(t) = x$ équivaut à $\phi^{-1}(x) = t$. Pour tout $t \in [c, d[$ on a (Proposition 8 du résumé de cours n°1) :

$$\int_c^t f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(t)} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt$$

La fontion $t \mapsto \int_c^t f(\phi(t))\phi'(t)dt$ a une limite finie lorsque t tend vers d si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ a une limite finie lorsque x tend vers b, d'où la conclusion du théorème.

Remarque. On a des énoncés analogues pour une bijection de classe C^1 et décroissante $\phi : [c, d[\to]a, b]$ (attention : on aura alors $\int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$), ou pour une bijection de classe C^1 croissante ou décroissante $\phi :]c, d[\to]a, b[$.