Université Paris Sud — S3 MIAS 2003-2004
Centre d'Orsay — Mathématiques

Résumé de cours n°3 – Séries numériques

Question. Nous savons additionner un nombre fini de nombres réels ou complexes. Peut-on donner un sens à une somme comportant une infinité de termes, par exemple, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$?

Notations. Dans toute la suite, K désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$. Soit une suite de nombres dans K. Pour tout entier $n \geq 0$ on note :

$$s_0 = u_0, \quad s_1 = u_0 + u_1, \quad s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

(dans la dernière expression, l'indice k ne sert qu'à désigner les termes de la suite que l'on additionne, donc peut-être remplacé par toute autre lettre, sauf n : $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{i=0}^{n} u_i$).

Les nombres s_n s'appellent **les sommes partielles** de la série $\sum u_n$. Le nombre u_n s'appelle **le terme général** de la série $\sum u_n$.

Définition 1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes dans K. Si la suite de terme général $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est convergente on dit que **la série de terme général u_n est convergente** ou que **la série $\sum u_n$ est convergente**. Si la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ n'est pas convergente, on dit que **la série de terme général u_n est divergente** ou que la série $\sum u_n$ **diverge**. Si la série $\sum u_n$ est convergente, la limite s de la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ s'appelle **la somme de la série** et on note $s = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exemple. Si $u_n = 1/2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors $s_n = 2 - 1/2^n$ et $\lim_{n\to\infty} s_n = 2$, donc la série de terme général u_n est convergente et on a $\sum_{n=0}^{\infty} 1/2^n = 2$.

Remarques. 1. La notation $\sum u_n$ ne préjuge en rien la convergence de la série (on ne peut pas l'utiliser dans un calcul, sans prouver d'abord la convergence).

2. On ne change pas la convergence ou la divergence d'une série en supprimant un nombre fini de termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, mais si la série converge, sa somme est modifiée (c'est la raison de la notation $\sum u_n$, qui ne précise pas à quel indice démarre la somme).

3. Supposons que la série $\sum u_n$ est convergente, de somme $s = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Alors, pour tout entier $n \geq 1$, si l'on supprime les $n+1$ premiers termes, on obtient une série convergente, de somme $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = s - s_n$. Le nombre r_n est appelé **le reste d'ordre** n de la série $\sum u_n$. On a $\lim_{x\to\infty} r_n = \lim_{x\to\infty}(s - s_n) = 0$ et $s = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = s_n + r_n = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

4. Rappelons qu'il y a deux sortes de divergence d'une série à termes réels :
(a) $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$. Exemple : $u_n = 1,\ n \in \mathbb{N}$.
(b) La suite $(s_n)_{n\geq 0}$ n'admet pas de limite, finie ou infinie. Exemple : $u_n = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}$.

Proposition 1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres dans K. Si la série $\sum u_n$ est convergente alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Remarque importante. La Proposition 1 donne une condition **nécessaire** de convergence d'une série. Cette condition n'est pas suffisante (voir l'exemple fondamental 2 ci-dessous). La contraposée de la Proposition 1 s'écrit : *si le terme général d'une série ne tend pas vers zéro, la série diverge* (énoncé fort utile pour montrer qu'une série **diverge**).

Exemple fondamental 1. (la série géométrique). Soient $a \in K,\ u_n = a^n,\ n \geq 0$.

1^{er} cas. Si $|a| < 1$, $\quad \sum u_n$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} a^n = 1/(1-a)$ (si $a = 0,\ u_0 = 1$).

2^e cas. Si $|a| \geq 1$, (a_n) ne tend pas vers zéro et $\sum a^n$ diverge.

Exemple fondamental 2. (la série harmonique). Soit $u_n = 1/n,\ n \geq 1$. La série $\sum 1/n$ est divergente.

Exemple fondamental 3. (série "télescopique"). Soit $u_n = 1/n(n+1),\ n \geq 1$. La série $\sum 1/n(n+1)$ est convergente et $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n(n+1) = 1$.

Séries à termes positifs

Théorème 1. La série $\sum u_n$ à termes positifs est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Théorème 2. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, vérifiant $0 \leq u_n \leq v_n,\ n \in \mathbb{N}$.
(a) Si la série de terme général v_n est convergente, alors la série de terme général u_n est convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.
(b) Si la série $\sum u_n$ est divergente, alors la série $\sum v_n$ est divergente.

Remarque. Les théorème 1 et 2 restent valable si on a $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang n_0 (quitte, dans le théorème 2 (a), à démarrer les sommes à l'indice n_0).

Exemple fondamental 4. (développement décimal d'un nombre réel) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres entiers tels que $0 \leq a_n \leq 9,\ n \geq 1$. Alors la série $\sum a_n/10^n$ est convergente et $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/10^n$ est un nombre réel de l'intervalle $[0, 1]$.

Théorème 3. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$. Alors ces séries sont de même nature.

Exemple. Les séries $\sum \ln(1 + 1/n)$ et $\sum 1/n^2$ convergent-elles ?

Les deux règles suivantes permettent, dans certains cas, de comparer une série à termes positifs à une série géométrique. En général, la première règle est utile lorsque le terme général de la série s'écrit avec des produits et des factoriels, la deuxième lorsqu'on a des puissances.

Règle de d'Alembert. Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

(1) Si $l < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
(2) Si $l > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.
(3) Si $l = 1$, on ne peut pas conclure sans poursuivre l'étude (par d'autres méthodes).

Exemples. Etudier la convergence des séries de terme général, respectivement : $u_n = x^n/n!,\ v_n = n^3x^n$, où $x \in \mathbb{R}^{+*},\ n \geq 1$.

Règle de Cauchy. Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs telle que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$. Alors les conclusions (1), (2) et (3) précédentes restent valables.

Exemple. La série de terme général : $u_{2p} = 1/2^p$, $u_{2p+1} = \ln p/(p2^p)$, $p \in \mathbb{N}$, est convergente. Noter que la règle de d'Alembert ne s'applique pas à cette série.

Théorème 4. (comparaison série-intégrale) Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive et décroissante. La série $\sum f(n)$ est convergente si et seulement si l'intégrale impropre $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente. Dans ce cas, si $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ est le reste d'ordre n de la série, on a : $\int_{k=n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq r_n \leq \int_{k=n}^{+\infty} f(t)dt$, $n \geq n_0$.

Lemme. Sous les hypothèses précédentes, pour tout entier $n > n_0$ on a :

$$\int_{n_0}^{n} f(t)dt + f(n) \leq u_{n_0} + \cdots + u_n \leq f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)dt$$

En utilisant l'étude de la convergence des intégrales de Riemann et de Bertrand, on en déduit :

Exemple fondamental 5. (séries de Riemann) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$: $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$.

Exemple fondamental 6. (séries de Bertrand) Soient α et β dans $\mathbb{R}$:

$$\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1 \text{ ou } \alpha = 1,\ \beta > 1.$$

Exercice. (règle $n^\alpha u_n$) Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs et soit α un nombre réel strictement positif.

(a) Si la suite $(n^\alpha u_n)$ a une limite non nulle, alors la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 1$;

(b) Si l'on a $\alpha > 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors $\sum u_n$ converge ;

(c) Si $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge ; si $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = 0$, on ne peut pas conclure.

Plan d'étude d'une série à termes positifs $U = \sum u_n$

1. On cherche à déterminer si la suite (u_n) admet une limite :

(a) Si (u_n) n'admet pas de limite, ou admet une limite non nulle, la série $\sum u_n$ diverge (fin de l'étude !).

(b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, la condition nécessaire est satisfaite : on poursuit l'étude.

2. On cherche à comparer $U = \sum u_n$ à une série $V = \sum v_n$ à termes positifs dont on connaît le comportement :

- si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et V converge, alors U converge ;
- si $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang et V diverge, alors U diverge ;
- si $u_n \sim v_n$, alors U et V sont de même nature.

Séries dont on doit mémoriser le comportement : séries géométriques (règles de d'Alembert et de Cauchy), séries de Riemann (règle $n^\alpha u_n$) et séries de Bertrand.

3. Si la suite (u_n) est décroissante et tend vers zéro, on peut se ramener à la comparaison avec une intégrale généralisée. Dans ce cas, ainsi que lorsqu'on compare à une série géométrique, on peut obtenir facilement une majoration des restes.

Séries à termes réels ou complexes (exemples donnés en cours)

Définition 2. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes dans $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.

- la **somme** des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général $u_n + v_n$;
- si $\lambda \in K$, le **produit par** λ de la série $\sum u_n$ est la série de terme général λu_n.

(cette définition ne préjuge en rien de la convergence des séries).

L'ensemble $\mathcal{S}$ des séries à termes dans K, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, $(\sum u_n, \sum v_n) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \mapsto \sum u_n + v_n \in \mathcal{S}$ et $(\lambda, \sum u_n) \in K \times \mathcal{S} \mapsto \sum \lambda u_n \in \mathcal{S}$, est un K-espace vectoriel.

Proposition 2. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes dans K sont convergentes, alors les séries $\sum(u_n + v_n)$ et $\sum(\lambda u_n)$, où $\lambda \in K$, sont convergentes et on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda u_n) = \lambda(\sum_{n=0}^{\infty} u_n)$$

Corollaire. L'ensemble $\mathcal{S}_c$ des séries à termes dans K convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{S}$.

Remarques. 1. Si $\lambda \neq 0$, les séries $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature.
2. Si la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum v_n$ diverge, alors la série $\sum(u_n + v_n)$ diverge (Proposition 2) ; par contre, si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut pas conclure.

Proposition 2. Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes. Posons $u_n = a_n + ib_n$, où $a_n = Re\ u_n \in \mathbb{R}$ et $b_n = Im\ u_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent et dans ce cas $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Définition 3. La série $\sum u_n$ à termes dans K est dite **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente. Une série convergente et non absolument convergente est dite **semi-convergente**.

Théorème 5. Toute série $\sum u_n$ à termes dans K absolument convergente est convergente et on a $|\sum_{n=0}^{\infty} u_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

Notons que l'ensemble des séries à termes dans K absolument convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$ (ou de $\mathcal{S}_c$).

Exemple fondamental 7. (la série exponentielle) Soient $z \in \mathbb{C}$, $u_n = z^n/n!$, $n \geq 0$ (si $z = 0, u_0 = 1$). La série $\sum z^n/n!$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = e^x$ (pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on définit e^z par la formule analogue).

Définition 4. Une série à termes réls $\sum u_n$ est **alternée** si ses termes sont alternativement positifs ou négatifs, c'est-à-dire, $u_n u_{n+1} \leq 0$, $n \geq 0$. Dans ce cas, on pose souvent $u_n = (-1)^n a_n$ (ou $u_n = (-1)^{n+1} a_n$), $n \geq 0$, où $a_n = |u_n|$, $n \geq 0$.

Théorème 6. (de convergence des séries alternées et de majoration du reste) Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite **décroissante** de nombres réels positifs telle que $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Alors la série alternée de terme général $u_n = (-1)^n a_n$ est convergente. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ de la série est comprise entre les sommes partielles s_n et s_{n+1} et on a $|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^n a_n| \leq a_{n+1}$.

Théorème 7. (critère d'Abel) Soit $\sum u_n$ une série à termes dans $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. On suppose que $u_n = a_n b_n$, $n \geq 0$, où :
(a) $(a_n)_{n \geq 0}$ est une suite **décroissante** de nombres réels positifs telle que $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$;
(b) Il existe $B > 0$ tel que $(b_n)_{n \geq 0}$ (où $b_n \in K, n \geq 0$) vérifie, pour $n \geq 0$, $|\sum_{k=0}^{n} b_k| \leq B$.

Alors la série $\sum u_n$ est convergente et pour $n \in \mathbb{N}$, $|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_n| \leq B a_{n+1}$.

Lemme. $|\sum_{p \leq k \leq q} e^{ikx}| \leq 1/|sin(x/2)| \quad (p, q \in \mathbb{N},\ p < q,\ x \in \mathbb{R},\ x \not\equiv 0(mod\ 2\pi))$.

Corollaire. (à mémoriser) Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite **décroissante** de nombres réels positifs telle que $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Alors :
- les séries trigonométriques $\sum a_n e^{inx}$ et $\sum a_n \cos nx$ sont convergentes pour $x \in \mathbb{R}$, $x \not\equiv 0(mod\ 2\pi)$.
- la série trigonométrique $\sum a_n \sin nx$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.