Itération de pliages de quadrilatères

Yves Benoist & Dominique Hulin

ABSTRACT **Iteration of quadrilateral foldings**

Starting with a quadrilateral $q_0 = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ of $\mathbb{R}^2$, one constructs a sequence of quadrilaterals $q_n = (A_{4n+1}, \ldots, A_{4n+4})$ by iteration of foldings : $q_n = \varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(q_{n-1})$ where the folding φ_j replaces the vertex number j by its symmetric with respect to the opposite diagonal (see figure 1).

We study the dynamical behavior of this sequence. In particular, we prove that :

- The drift $v := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} q_n$ exists.
- When none of the q_n is isometric to q_0, then the drift v is zero if and only if one has $\max a_j + \min a_j \leq \frac{1}{2} \sum a_j$ where $a_1, \ldots, a_4$ are the sidelengths of q_0.
- For Lebesgue almost all q_0 the sequence $(q_n - nv)_{n\geq 1}$ is dense on a bounded analytic curve with a center or an axis of symmetry. However, for Baire generic q_0, the sequence $(q_n - nv)_{n\geq 1}$ is unbounded (see figures 2 to 7).

1 Introduction

1.1 Pliage cyclique

A chaque quadrilatère $q_0 = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ du plan euclidien $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, on peut associer d'autres quadrilatères obtenus par pliage le long d'une diagonale. Ainsi, pour $j = 1, \ldots, 4$, le quadrilatère $\varphi_j(q_0)$ est obtenu à partir de q_0 en remplaçant le sommet A_j par son symétrique $s_{\Delta_j}(A_j)$ par rapport à la diagonale Δ_j joignant les deux voisins de A_j.

Partons du quadrilatère q_0 et considérons la suite q_n de quadrilatères obtenue en pliant de façon cyclique les sommets numéros $1, 2, 3, 4$. Autrement dit, on pose $\varphi = \varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ et, pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $q_n := \varphi^n(q_0)$. Nous voulons décrire le comportement dynamique de cette suite q_n. On notera $q_n = (A_{4n+1}, A_{4n+2}, A_{4n+3}, A_{4n+4})$. On a donc $A_5 = s_{A_2A_4}(A_1)$ puis $A_6 = s_{A_3A_5}(A_2)$, etc (voir figure 1).

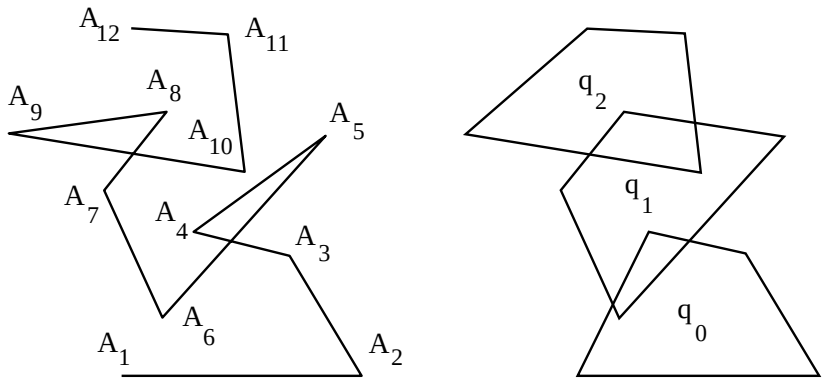


Figure 1: Le pliage cyclique du quadrilatère $q_0 = (0, 10, 7 + 5i, 3 + 6i)$.

Remarquons tout d'abord que la longueur des côtés $a_1 = A_1A_2$, $a_2 = A_2A_3$, $a_3 = A_3A_4$ et $a_4 = A_4A_1$ est préservée par le pliage et donc que la suite q_n de quadrilatères ne s'écrase pas sur un point... contrairement à ce que pourrait laisser croire la terminologie "itération de pliages". Cette suite q_n est particulièrement simple à étudier lorsque q_0 est *de type k-périodique*, c'est-à-dire lorsque $(\varphi_4 \circ \varphi_3)^k(q_0) = q_0$. Le quadrilatère q_k est alors l'image de q_0 par une isométrie de $\mathbb{R}^2$. Selon que cette isométrie a un point fixe ou non, la suite q_n reste bornée ou tend vers l'infini.

A la suite d'expérimentations numériques sur les quadrilatères *isocèles*, c'est-à-dire ceux tels que $a_1 = a_3$, K.Charter et T.Rogers ont remarqué que, *lorsqu'elle est bornée, la suite des sommets de q_n semble être dense sur une courbe présentant à la fois une régularité, une symétrie mais aussi une diversité et une esthétique tout à fait remarquables.* Ils conjecturent aussi un critère qui permet de *savoir, pour un quadrilatère isocèle q_0 de type non périodique, si la suite q_n est bornée. Ce critère est $a_2 + a_4 \leq p$ où p est le demi-périmètre du quadrilatère* (voir [4] p.222).

Le but de ce texte est de démontrer la validité des phénomènes empiriques décrits ci-dessus et de donner une réponse à cette conjecture (corollaires 1.4, 1.6 et 5.4). Nous verrons que cette conjecture est presque sûrement vraie au sens de Lebesgue, qu'elle est vraie lorsque les sommets de q_0 sont algébriques, mais qu'elle est génériquement fausse au sens de Baire ! Nous verrons aussi que ces énoncés se généralisent à tous les quadrilatères qu'ils soient isocèles ou non. Ce que l'on peut voir dans les figures 2 à 7 dans lesquelles q_A, q_B, q_E, q_F sont isocèles et q_C, q_D, q_G, q_H ne le sont pas.

Ces résultats ont été annoncés dans [1].

Table des matières

1 Introduction **1**
1.1 Pliage cyclique 1
1.2 Principaux résultats 3

1.3 Plan . . . 10
1.3.1 La dynamique sur $\ddot{Q}$ . . . 10
1.3.2 La dynamique sur $\dot{Q}$ . . . 10
1.3.3 La dynamique sur Q . . . 11

2 Le théorème de Poncelet **11**
2.1 La transformation de Poncelet . . . 11
2.2 La 1-forme invariante. . . . 13
2.3 La courbe elliptique complexe . . . 14
2.4 Les fonctions elliptiques . . . 16
2.4.1 La courbe $E_{\mathbb{C}}$ . . . 16
2.4.2 Les fonctions elliptiques de Jacobi . . . 17
2.4.3 La paramétrisation de Jacobi de $E_{\mathbb{R}}$ . . . 18
2.5 Les relations biquadratiques . . . 20

3 La dynamique sur $\ddot{Q}$ **20**
3.1 Complexification de $\ddot{Q}$ . . . 21
3.2 Pliage cyclique et transformation de Poncelet . . . 22
3.3 La fonction $\dot{\varphi}$-invariante . . . 23
3.4 Période stricte et semipériode . . . 26

4 La dynamique sur $\dot{Q}$ **27**
4.1 Quadrilatères de type C . . . 27
4.2 Quadrilatères de type non périodique . . . 29
4.3 Quadrilatères de type NC et non périodique . . . 31
4.4 Quadrilatères de type C et non périodique . . . 31
4.5 Quadrilatères de type périodique . . . 34

5 La dynamique sur Q **38**
5.1 Le système dynamique fibré . . . 39
5.2 L'équation homologique . . . 39
5.3 Les orbites bornées . . . 42
5.4 Les symétries des figures . . . 43

1.2 Principaux résultats

Décrivons maintenant de manière plus précise les principaux résultats que nous montrerons. Notons toujours q_0 un quadrilatère dont les côtés ont pour longueur $a_1, \ldots, a_4$. Nous supposerons que $(a_1, a_2) \neq (a_4, a_3)$ et que $(a_1, a_4) \neq (a_2, a_3)$ de sorte que la suite q_n des quadrilatères obtenue par pliage cyclique est bien définie.

La proposition suivante affirme l'existence d'une dérive pour le pliage cyclique.

Proposition 1.1 *Soit q_n la suite des quadrilatères obtenue par pliage cyclique à partir d'un quadrilatère q_0. Alors, la limite $v(q_0) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} q_n$ existe.*

Par construction, la dérive $v(q_0)$ est un quadrilatère dont les quatre sommets sont confondus, et s'identifie donc à un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Voici un critère d'annulation de cette

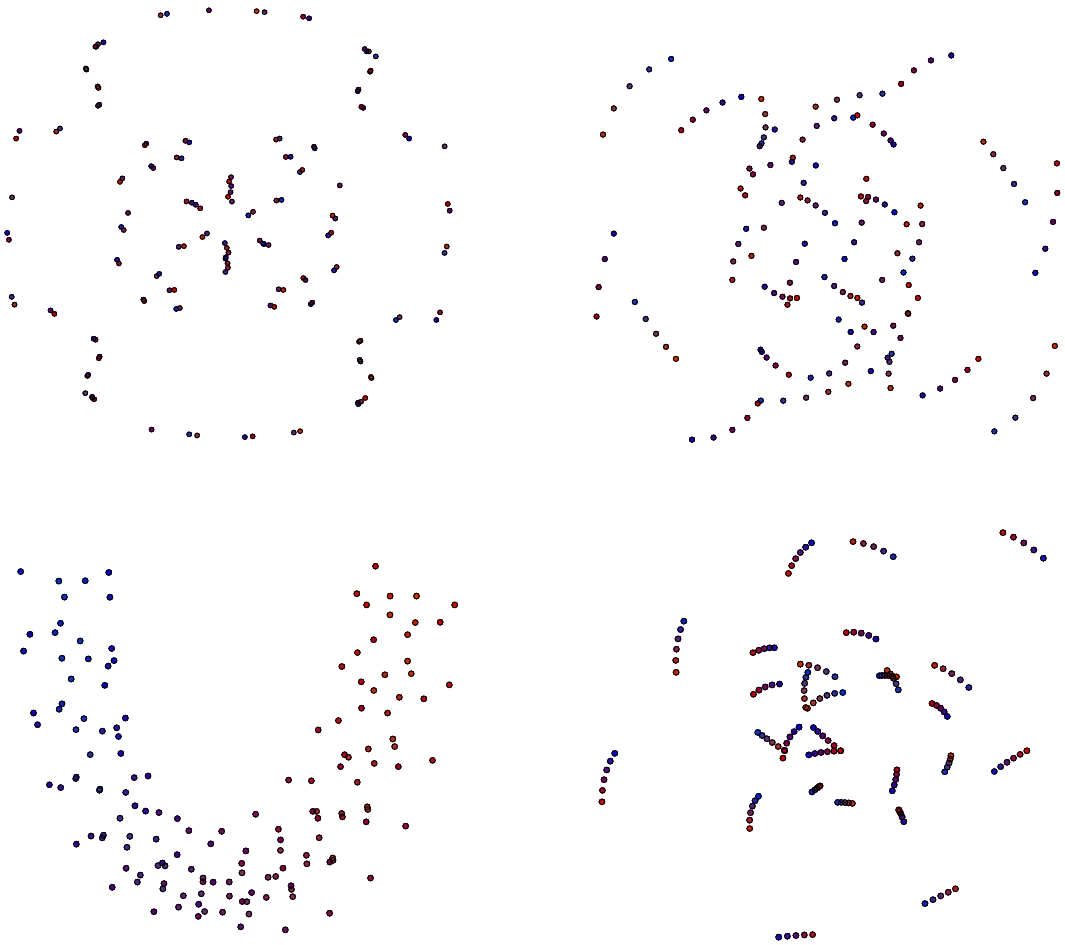


Figure 2: La suite $(A_n)_{n\leq 150}$ pour des quadrilatères de type NC:
$q_A = (10, 3+4i, 7+4i, 0)$, $q_B = (10, 4+2i, 6+2i, 0)$,
$q_C = (0, 30, 8+3i, 17+3i)$ et $q_D = (0, 10, 3+4i, -3)$.
La suite $(A_n)_{n\geq 0}$ est bornée.

dérive. On note M le plus grand côté, m le plus petit côté et p le demi-périmètre de q_0, soit :

$$M := \max_{1\leq j\leq 4} a_j \quad , \quad m := \min_{1\leq j\leq 4} a_j \quad \text{et} \quad p := \tfrac{1}{2} \sum_{1\leq j\leq 4} a_j \, . \tag{1}$$

Théorème 1.2 *On suppose q_0 de type non périodique. Alors on a l'équivalence :*

$$v(q_0) = 0 \Longleftrightarrow M + m \leq p \, .$$

Définition 1.3 *Un quadrilatère q_0 est de type* NC *si $M + m \leq p$ et de type* C *sinon.*

Remarques - Pour un quadrilatère de type périodique, la nullité de $v(q_0)$ équivaut au fait que la suite q_n est bornée.

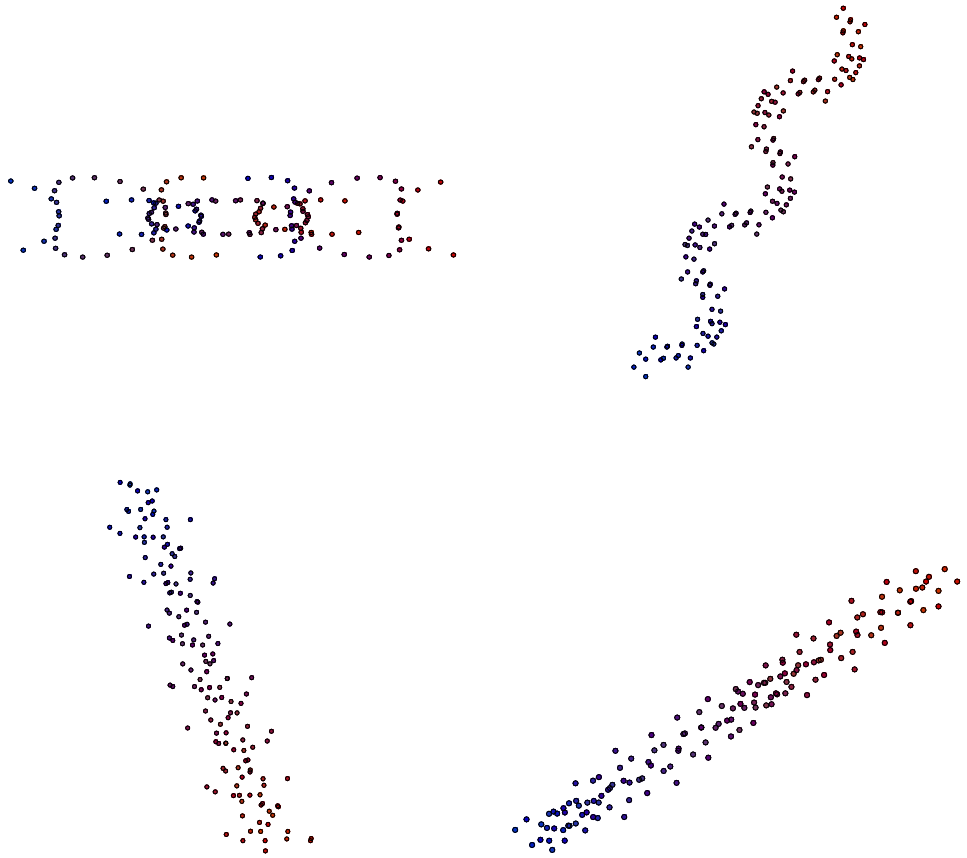


Figure 3: La suite $(A_n)_{n\leq 150}$ pour des quadrilatères de type C:
$q_E = (10, 6+i, 4+i, 0)$, $q_F = (10i, 3+4i, -3+6i, 0)$,
$q_G = (0, 10, 5+2i, -1+2i)$ et $q_H = (0, 10, 6+4i, 4-3i)$.
La suite $(A_n)_{n\geq 0}$ dérive à vitesse constante $v(q_0)$ vers l'infini.

- Pour un quadrilatère isocèle, la condition $M + m \leq p$ équivaut au critère de Charter et Rogers $a_2 + a_4 \leq p$.
- Géométriquement, cette condition "q_0 de type C" signifie que l'on peut déformer continûment le quadrilatère q_0 en une image miroir $\sigma(q_0)$ sans changer la longueur des côtés et sans passer par un quadrilatère plat (lemme 4.1).
- Tous les quadrilatères de *période stricte* $2k$ sont de type NC et vérifient $v(q_0) = 0$; d'autre part, parmi les quadrilatères de type n-périodique et de type C, *presque tous* vérifient $v(q_0) \neq 0$ (proposition 4.14).
- Malheureusement, il existe des quadrilatères de type $(4k+2)$-périodiques et de type NC tels que $v(q_0) \neq 0$ et il existe aussi des quadrilatères de type $4k$-périodique et de type C tels que $v(q_0) = 0$ (proposition 4.15). Ces quadrilatères peuvent être choisis isocèles.

On en déduira le :

Corollaire 1.4 *Soit q_0 un quadrilatère de type non périodique. La suite q_n obtenue par*

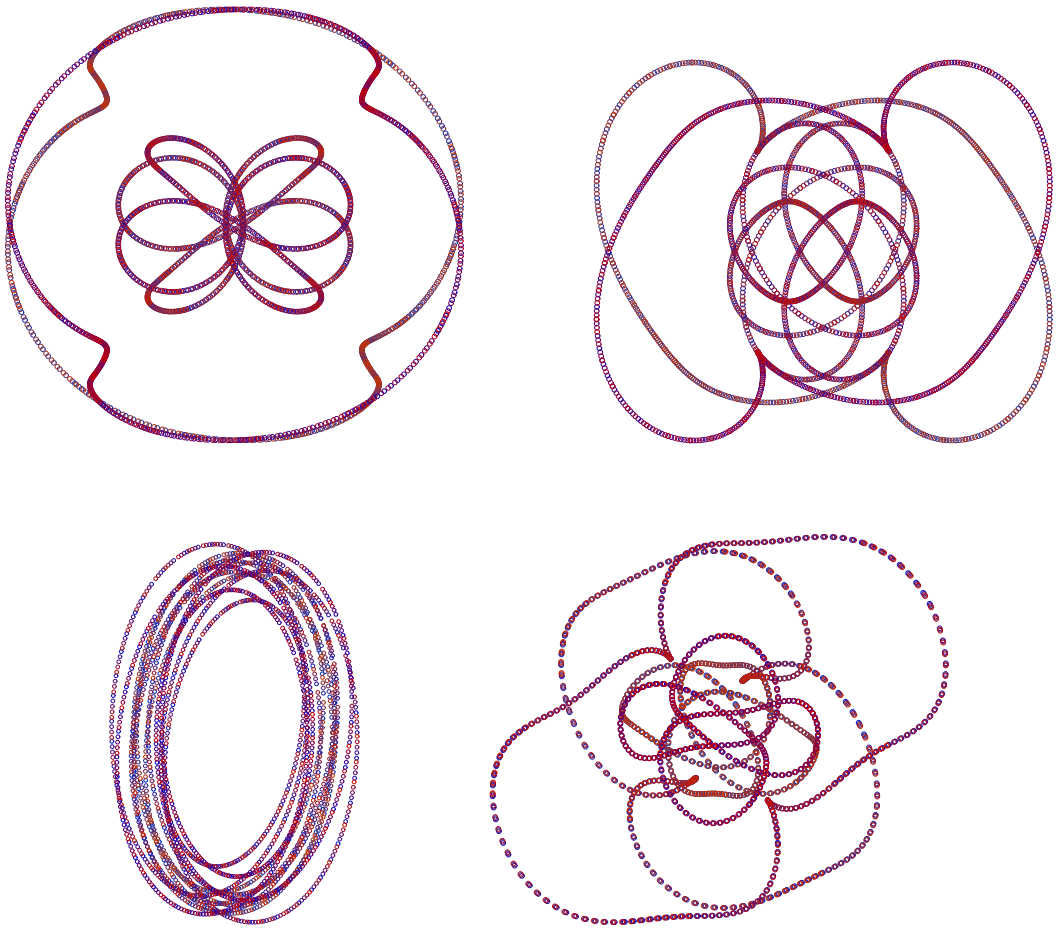


Figure 4: La suite $(A_n)_{n\leq 2500}$ pour des quadrilatères de type NC:
$q_A = (10, 3+4i, 7+4i, 0)$, $q_B = (10, 4+2i, 6+2i, 0)$,
$q_C = (0, 30, 8+3i, 17+3i)$ et $q_D = (0, 10, 3+4i, -3)$.
Chacun des 4 sommets de q_{4n} forme une suite qui est dense sur une courbe,
ces 4 courbes ayant un même centre de symétrie.

pliage cyclique tend vers l'infini si et seulement si q_0 est de type C.

La proposition suivante décrit le comportement du pliage cyclique par rapport à sa dérive.

Proposition 1.5 *a) Pour presque tout quadrilatère q_0, la suite de quadrilatères $q_n - n\,v(q_0)$ est dense sur une courbe analytique lisse bornée $\mathcal{C}$.*
b) Pour un ensemble générique de quadrilatères q_0, la suite de quadrilatères $q_n - n\,v(q_0)$ n'est pas bornée.
c) Si la suite de quadrilatères $q_n - n\,v(q_0)$ est bornée, elle est soit convergente, soit périodique, soit dense sur une courbe $\mathcal{C}$ de classe C^0.

Remarques - Même lorsque $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^4$ est analytique lisse, ses quatre projections dans $\mathbb{C}$ ne sont pas toujours lisses.

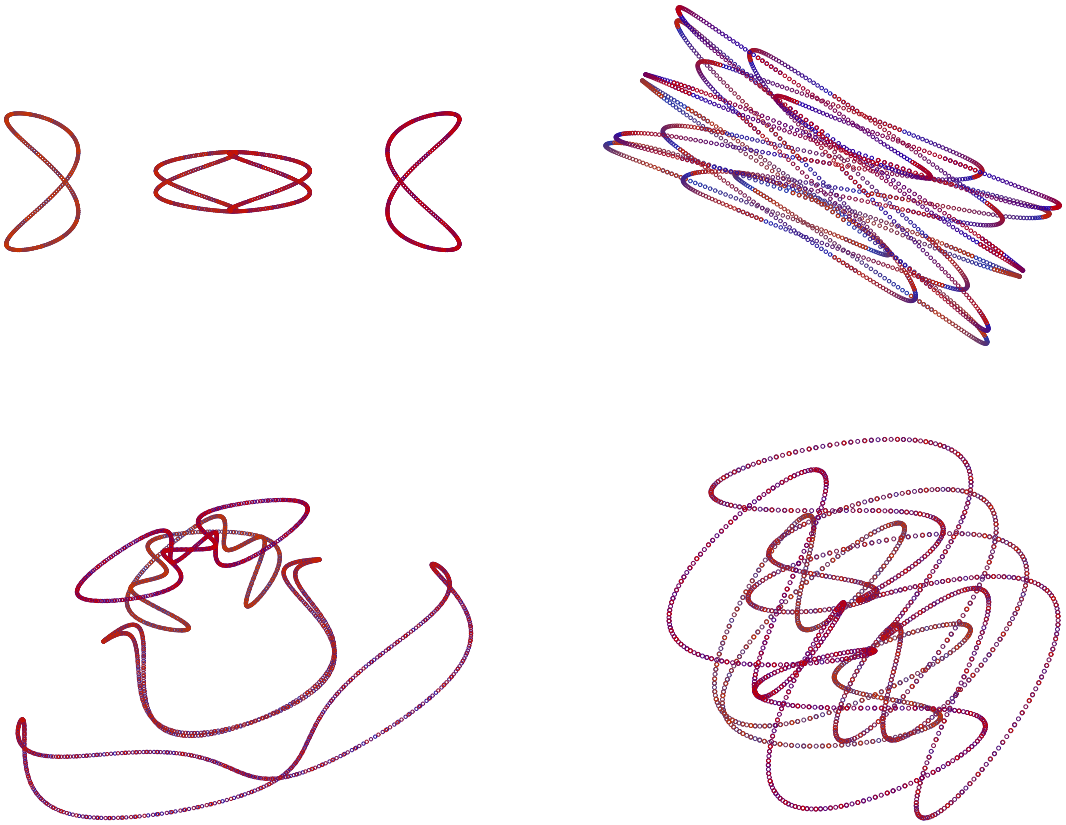


Figure 5: La suite $(A_n - \frac{n}{4}\, v(q_0))_{n\leq 2500}$ pour des quadrilatères de type C:
$q_E = (10, 6+i, 4+i, 0)$, $q_F = (10i, 3+4i, -3+6i, 0)$,
$q_G = (0, 10, 5+2i, -1+2i)$ et $q_H = (0, 10, 6+4i, 4-3i)$.
Chacun des 4 sommets de $q_n - n\, v(q_0)$ forme une suite qui est dense sur une courbe,
ces 4 courbes ayant un même axe de symétrie parallèle à la dérive $v(q_0)$.

- On sera dans le cas a) ou dans le cas b) selon les propriétés diophantiennes du nombre de rotation ρ ci-dessous.
- Lorsque les sommets de q_0 sont algébriques sur $\mathbb{Q}$ et que q_0 n'est pas de type périodique (c'est le cas des huit quadrilatères $q_A, \ldots, q_H$ des figures 2 à 7), on est dans le cas a) (corollaire 5.5).
- La même démonstration donnera un analogue de la proposition 1.5 pour les quadrilatères isocèles (corollaire 5.4).
- Nous verrons que la courbe $\mathcal{C}$ admet un centre de symétrie lorsque q_0 est de type NC, un axe de symétrie parallèle à $v(q_0)$ lorsque q_0 est de type C. Elle admet une symétrie supplémentaire lorsque q_0 est isocèle (voir figures 4 à 7 et lemmes 5.10 et 5.12).
- La condition *presque tout* signifie que l'assertion est vraie en dehors d'un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.
- *Ensemble générique* signifie ensemble dont le complémentaire est inclus dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide. Un tel ensemble est dense.
- *Courbe* C^0 signifie sous-variété de dimension 1 et de classe C^0.

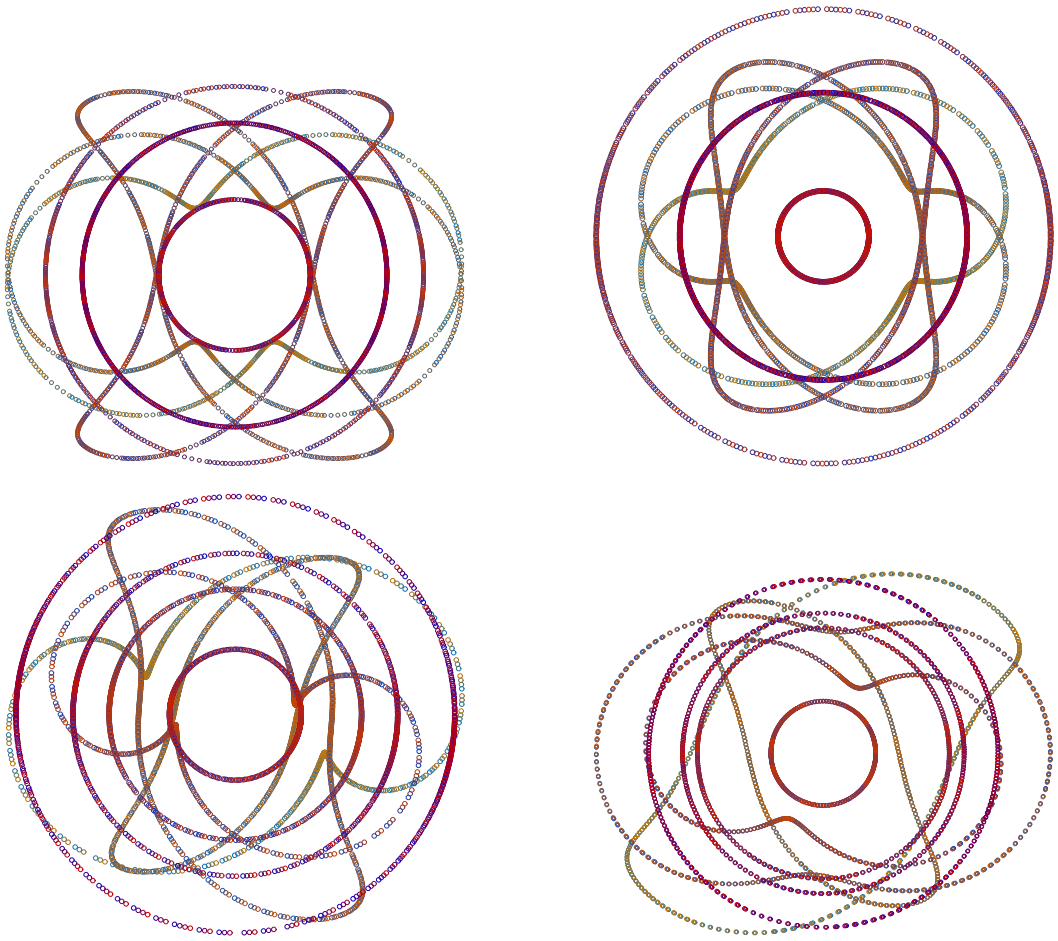


Figure 6: Les suites $(A_{n+1}-A_n)$ et $(A_{n+2}-A_n)_{n\leq 2000}$ pour des quadrilatères de type NC:
$q_A=(10,3+4i,7+4i,0)$, $q_B=(10,4+2i,6+2i,0)$,
$q_C=(0,30,8+3i,17+3i)$ et $q_D=(0,10,3+4i,-3)$.
Les premières décrivent des cercles,
les deuxièmes des courbes algébriques ayant un centre de symétrie.

- Nous verrons que la courbe $\mathcal{C}$ de la proposition 1.5 , c'est-à-dire la courbe $\mathcal{C}$ des figures 4 et 5, n'est pas toujours de classe C^1 (lemme 5.9). Cela contraste avec le fait que les courbes des figures 6 et 7 sont des courbes algébriques (lemme 3.3).

L'énoncé suivant complète le corollaire 1.4 pour les quadrilatères de type NC.

Corollaire 1.6 *a) Pour presque tout quadrilatère q_0 de type* NC*, la suite q_n est dense sur une courbe analytique bornée $\mathcal{C}$.*
b) Pour un ensemble générique de quadrilatères q_0 de type NC*, la suite q_n n'est pas bornée.*
c) Si la suite q_n est bornée, elle est soit convergente, soit périodique, soit dense sur une courbe $\mathcal{C}$ de classe C^0.

Remarques - Pour les quadrilatères de type non périodique, le fait que la suite q_n soit

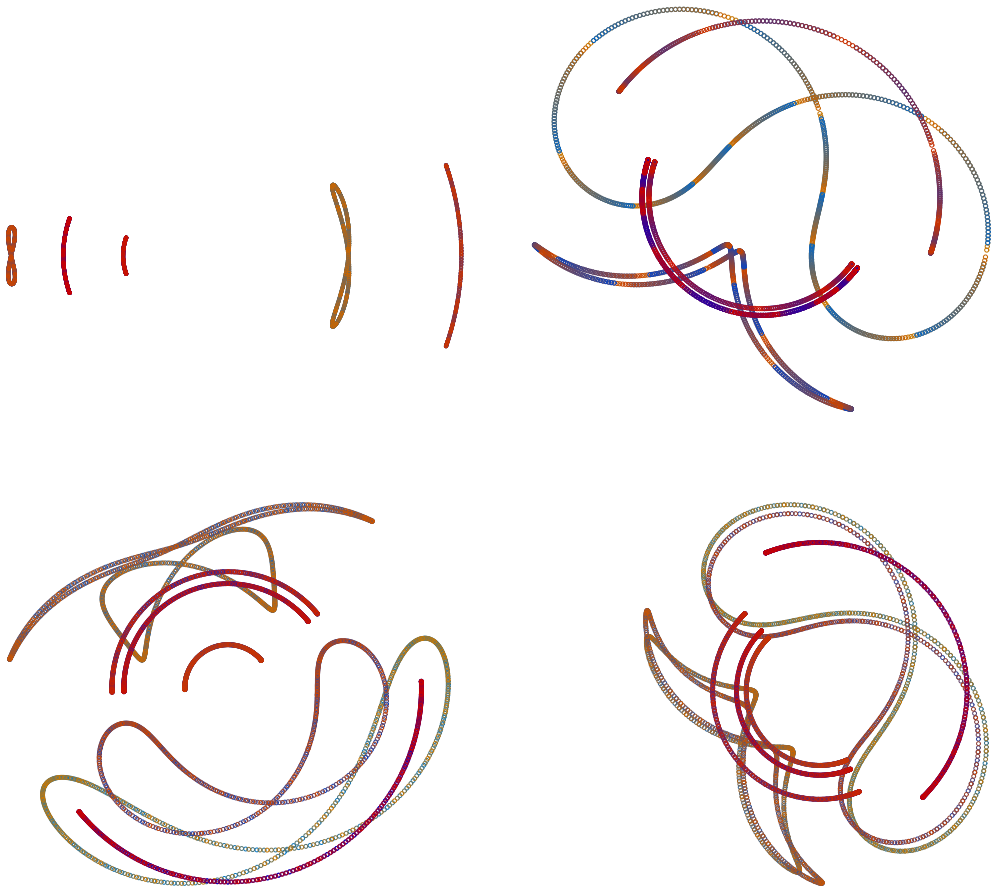


Figure 7: Les suites $(A_{n+1}-A_n)$ et $(A_{n+2}-A_n)_{n\leq 2000}$ pour des quadrilatères de type C:
$q_E = (10, 6+i, 4+i, 0)$, $q_F = (10i, 3+4i, -3+6i, 0)$,
$q_G = (0, 10, 5+2i, -1+2i)$ et $q_H = (0, 10, 6+4i, 4-3i)$.
Les premières décrivent des arcs de demicercles, les deuxièmes des courbes algébriques.
L'axe de symétrie est donné par la dérive.

bornée ne dépend que des côtés $a_1, \ldots, a_4$ (lemme 5.8).
- Malheureusement, une telle assertion n'est pas toujours vraie pour les quadrilatères de type périodique (corollaire 4.16).
- Lorsque la suite q_n converge, le quadrilatère limite est plat.

Signalons pour finir, les travaux antérieurs sur ce sujet.

Dans l'article [4], K.Charter et T.Rogers montrent que, pour q_0 isocèle, le couple (x_n, y_n) formé des carrés des longueurs des diagonales de q_n décrit une courbe cubique de $\mathbb{R}^2$ et que sur cette courbe elliptique réelle, la transformation $\sigma : (x_0, y_0) \to (x_2, y_2)$ est une translation. Ils en déduisent que la k-périodicité de q_0 ne dépend que des côtés $a_1, \ldots, a_4$.

Dans [8], J.Esch et T.Rogers précisent cette analyse en calculant le nombre de rotation ρ_{q_0} de σ. C'est une fonction analytique dont ils décrivent assez précisément le comportement.

1.3 Plan

Décrivons maintenant la structure de cet article.

On note $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ et $Q = Q_{\mathbf{a}}$ l'ensemble des quadrilatères de côtés $A_1A_2 = a_1$, $A_2A_3 = a_2$, $A_3A_4 = a_3$ et $A_4A_1 = a_4$. On note $\dot{Q} = \dot{Q}_{\mathbf{a}}$ le quotient de Q par le groupe des translations et $\ddot{Q} = \ddot{Q}_{\mathbf{a}}$ le quotient de Q par le groupe des isométries positives de $\mathbb{R}^2$. De façon concrète, on peut identifier $\dot{Q}$ à l'ensemble des quadrilatères de Q dont le premier sommet est $A_1 = (0, 0)$, et $\ddot{Q}$ à l'ensemble des quadrilatères de $\dot{Q}$ dont le deuxième sommet est $A_2 = (0, a_1)$.

Pour tout quadrilatère q dans Q, on note $\dot{q}$ et $\ddot{q}$ ses images dans $\dot{Q}$ et $\ddot{Q}$. Le quadrilatère $\dot{q}$ est l'image de q par une translation qui ramène le premier sommet de q sur $(0, 0)$ et $\ddot{q}$ est l'image de $\dot{q}$ par une rotation de centre $(0, 0)$ qui ramène le deuxième sommet de $\dot{q}$ sur $(a_1, 0)$. On note $\varphi_{j_1\cdots j_\ell} = \varphi_{j_1} \circ \cdots \circ \varphi_{j_\ell}$ de sorte que $\varphi := \varphi_{4321}$ et $q_n = \varphi^n(q_0)$. Pour toute transformation ψ de Q qui commute aux isométries de $\mathbb{R}^2$, par exemple $\psi = \varphi_{j_1\cdots j_\ell}$, on note $\dot{\psi}$ et $\ddot{\psi}$ les transformations de $\dot{Q}$ et $\ddot{Q}$ induites par ψ. On a donc

$$\dot{\psi}(\dot{q}) = \dot{\psi(q)} \quad \text{et} \quad \ddot{\psi}(\ddot{q}) = \ddot{\psi(q)} \,.$$

Pour étudier le système dynamique (Q, φ), nous allons tout d'abord étudier les systèmes dynamiques $(\ddot{Q}, \ddot{\varphi})$ et $(\dot{Q}, \dot{\varphi})$. En effet l'espace Q est de dimension 4 et non compact, tandis que les espaces $\ddot{Q}$ et $\dot{Q}$ sont compacts et de dimensions respectives 1 et 2. On supposera, pour simplifier cette introduction, que q_0 est *de type lisse*, c'est-à-dire qu'aucun quadrilatère de Q n'est *plat* ou, ce qui est équivalent, que l'on a toujours $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4 \neq 0$.

1.3.1 La dynamique sur $\ddot{Q}$

Comme dans [4], la courbe $\ddot{Q}$ est une courbe elliptique réelle et la transformation $\ddot{\varphi}_{21} = \ddot{\varphi}_{43}$ est une translation sur cette courbe elliptique. Il est remarquable que ce système dynamique $(\ddot{Q}, \ddot{\varphi}_{43})$ soit conjugué au système dynamique de Poncelet pour deux cercles dont les centres sont à distance $a := a_1a_3$, le cercle circonscrit ayant pour rayon $R := a_2a_4$ et le cercle inscrit ayant pour rayon $r := \frac{1}{2}|a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2|$ (lemme 3.2). Nous verrons qu'il existe sur $\dot{Q}$ une fonction analytique $\dot{\varphi}$-invariante h (lemme 3.3). Nous en déduirons que, lorsque q_0 n'est pas de type périodique, la suite $\dot{q}_n = \dot{\varphi}^n(\dot{q}_0)$ s'équirépartit sur une courbe $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$ de $\dot{Q}$ en suivant une loi statistique μ que nous déterminerons : cette courbe $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$ est une composante connexe d'un revêtement à deux feuillets de $\ddot{Q}$ et μ est *la* probabilité invariante sur $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$. C'est le point clef qui nous permettra de démontrer la proposition 1.1.

1.3.2 La dynamique sur $\dot{Q}$

Nous en déduirons la loi statistique μ_j des directions $\frac{1}{a_j}(A_{4n+j+1} - A_{4n+j})$, pour $j = 1, \ldots, 4$ (lemmes 4.9 et 4.10).

Lorsque q_0 est de type NC, le quadrilatère $-\dot{q}_0$ est dans $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$. La loi μ est alors symétrique par rapport à l'origine et toutes les lois μ_j coïncident (voir figure 6). Ceci prouvera que la dérive $v(q_0)$ est nulle (proposition 4.6).

Lorsque q_0 est de type C, notons j_0 le numéro du plus grand côté de q_0. Les directions $\frac{1}{a_j}(A_{4n+j+1} - A_{4n+j})$ sont alors toutes dans un même demi-espace et les probabilités μ_j coïncident, sauf pour $j = j_0$ où ces directions sont dans le demi-espace opposé et où la probabilité μ_{j_0} est la probabilité opposée (voir figure 7). A cause de l'inégalité triangulaire, la dérive due au plus grand côté n'arrivera pas à annuler la somme des dérives dues aux trois autres côtés. Ce qui prouvera que la dérive $v(q_0)$ est non nulle. Nous donnerons une formule pour $v(q_0)$ (proposition 4.12).

L'étude de la dynamique sur $\dot{Q}$ nous permettra donc de démontrer le théorème 1.2, et le corollaire 1.4.

1.3.3 La dynamique sur Q

Supposons pour simplifier q_0 de type NC et de type non périodique. Nous avons vu que l'action de $\dot{\varphi}$ sur la courbe $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$ est conjuguée à une rotation. On note $\rho_{\mathbf{a}}$ son nombre de rotation. Au dessus de cette courbe, le pliage cyclique φ est donc conjugué à un système dynamique $\varphi_{\mathbf{a}}$ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ donné par

$$\varphi_{\mathbf{a}}(x, v) = (x + \rho_{\mathbf{a}}, v + f_{\mathbf{a}}(x)) \ .$$

où la fonction $f_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est une fonction analytique explicite de moyenne nulle. Lorsque $\rho_{\mathbf{a}}$ a de bonnes propriétés diophantiennes, les orbites de $\varphi_{\mathbf{a}}$ sont denses sur des courbes analytiques réelles. Lorsque $\rho_{\mathbf{a}}$ n'a pas de bonnes propriétés diophantiennes, les orbites de $\varphi_{\mathbf{a}}$ ne sont pas bornées (proposition 5.3).

Ceci nous permettra donc de démontrer la proposition 1.5.

2 Le théorème de Poncelet

Nous rappelons dans cette partie le théorème de Poncelet (1820). Nous esquisserons quatre démonstrations de ce théorème. Ces démonstrations, bien connues, seront pour nous un simple prétexte, une sorte de fil directeur pour introduire, motiver et rendre plus naturels des notations et des lemmes qui seront utilisés constamment dans les autres parties. Nous renvoyons le lecteur à [3] pour une jolie analyse historique de ce théorème.

2.1 La transformation de Poncelet

Commençons par rappeler le théorème de Poncelet pour des cercles.

Soient a, R, r trois réels avec a et R non nuls. Identifions le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$ et posons $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$. Nous appellerons *courbe de Poncelet* la courbe

$$F_{\mathbb{R}} = F_{\mathbb{R}}^{a,R,r} = \{f = (t_1, t_2) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \ / \ a\,(t_1 + t_1^{-1}) + R\,(t_2 + t_2^{-1}) = 2r\}. \qquad (2)$$

Si on pose $t_1 = e^{i\beta_1}$ et $t_2 = e^{i\beta_2}$, cette équation s'écrit

$$a\cos\beta_1 + R\cos\beta_2 = r\ .$$

Voici l'interprétation géométrique de cette courbe, lorsque r est aussi non nul. Notons $C_{\mathbb{R}}$, $D_{\mathbb{R}}$ les cercles $C_{\mathbb{R}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 = R^2\}$, $D_{\mathbb{R}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x+a)^2 + y^2 = r^2\}$ et $D_{\mathbb{R}}^\star$ l'ensemble des droites tangentes à $D_{\mathbb{R}}$. La courbe $F_{\mathbb{R}}$ s'identifie naturellement à l'ensemble des *configurations de Poncelet* associées à $C_{\mathbb{R}}$ et $D_{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire

$$F_{\mathbb{R}} \simeq \{(m_1, \xi_1) \in C_{\mathbb{R}} \times D_{\mathbb{R}}^\star \ / \ m_1 \in \xi_1\}\ .$$

Dans cette identification, on a $m_1 = Rt_1t_2$ et la droite ξ_1 est tangente à $D_{\mathbb{R}}$ au point $p_1 := -a + rt_1$ (voir figure 8).

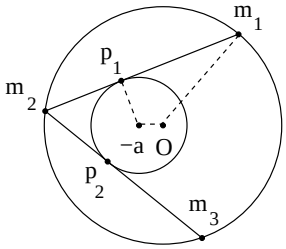


Figure 8: La transformation de Poncelet.

On appelle *transformation de Poncelet* la transformation $\varphi_F : F_{\mathbb{R}} \to F_{\mathbb{R}}$ donnée par $\varphi_F(m_1, \xi_1) = (m_2, \xi_2)$ où $m_2 = R\,t_1/t_2$ est le deuxième point d'intersection de la droite ξ_1 avec le cercle $C_{\mathbb{R}}$ et ξ_2 est la deuxième tangente au cercle $D_{\mathbb{R}}$ issue du point m_2.

On note $\sigma_F : F_{\mathbb{R}} \to F_{\mathbb{R}} : (t_1, t_2) \mapsto (t_1^{-1}, t_2^{-1})$ la symétrie par rapport à l'axe des centres. On a bien sûr $\sigma_F \circ \varphi_F = \varphi_F \circ \sigma_F$.

Remarques - Lorsque $r = 0$, on définit encore la courbe $F_{\mathbb{R}}$ à l'aide de la formule (2) et on pose $\varphi_F(t_1, t_2) = (-t_1, -t_2^{-1})$. L'étude des sections 2.1 à 2.4 sera encore valable dans ce cas, si on suppose $a \neq \pm R$. Cela présente peu d'intérêt : en effet, ce cas est très simple car on a $\varphi_F^2 = Id$.

- Cette interprétation géométrique ne dépend que de $|a|$, $|R|$ et $|r|$. On peut donc supposer que a, R et r sont positifs.

- La bijection $F_{\mathbb{R}}^{a,R,r} \to F_{\mathbb{R}}^{R,a,r} : (t_1, t_2) \mapsto (t_2, t_1)$ échange φ_F et $\sigma_F \circ \varphi_F$.

Théorème 2.1 (Poncelet, 1820) *Avec ces notations. On suppose que les deux cercles $C_{\mathbb{R}}$ et $D_{\mathbb{R}}$ ne sont pas tangents. Soit $n \geq 1$.*
a) Si φ_F^n a un point fixe f alors on a $\varphi_F^n = 1$. On dit alors que f est n-périodique.
b) Si $\sigma_F \circ \varphi_F^n$ a un point fixe, alors on a $\varphi_F^n = \sigma_F$. On dit alors que f est n-semipériodique.

Lorsque f est périodique, on appelle *période* de f le plus petit entier n tel que f est n-périodique; on dit que n est une *période stricte* de f si n est impair ou si n est pair et f n'est pas $\frac{n}{2}$-semipériodique.

Lorsque f est semipériodique, on appelle *semipériode* de f le plus petit entier n tel que f est n-semipériodique.

Exemples - Les configurations de période 2 sont données par $r = 0$.
- Les configurations de semipériode 2 sont données par $R = \pm a$.
- Les configurations de période 3 sont données par $R^2 - a^2 = \pm 2rR$ (formule d'Euler).
- Les configurations de semipériode 3 sont données par $R^2 - a^2 = \pm 2ra$...

Remarques - Bien sûr le théorème de Poncelet est valable dans un cadre plus général : pour tout couple de coniques non dégénérées sur un corps de base de caractéristique différente de 2 (voir [3]).
- Lorsque les deux cercles $C_{\mathbb{R}}$ et $D_{\mathbb{R}}$ sont tangents en un point m_∞ avec tangente commune ξ_∞, la configuration $f_\infty := (m_\infty, \xi_\infty)$ est le seul point fixe de φ_F^n et de $\sigma_F \circ \varphi_F^n$.
- Les polynômes $P_n(a, R, r)$ dont l'annulation exprime la n-périodicité ont été calculés par Cayley (voir [11]). On peut calculer de la même façon les polynômes $Q_n(a, R, r)$ dont l'annulation exprime la n-semipériodicité.

Les quatre démonstrations du théorème de Poncelet que nous allons esquisser dans les sections suivantes ne sont que des déguisements différents du même concept : celui de translation sur une courbe elliptique. Elles sont présentées dans l'ordre inverse de l'ordre chronologique de leur découverte.

2.2 La 1-forme invariante.

La première démonstration adopte un point de vue géométrie différentielle.

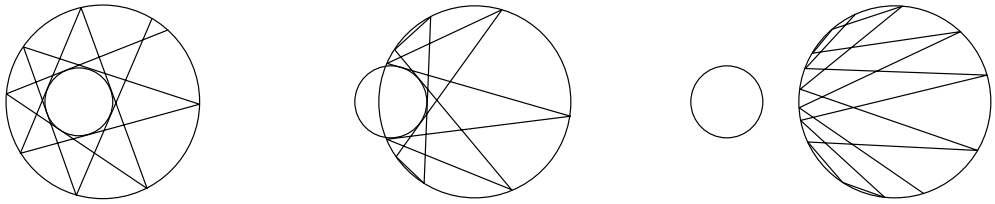
La courbe $F_{\mathbb{R}}$ est compacte, avec au plus un point singulier, le point f_∞. Le lemme élémentaire suivant décrit la topologie de $F_{\mathbb{R}}$. Sa démonstration est laissée au lecteur.

Lemme 2.2 *On suppose $a, R, r > 0$ et $r < a + R$.*
- Si $R - r < a < R + r$, $F_{\mathbb{R}}$ est homéomorphe à un cercle.
- Si $a = R - r$ ou $a = R + r$, $F_{\mathbb{R}}$ est homéomorphe à un huit.
- Si $a < R - r$ ou $a > R + r$, $F_{\mathbb{R}}$ est homéomorphe à deux cercles.

Définition 2.3 *Nous dirons que $F_{\mathbb{R}}$ (ou qu'une configuration $f \in F_{\mathbb{R}}$) est de type* C *si $R - r < a < R + r$ et de type* NC *sinon. On parlera de type* NCI *si $a \leq R - r$ et de type* NCII *si $a \geq R + r$ (voir figure 9).*

On note $F'_{\mathbb{R}}$ la partie lisse de la courbe $F_{\mathbb{R}}$. Autrement dit, on a $F'_{\mathbb{R}} = F_{\mathbb{R}}$ si $a \pm R \pm r \neq 0$ et $F'_{\mathbb{R}} = F_{\mathbb{R}} - \{f_\infty\}$ sinon.

Notons ds la 1-forme sur $F'_{\mathbb{R}}$, $ds = \varepsilon \frac{d\beta_1 + d\beta_2}{|p_1 - m_1|}$ où $\varepsilon = \pm 1$ est le signe de la partie imaginaire de $\frac{p_1 + a}{m_1 + a}$. La métrique $|ds|$ définie par cette 1-forme a une signification géométrique très



type NCI type C type NCII

Figure 9: Trois configurations de Poncelet

simple : on a $|ds| = \frac{1}{R}\frac{|dm_1|}{|p_1-m_1|}$. Si on choisit comme paramètre local l'angle $\theta = (\beta_1+\beta_2)/2$, cette 1-forme est donnée par la formule

$$ds = \frac{\pm\, C\, d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \tag{3}$$

où C est une constante et

$$k^2 := \frac{4aR}{(a+R)^2-r^2}\ . \tag{4}$$

Lemme 2.4 *On suppose $a, R, r > 0$ et $r < a + R$.*
a) Lorsque $F_{\mathbb{R}}$ est de type NC*, les composantes connexes de $F'_{\mathbb{R}}$ sont échangées par σ_F.*
b) Lorsque $F_{\mathbb{R}}$ est de type NCI*, elles sont aussi échangées par φ_F.*
c)Lorsque $F_{\mathbb{R}}$ est de type NCII*, elles sont préservées par φ_F.*
d) La 1-forme ds est invariante par σ_F et par φ_F.

Démonstration a), b) et c) Les vérifications sont laissées au lecteur.

d) Pour montrer l'invariance de ds par φ_F on remarquera que l'on a, avec les notations de la figure 8,

$$R\,|ds| = \frac{|dm_1|}{|p_1-m_1|} = \frac{|dm_2|}{|p_1-m_2|} = \frac{|dm_2|}{|p_2-m_2|}.\square$$

Première démonstration du théorème de Poncelet Par le lemme 2.4, les transformations $\Phi := \varphi_F^n$ et $\Phi := \sigma_F \circ \varphi_F^n$ préservent la 1-forme ds. Si Φ a un point fixe, Φ est l'identité sur la composante connexe de $F'_{\mathbb{R}}$ contenant ce point. Comme Φ commute à σ_F, Φ est aussi l'identité sur l'éventuelle deuxième composante connexe. $\square$

2.3 La courbe elliptique complexe

La deuxième démonstration due à Griffiths et Harris dans ([11]) adopte un point de vue géométrie algébrique complexe. On commence par complexifier $F_{\mathbb{R}}$.

En coordonnées, $F_{\mathbb{C}}$ est la courbe biquadratique de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ dont l'équation est obtenue par homogénéisation de l'équation (2). Nous écrirons abusivement

$$F_{\mathbb{C}} = F_{\mathbb{C}}^{a,R,r} = \{f = (t_1, t_2) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \ / \ a\,(t_1 + t_1^{-1}) + R\,(t_2 + t_2^{-1}) = 2r\}. \tag{5}$$

Cette courbe $F_{\mathbb{C}}$ admet aussi une interprétation géométrique. On introduit les coniques du plan projectif complexe $C_{\mathbb{C}} = \{[x, y, w] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \ / \ x^2 + y^2 = R^2 w^2\}$, $D_{\mathbb{C}} = \{[x, y, w] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \ / \ (x + aw)^2 + y^2 = r^2 w^2\}$ et $D^\star_{\mathbb{C}}$ ensemble des droites tangentes à $D_{\mathbb{C}}$. La courbe $F_{\mathbb{C}}$ s'identifie encore à l'ensemble des *configurations de Poncelet* associées à $C_{\mathbb{C}}$ et $D_{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire

$$F_{\mathbb{C}} \simeq \{(m_1, \xi_1) \in C_{\mathbb{C}} \times D^\star_{\mathbb{C}} \ / \ m_1 \in \xi_1\}\ .$$

On prolonge φ_F et σ_F en des automorphismes de $F_{\mathbb{C}}$ encore notés φ_F et σ_F. On note $F'_{\mathbb{C}}$ la partie lisse de $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$.

Lemme 2.5 *Avec ces notations.*
a) Si $a \pm R \pm r \neq 0$, alors la courbe $F_{\mathbb{C}}$ est une courbe elliptique[1].
b) Sinon, la courbe $F_{\mathbb{C}}$ est une droite projective avec un point double ordinaire.

Démonstration a) La condition $a \pm R \pm r \neq 0$ signifie aussi que les coniques $C_{\mathbb{C}}$ et $D_{\mathbb{C}}$ sont transverses. La courbe $F_{\mathbb{C}}$ est donc lisse et est un revêtement à deux feuillets de $C_{\mathbb{C}}$, ramifié aux quatre points de l'intersection $C_{\mathbb{C}} \cap D_{\mathbb{C}}$. Elle est donc de genre 1.

b) Supposons par exemple $a + r = R$. Le point singulier de $F_{\mathbb{C}}$ est le point donné par $t_1 = -1$ et $t_2 = 1$. On peut alors poser $\tau := (t_2 - 1)/(t_1 + 1)$ et remarquer que $at_2/Rt_1 = -\tau^2$, ce qui permet d'exprimer (t_1, t_2) comme une fonction rationnelle de τ. Le point double correspond aux valeurs $\tau = \pm\sqrt{a/R}$ de ce paramètre. □

Une courbe elliptique X admet à scalaire près une unique 1-forme ω.

De même, lorsque X est une droite projective avec un point double, sa partie lisse X' admet une unique 1-forme ω qui s'écrit $\frac{dz}{z}$ après identification de X' avec $\mathbb{C}^\star$.

Dans ces deux cas, on appelle *translation* de X un automorphisme φ qui préserve ω et *involution* de X un automorphisme φ de X tel que $\varphi^\star(\omega) = -\omega$.

Exemple *Soit $f : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ un morphisme de degré 2. On note alors ψ_f l'automorphisme de X différent de l'identité tel que $f \circ \psi_f = f$. Alors ψ_f est une involution.*

Démonstration En effet, lorsque X est une courbe elliptique, $\omega + \psi_f^\star(\omega)$ provient d'une 1-forme sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ et est donc nul; lorsque X est une droite projective avec un point double, on remarque que les seuls automorphismes d'ordre 2 de $\mathbb{C}^\star$ sont de la forme $z \to \frac{\lambda}{z}$. □

Lemme 2.6 *Les transformation φ_F et σ_F ci-dessus sont des translations de $F_{\mathbb{C}}$.*

[1] Dans cet article, une *courbe elliptique* est une courbe projective lisse de genre 1.

Démonstration Introduisons les trois fonctions de degré 2 sur $F_{\mathbb{C}}$, $f_1 : (t_1, t_2) \to t_1$, $f_2 : (t_1, t_2) \to t_2$ et $f_3 : (t_1, t_2) \to t_1 t_2$ Les transformations φ_F et σ_F sont composées de deux involutions : $\varphi_F = \psi_{f_3} \circ \psi_{f_1}$ et $\sigma_F = \psi_{f_2} \circ \psi_{f_1}$. □

Remarque Bien sûr la 1-forme ω sur $F_{\mathbb{C}}$ n'est autre que la complexifiée de la 1-forme ds de la section 2.2.

Deuxième démonstration du théorème de Poncelet D'après le lemme 2.6, les transformations φ_F^n et $\sigma_F \circ \varphi_F^n$ sont des translations de $F_{\mathbb{C}}$. La seule translation ayant un point fixe est l'identité. □

2.4 Les fonctions elliptiques

La troisième démonstration, due à Jacobi, utilise les fonctions elliptiques pour paramétrer $F_{\mathbb{R}}$. La tranformation de Poncelet se lit alors comme une translation sur le paramètre[2].

2.4.1 La courbe $E_{\mathbb{C}}$

Nous allons tout d'abord introduire un revêtement à 2 feuillets $E_{\mathbb{C}}$ de $F_{\mathbb{C}}$.

En coordonnées s_1, s_2, la courbe $E_{\mathbb{C}}$ est la courbe biquadratique de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ dont l'équation est (donnée par la bihomogénéisation de)

$$a\,(s_1^2 s_2^2 + 1) + R\,(s_1^2 + s_2^2) = 2 r s_1 s_2. \tag{6}$$

Le revêtement $p_E : E_{\mathbb{C}} \to F_{\mathbb{C}}$ est donné par $p_E(s_1, s_2) = (s_1 s_2, s_1/s_2)$. Autrement dit, on a $m_1 = R s_1^2$ et $m_2 = R s_2^2$. Pour $e = (s_1, s_2) \in E_{\mathbb{C}}$, on note $-e := (-s_1, -s_2)$ de sorte que $p_E(e) = p_E(-e)$.

Cette courbe $E_{\mathbb{C}}$ est invariante par les involutions $\psi_{g_1} : (s_1, s_2) \to (s_2, s_1)$, $\psi_{g_2} : (s_1, s_2) \to (s_2^{-1}, s_1^{-1})$ et $\psi_{g_3} : (s_1, s_2) \to (s_1, \frac{R s_1^2 + a}{(a s_1^2 + R) s_2})$ associées aux fonctions de degré 2, respectivement, $g_1 : (s_1, s_2) \to s_1 s_2$, $g_2 : (s_1, s_2) \to s_1/s_2$ et $g_3 : (s_1, s_2) \to s_1$.

La transformation $\sigma_E := \psi_{g_2} \circ \psi_{g_1} : (s_1, s_2) \to (s_1^{-1}, s_2^{-1})$ relève la transformation σ_F. De même la transformation $\varphi_E = \psi_{g_3} \circ \psi_{g_1}$ relève la transformation φ_F. Autrement dit, on a $p_E \circ \varphi_E = \varphi_F \circ p_E$ et $p_E \circ \sigma_E = \sigma_F \circ p_E$.

Lorsque $a \pm R \pm r \neq 0$, la courbe $E_{\mathbb{C}}$ est une courbe elliptique et la transformation φ_E est une translation sur $E_{\mathbb{C}}$. Sinon, la courbe $E_{\mathbb{C}}$ est formée de deux copies de la droite projective avec un point double.

Remarque Les définitions de $E_{\mathbb{C}}$ et de φ_E s'étendent au cas où $r = 0$, à l'aide des formules (6) et $\varphi_E(s_1, s_2) = (s_2, -s_1)$. On a alors $\varphi_E^2 = -Id$.

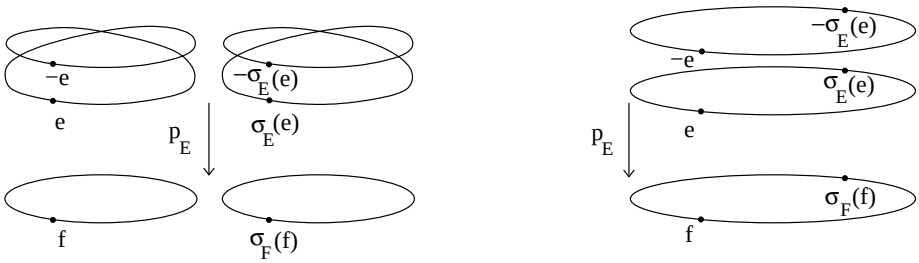
[2] Ce paramètre est, bien sûr, une primitive de la 1-forme ds de la section 2.2.

On note $E_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des points réels de $E_{\mathbb{C}}$ pour la conjugaison donnée par $\overline{s}_1 = s_1^{-1}$ et $\overline{s}_2 = s_2^{-1}$, c'est-à-dire

$$E_{\mathbb{R}} = E_{\mathbb{R}}^{a,R,r} = \{e = (s_1, s_2) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \ / \ a\,(s_1^2 s_2^2 + 1) + R\,(s_1^2 + s_2^2) = 2r s_1 s_2\}. \qquad (7)$$

La démonstration du lemme suivant et de son corollaire est laissée au lecteur que nous renvoyons à la figure 9.

Lemme 2.7 *Soient $a, R, r > 0$ avec $a \pm R \pm r \neq 0$. La courbe $E_{\mathbb{R}}$ est homéomorphe à deux cercles. La figure 10 décrit la topologie du revêtement à deux feuillets $p_E : E_{\mathbb{R}} \to F_{\mathbb{R}}$.*



type NC type C

Figure 10: Le revêtement $p_E : E_{\mathbb{R}} \longrightarrow F_{\mathbb{R}}$

Corollaire 2.8 *Soient $a, R, r > 0$ avec $a \pm R \pm r \neq 0$, $f \in F_{\mathbb{R}}$ et $e \in E_{\mathbb{R}}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*
(i) La configuration de Poncelet f est de type C.
(ii) La courbe $F_{\mathbb{R}}$ est connexe.
(iii) Les points f et $\sigma_F(f)$ sont dans la même composante connexe de $F_{\mathbb{R}}$.
(iv) Les points e et $\sigma_E(e)$ sont dans la même composante connexe de $E_{\mathbb{R}}$.
(v) Les points e et $-e$ ne sont pas dans la même composante connexe de $E_{\mathbb{R}}$.

2.4.2 Les fonctions elliptiques de Jacobi

Pour décrire la paramétrisation de $E_{\mathbb{R}}$ nous aurons besoin d'un très court rappel sur les fonctions elliptiques (voir [7] ou [13] pour plus de détails).

Cette section et la suivante peuvent être sautées en première lecture : elles ne seront utilisées que dans la section 5.1 pour obtenir des formules explicites pour $\rho_{\mathbf{a}}$ et $f_{\mathbf{a}}$.

Nous noterons am, sn, cn et dn les fonctions elliptiques de Jacobi. Ce sont des fonctions d'une variable complexe z qui dépendent d'un paramètre k. Nous supposerons k dans l'intervalle $]0, 1[$ ou $]1, \infty[$. Si aucune confusion n'est possible, on notera $\mathrm{am}(z)$ pour $\mathrm{am}(z, k)$. De même pour sn, cn et dn. Ces fonctions sont définies, pour z petit, par

$$z = \int_0^{\mathrm{am}(z)} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \ ,$$

$$\mathrm{sn}(z) = \sin(\mathrm{am}(z)) \ , \ \mathrm{cn}(z) = \cos(\mathrm{am}(z)) \ \text{ et } \ \mathrm{dn}(z) = \sqrt{1 - k^2 \mathrm{sn}^2(z)} \ .$$

On ramène l'étude de ces fonctions au cas où $k \in]0,1[$ grâce aux égalités

$$\mathrm{sn}(z,k) = k^{-1}\mathrm{sn}(kz,k^{-1}) \ , \ \mathrm{cn}(z,k) = \mathrm{dn}(kz,k^{-1}) \ \text{ et } \ \mathrm{dn}(z,k) = \mathrm{cn}(kz,k^{-1}) \ .$$

Introduisons les deux intégrales elliptiques complètes $K = K(k)$ et $K' = K'(k)$ définies par les égalités

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \ \text{ et } \ K'(k) = K(\sqrt{1-k^2}) \ \text{ pour } \ k \in]0,1[\tag{8}$$

$$K(k) = k^{-1}K(k^{-1}) \ \text{ et } \ K'(k) = k^{-1}K'(k^{-1}) \ \text{ pour } \ k \in]1,\infty[\ . \tag{9}$$

Les fonctions sn, cn, dn sont des fonctions méromorphes doublement périodiques sur $\mathbb{C}$. Les périodes communes à ces trois fonctions sont les éléments du réseau rectangulaire de $\mathbb{C}$

$$\Lambda := 4K\,\mathbb{Z} \oplus 4iK'\mathbb{Z} \ .$$

Toutes trois ont les mêmes pôles. Ce sont les points $2mK + (2n+1)iK'$ avec m et n entiers. Ces pôles sont simples. La fonction am est holomorphe dans la bande $|\mathrm{Im}(z)| < K'$ et vérifie l'égalité $\mathrm{am}(z + 2K) = \mathrm{am}(z) + \pi$ lorsque $k < 1$ et $\mathrm{am}(z + 2K) = \mathrm{am}(z)$ lorsque $k > 1$.

2.4.3 La paramétrisation de Jacobi de $E_{\mathbb{R}}$

Nous pouvons enfin donner la paramétrisation de $E_{\mathbb{C}}$ à l'aide des fonctions elliptiques. La paramétrisation annoncée de $F_{\mathbb{R}}$ s'en déduira.

On suppose $a, R, r > 0$, $r < a + R$ et $a \pm R \pm r \neq 0$. Pour paramétrer la courbe $E_{\mathbb{R}}^{a,R,r}$, nous utiliserons les fonctions elliptiques avec le paramètre $k > 0$ défini par la formule (4).
On a donc l'équivalence :

$$k \in]0,1[\iff F_{\mathbb{R}} \ \text{ est de type NC} \ . \tag{10}$$

Les conditions suivantes définissent un unique élément $z_E \in [0, 4K[+[0, 4K'i[$

$$\mathrm{sn}(z_E) > 0 \ , \ \mathrm{cn}(z_E) = \frac{r}{R+a} \ \text{ et } \ \mathrm{dn}(z_E) = \frac{R-a}{R+a} \ . \tag{11}$$

Remarques - Si $a < R - r$, on a $z_E \in]0, K[$.
- Si $R - r < a < R + r$, on a $z_E \in]0, 2K[$.
- Si $a > R + r$, on a $z_E \in]K, 2K[+2iK'$.

Remarquons que la fonction $\mathrm{cn}(z) + i\,\mathrm{sn}(z) = e^{i\mathrm{am}(z)}$ est aussi méromorphe et Λ-périodique.

Lemme 2.9 *Soient a, R, r avec $a \pm R \pm r \neq 0$. Gardons les notations k, K, Λ ci-dessus et posons*

$$\gamma_\pm(z) := (\mathrm{cn}(z) \pm i\,\mathrm{sn}(z), \mathrm{cn}(z+z_E) \pm i\,\mathrm{sn}(z+z_E)) \ . \tag{12}$$

a) L'application $z \to \gamma_+(z)$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}/\Lambda$ sur $E_{\mathbb{C}}^{a,R,r}$.
b) L'application $(\pm, z) \to \gamma_\pm(z)$ met en bijection $\{\pm\} \times \mathbb{R}/4K\mathbb{Z}$ et $E_{\mathbb{R}}^{a,R,r}$.
c) On a les égalités

$$\varphi_E(\gamma_\pm(z)) = \gamma_\pm(z+z_E) \ \text{ et}$$
$$\sigma_E(\gamma_\pm(z)) = \gamma_\mp(z) = -\gamma_\pm(z+2iK') \ .$$

Démonstration a) La formule de trigonométrie elliptique

$$\mathrm{cn}(z_1+z_2) = \mathrm{cn}(z_1)\mathrm{cn}(z_2) - \mathrm{sn}(z_1)\mathrm{sn}(z_2)\mathrm{dn}(z_1+z_2)$$

appliquée avec $z_1 := -z$ et $z_2 = z + z_E$ prouve que l'application $\gamma_\pm$ prend ses valeurs dans $E_{\mathbb{C}}$. Par compacité de $\mathbb{C}/\Lambda$ cette application est surjective. Elle est aussi injective, car connaître $\gamma_\pm(z)$, c'est connaître simultanément $\mathrm{cn}(z)$, $\mathrm{sn}(z)$ et $\mathrm{dn}(z)$, c'est donc connaître z modulo Λ.

b) En effet, comme la fonction $\mathrm{cn}(z) + i\,\mathrm{sn}(z)$ est de degré 2 sur $\mathbb{C}/\Lambda$, on a l'équivalence:

$$|\mathrm{cn}(z) + i\,\mathrm{sn}(z)| = 1 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(z) \in 2K'\mathbb{Z} \ .$$

On remarque alors que $\gamma_+(z+2iK') = \gamma_-(z)$.

c) En effet, l'application $\gamma_+(z) \to \gamma_+(z+z_E)$ est l'unique automorphisme ψ de $E_{\mathbb{C}}$ de la forme $(s_1, s_2) \to (s_2, s_1')$ avec $s_1' \neq s_1$. □

Corollaire 2.10 *Avec ces notations.*
a) Si $k < 1$, l'application $(\pm, z) \to p_E(\gamma_\pm(z))$ met en bijection $\{\pm\} \times \mathbb{R}/2K\mathbb{Z}$ et $F_{\mathbb{R}}^{a,R,r}$.
b) Si $k > 1$, l'application $z \to p_E(\gamma_+(z))$ met en bijection $\mathbb{R}/4K\mathbb{Z}$ et $F_{\mathbb{R}}^{a,R,r}$.

Démonstration En effet, si $k < 1$, on a $\gamma_+(z+2K) = -\gamma_+(z)$ et, si $k > 1$, on a $\gamma_+(z+2K) = \gamma_-(z)$. □

Troisième démonstration du théorème de Poncelet D'après le lemme 2.9, la transformation de Poncelet φ_F et la symétrie σ_F se traduisent par une translation sur le paramètre z. Il en est de même des composées φ_F^n et $\sigma_F \circ \varphi_F^n$. □

Cette étude permet de calculer explicitement le nombre de rotation de la transformation de Poncelet.

Corollaire 2.11 *a) On note ρ_E le nombre de rotation de φ_E si $a < R + r$ et celui de $\sigma_E \circ \varphi_E$ sinon. Alors, on a l'égalité*

$$\rho_E = \frac{\mathrm{Re}(z_E)}{4K} \tag{13}$$

où les constantes z_E et K sont données par les équations (8), (4) et (11).
b) De même, on note ρ_F le nombre de rotation de φ_F si $a < R + r$ et celui de $\sigma_F \circ \varphi_F$ sinon. Alors, on a l'égalité

$$\rho_F = 2\rho_E \text{ si } k < 1 \text{ et } \rho_F = \rho_E \text{ si } k > 1.$$

La remarque suivante, aussi due à Jacobi, permet d'estimer le nombre de rotation ρ_E sans faire aucun calcul.

Remarque Lorsque le cercle $C_{\mathbb{R}}$ est fixé et que le cercle $D_{\mathbb{R}}$ décrit un faisceau de cercles $\mathcal{F}$ contenant $C_{\mathbb{R}}$, les paramètres k et K restent constants. En particulier,
- dans le cas NCI, lorsque le cercle $D_{\mathbb{R}} \in \mathcal{F}$ est à l'intérieur de $C_{\mathbb{R}}$ et le rayon r décroît de R à 0, le nombre de rotation ρ_E croît de 0 à $\frac{1}{2}$.
- dans le cas C, lorsque le cercle $D_{\mathbb{R}}$ pivote autour de deux points fixes sur $C_{\mathbb{R}}$ et la distance a croît de 0 à R, le nombre de rotation ρ_E croît de 0 à $\frac{1}{2}$.

2.5 Les relations biquadratiques

Terminons cette partie avec la démonstration originale de Poncelet. C'est cette approche qui nous a suggéré l'existence d'un lien entre le pliage cyclique et la transformation de Poncelet (voir la section 3.2). Néanmoins, cette méthode ne sera pas directement utilisée dans l'étude du pliage cyclique. Nous nous contenterons donc d'en donner les grandes lignes et nous renvoyons au dernier chapitre du livre de Samuel [14] pour les détails.

Elle est basée sur les trois assertions suivantes.

a) Toute relation biquadratique symétrique $\mathcal{R}$ sur une conique lisse $C_{\mathbb{C}}$ de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est donnée par l'ensemble $D^\star_{\mathbb{C}}$ des tangentes à une conique $D_{\mathbb{C}}$ (ou éventuellement l'ensemble des droites passant par l'un de deux points fixes).
b) La "composée" de deux relations biquadratiques symétriques $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sur $C_{\mathbb{C}}$ est aussi une relation biquadratique symétrique $\mathcal{R}_3$ sur $C_{\mathbb{C}}$.
c) Notons $D_{i,\mathbb{C}}$ la conique associée à $\mathcal{R}_i$. Lorsque les coniques $C_{\mathbb{C}}$, $D_{1,\mathbb{C}}$ et $D_{2,\mathbb{C}}$ sont dans un même faisceau, la conique $D_{3,\mathbb{C}}$ est aussi dans ce faisceau.

Quatrième démonstration du théorème de Poncelet Notons $\mathcal{R}_1$ la relation biquadratique de Poncelet $m_1 \leftrightarrow m_2$ et $\mathcal{R}_n$ la relation biquadratique obtenue en la composant n fois. Elle est associée à une conique $D_{n,\mathbb{C}}$ qui est dans le faisceau engendré par $C_{\mathbb{C}}$ et $D_{\mathbb{C}}$. Dès qu'une telle relation a un point fixe qui n'est pas dans l'intersection $C_{\mathbb{C}} \cap D_{\mathbb{C}}$, la conique $D_{n,\mathbb{C}}$ a un cinquième point commun avec $C_{\mathbb{C}}$. Elle lui est donc égale. □

3 La dynamique sur $\ddot{Q}$

Le but de cette partie est d'une part, d'identifier le pliage cyclique avec la transformation de Poncelet (lemme 3.2) et, d'autre part, de montrer la

proposition 1.1, c'est-à-dire l'existence de la dérive pour le pliage cyclique. Le point clef est l'existence d'une fonction sur $\dot{Q}$ invariante par le pliage cyclique (lemme 3.3). Ceci nous permettra d'expliquer les figures 2 et 3.

On reprend les notations de l'introduction. En particulier, a_1, a_2, a_3, a_4 sont des réels positifs tels que $(a_1, a_2) \neq (a_4, a_3)$ et $(a_2, a_3) \neq (a_1, a_4)$.

3.1 Complexification de $\ddot{Q}$

Commençons par décrire la courbe $\ddot{Q}$.

Paramétrons tout d'abord chaque quadrilatère $\dot{q}_0$ de $\dot{Q}$ par la direction de ses côtés. Autrement dit, introduisons les quatre nombres complexes de module 1 :

$$r_1 := \tfrac{1}{a_1}(A_2 - A_1)\ ,\ \ r_2 := \tfrac{1}{a_2}(A_3 - A_2)\ ,\ \ r_3 := \tfrac{1}{a_3}(A_4 - A_3) \text{ et } \ r_4 := \tfrac{1}{a_4}(A_1 - A_4)\ . \quad (14)$$

On a donc l'identification

$$\dot{Q} \simeq \{(r_1, r_2, r_3, r_4) \in \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 \ / \ a_1 r_1 + \cdots + a_4 r_4 = 0\}\ .$$

Dans cette paramétrisation, les pliages $\dot{\varphi}_i$ sont donnés par les formules:

$$\begin{array}{rcl} \dot{\varphi}_1(r_1, r_2, r_3, r_4) & = & (\lambda_{14} r_4, r_2, r_3, \lambda_{14} r_1) \\ \dot{\varphi}_2(r_1, r_2, r_3, r_4) & = & (\lambda_{12} r_2, \lambda_{12} r_1, r_3, r_4) \\ \dot{\varphi}_3(r_1, r_2, r_3, r_4) & = & (r_1, \lambda_{23} r_3, \lambda_{23} r_2, r_4) \\ \dot{\varphi}_4(r_1, r_2, r_3, r_4) & = & (r_1, r_2, \lambda_{34} r_4, \lambda_{34} r_3) \end{array}$$

avec

$$\lambda_{jk} = \lambda_{jk}(\dot{q}_0) = \frac{a_j r_j + a_k r_k}{a_j r_k + a_k r_j} \quad \text{pour} \ \ j, k = 1, \ldots, 4\ .$$

De même la transformation $\dot{\sigma}$ induite par la symétrie σ par rapport au côté A_1A_2 de q_0 est donnée par la formule :

$$\dot{\sigma}(r_1, r_2, r_3, r_4) \ = \ r_1^2\,(r_1^{-1}, r_2^{-1}, r_3^{-1}, r_4^{-1})\ .$$

On a alors $\ddot{Q} \simeq \{(r_1, r_2, r_3, r_4) \in \dot{Q} \ / \ r_1 = 1\}$ et les égalités sur $\ddot{Q}$

$$\ddot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}_3\ ,\ \ \ddot{\varphi}_4 = \dot{\varphi}_4\ ,\ \ \ddot{\varphi}_1 = \dot{\sigma} \circ \dot{\varphi}_3 \ \text{ et } \ \ddot{\varphi}_2 = \dot{\sigma} \circ \dot{\varphi}_4\ .$$

Si on paramètre $\ddot{Q}$ par (r_2, r_4), on obtient

$$\ddot{Q} \simeq \{(r_2, r_4) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \ / \ |a_1 + a_2 r_2 + a_4 r_4|^2 = a_3^2\}\ .$$

Cet ensemble $\ddot{Q}$ est l'ensemble $\ddot{Q}_{\mathbb{R}}$ des points réels de la courbe biquadratique de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

$$\ddot{Q}_{\mathbb{C}} = \{(r_2, r_4) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \ / \ (a_1 + a_2 r_2 + a_4 r_4)(a_1 + a_2 r_2^{-1} + a_4 r_4^{-1}) = a_3^2\}$$

où la conjugaison complexe est donnée par $\overline{r}_2 = r_2^{-1}$ et $\overline{r}_4 = r_4^{-1}$.

Rappelons qu'un quadrilatère q_0 est *de type lisse* si, pour tout choix de signes, on a $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4 \neq 0$.

Lemme 3.1 *Les points singuliers de $\ddot{Q}_{\mathbb{C}}$ correspondent aux quadrilatères plats. En particulier, lorsque q_0 est de type lisse, la courbe $\ddot{Q}_{\mathbb{C}}$ est une courbe elliptique. Dans ce cas, les pliages $\ddot{\varphi}_j$, pour $j = 1, \ldots, 4$, sont des involutions de $\ddot{Q}_{\mathbb{C}}$.*

Démonstration On peut par exemple déterminer les points où la différentielle de l'équation de $\ddot{Q}_{\mathbb{C}}$ s'annule. On trouve $r_2 = \pm r_4 = \pm 1$.

Pour la dernière assertion, il suffit de remarquer que, par exemple, $\ddot{\varphi}_1$ est l'involution ψ_f associée à la fonction f de degré 2 définie par $f(\ddot{q}) = \frac{r_3}{r_2}$. □

Remarques - Lorsque $\ddot{Q}_{\mathbb{C}}$ contient exactement un quadrilatère plat, alors la courbe $\ddot{Q}_{\mathbb{C}}$ est une droite projective avec un point double ordinaire et les pliages $\ddot{\varphi}_i$ sont encore des involutions de $\ddot{Q}_{\mathbb{C}}$.
- Lorsque $\ddot{Q}_{\mathbb{C}}$ contient deux quadrilatères plats, c'est-à-dire lorsque $\ddot{Q}_{\mathbb{C}}$ contient des parallélogrammes, i.e. lorsque $(a_1, a_2) = (a_3, a_4)$, la courbe $\ddot{Q}_{\mathbb{C}}$ est formée de deux droites projectives qui s'intersectent transversalement en 2 points.

3.2 Pliage cyclique et transformation de Poncelet

Nous relions dans cette section le pliage $\ddot{\varphi}_{43} = \ddot{\varphi}_{21}$ avec la transformation de Poncelet φ_F. L'existence d'un tel lien est en partie suggérée par l'assertion 2.5.a.

Pour chaque quadrilatère $q_0 = (A_1, \ldots, A_4)$, on notera $\theta_j = \theta_j(q_0)$ l'angle extérieur au sommet A_j (pour $j = 1, \ldots, 4$), et

$$t_1 = \frac{r_3}{r_1} \text{ et } t_2 = -\frac{r_2}{r_4} . \tag{15}$$

Autrement dit, si on note $\beta_1 := \theta_2 + \theta_3$ et $\pi - \beta_2 := \theta_3 + \theta_4$ les angles entre les côtés opposés de q_0, on a $t_1 = e^{i\beta_1}$ et $t_2 = e^{i\beta_2}$ (voir figure 11.A).

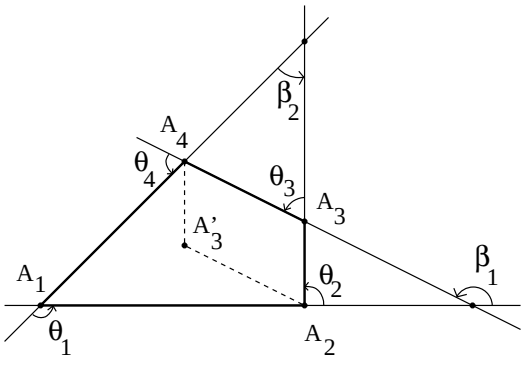
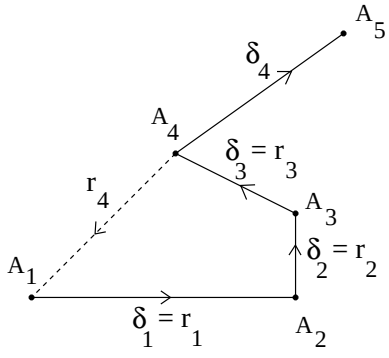


Figure 11: A. Les angles θ_j et β_j.



B. Les directions r_j et δ_j.

Lemme 3.2 *Soient $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$. On suppose $(a_1, a_2) \neq (a_3, a_4)$, $(a_1, a_2) \neq (a_4, a_3)$, $(a_1, a_4) \neq (a_2, a_3)$ et on pose*

$$a = a_1 a_3 \ , \ \ R = a_2 a_4 \ \text{ et } \ r = \frac{1}{2}(a_4^2 - a_3^2 + a_2^2 - a_1^2) \ . \tag{16}$$

a) L'application $\Theta : \ddot{q}_0 \to (t_1, t_2)$ est une bijection de $\ddot{Q}$ sur $F_{\mathbb{R}}^{a,R,r}$.
b) On a les égalités $\Theta \circ \ddot{\varphi}_{43} = \varphi_F \circ \Theta$ et $\Theta \circ \ddot{\sigma} = \sigma_F \circ \Theta$.

Remarques - Plus précisément, nous verrons que l'application Θ est un isomorphisme entre les courbes $\ddot{Q}_{\mathbb{C}}$ et $F_{\mathbb{C}}^{a,R,r}$.
- Il peut sembler a priori plus naturel de paramétrer $\ddot{Q}$ par deux angles opposés, c'est-à-dire de poser $\Theta'(\ddot{q}_0) = (\tau_1, \tau_2) := (\frac{r_2}{r_1}, \frac{r_4}{r_3})$. Ce qui donnerait une bijection Θ' entre $\ddot{Q}$ et $F_{\mathbb{R}}^{a',R',r'}$ avec $a' = -a_1 a_2$, $R' = a_3 a_4$ et $r' = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2)$. L'intérêt de la paramétrisation Θ est qu'elle relie le pliage $\ddot{\varphi}_{43} = \ddot{\varphi}_{21}$ avec la transformation de Poncelet φ_F.
- La condition $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4 \neq 0$ équivaut à la condition $a \pm R \pm r \neq 0$. Elle signifie que les courbes $\ddot{Q}_{\mathbb{C}}$ et $F_{\mathbb{C}}^{a,R,r}$ sont des courbes elliptiques.

Démonstration du lemme 3.2 a) Partons du quadrilatère $q_0 := (A_1, A_2, A_3, A_4)$ et construisons le point A_3' tel que (A_2, A_3, A_4, A_3') est un parallélogramme et calculons de deux façons la diagonale $A_1 A_3'$. On obtient l'égalité

$$|a_1 + t_1 a_3|^2 = |a_4 - t_2 a_2|^2 \ . \tag{17}$$

Ceci prouve l'inclusion $\Theta(\ddot{Q}) \subset F_{\mathbb{R}}^{a,R,r}$.

Montrons que Θ est une bijection de $\ddot{Q}$ sur $F_{\mathbb{R}}^{a,R,r}$. En effet, si on connait (t_1, t_2), on connait les triangles $A_1 A_2 A_3'$ et $A_1 A_3' A_4$ à isométrie positive près. La condition (17) assure que l'on peut recoller ces deux triangles. Ce qui prouve que $\ddot{q}_0$ existe et est unique.

Les formules inverses : $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{(a_3 t_1 + a_1) t_2}{a_2 t_2 - a_4}$, $r_3 = -t_1$ et $r_4 = -\frac{a_3 t_1 + a_1}{a_2 t_2 - a_4}$ permettent de montrer que Θ est aussi une bijection entre les courbes $\ddot{Q}_{\mathbb{C}}$ et $F_{\mathbb{C}}^{a,R,r}$.

b) D'après les lemmes 2.6 et 3.1, la composée $\Theta \circ \ddot{\varphi}_{43} \circ \Theta^{-1} \circ \varphi_F^{-1}$ est une translation de $\ddot{Q}_{\mathbb{C}}$. On veut montrer que cette composée est l'identité. Il suffit pour cela de montrer qu'elle laisse invariante la fonction f_3 de degré 2 sur $F_{\mathbb{C}}$ définie par $f_3(t_1, t_2) = t_1 t_2$.

Pour cela, on note $\ddot{\varphi}_3(q_0) = (r_1', r_2', r_3', r_4')$ et $\ddot{\varphi}_{43}(q_0) = (r_1'', r_2'', r_3'', r_4'')$ et on calcule :

$$f_3(\Theta \circ \ddot{\varphi}_{43}(\ddot{q}_0)) = -\frac{r_3'' r_2''}{r_1'' r_4''} = -\frac{r_4' r_2'}{r_1' r_3'} = -\frac{r_4 r_3}{r_1 r_2} = f_3(\varphi_F \circ \Theta(\ddot{q}_0)) \ .$$

C'est bien ce que l'on cherchait. □

3.3 La fonction $\dot{\varphi}$-invariante

On note h la fonction de $\dot{Q}$ dans $\mathbb{S}^1$ donnée par

$$h(\dot{q}_0) = r_1 r_2 r_3 / r_4 \ . \tag{18}$$

Lemme 3.3 *La fonction h est invariante par le pliage cyclique $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_{4321}$.*

Démonstration On veut montrer l'égalité

$$h \circ \dot{\varphi} = h \ .$$

Pour cela, introduisons pour $j = 1, \ldots, 4$ les fonctions h_j de $\dot{Q}$ dans $\mathbb{S}^1$ données par $h_j(\dot{q}_0) = r_1 r_2 r_3 r_4 / r_j^2$ de sorte que $h = h_4$. On a alors les égalités

$$h_4 \circ \dot{\varphi}_4 = h_3 \ , \quad h_3 \circ \dot{\varphi}_3 = h_2 \ , \quad h_2 \circ \dot{\varphi}_2 = h_1 \text{ et } \ h_1 \circ \dot{\varphi}_1 = h_4 \ .$$

D'où l'égalité annoncée. □

Pour tout quadrilatère $\dot{q}_0 \in \dot{Q}$ et tout $u \in e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$, on note $u\dot{q}_0$ l'image de $\dot{q}_0$ par la rotation d'angle θ. On a l'égalité $h(u\dot{q}_0) = u^2 h(\dot{q}_0)$. Il existe donc une direction $u_0 \in \mathbb{S}^1$ telle que $h(u_0^{-1}\dot{q}_0) = -1$. Cette direction $u_0 = \sqrt{-h(\dot{q}_0)}$ n'est, pour l'instant, définie qu'au signe près. Elle jouera un rôle important dans la suite car nous verrons que, lorsque q_0 est de type C, si le signe est bien choisi, elle donne la direction de la dérive (voir proposition 4.12).

Il est donc naturel d'introduire le revêtement à deux feuillets $\dot{Q}_1$ de $\ddot{Q}$

$$\dot{Q}_1 = \{\dot{q}_0 \in \dot{Q} \ / \ h(\dot{q}_0) = -1\} \ . \tag{19}$$

Pour chaque quadrilatère $\dot{q}_0$, on note

$$s_1 = r_1^{-1} \ \text{ et } \ s_2 = r_3 \ . \tag{20}$$

Le lemme suivant identifie le pliage cyclique sur $\dot{Q}_1$ avec le carré de la transformation de Poncelet.

Lemme 3.4 *Soient $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$. On suppose $(a_1, a_2) \neq (a_3, a_4)$, $(a_1, a_2) \neq (a_4, a_3)$, $(a_1, a_4) \neq (a_2, a_3)$ et on pose, comme dans le lemme 3.2 :*

$$a = a_1 a_3, \ R = a_2 a_4 \ \text{ et } \ r = \tfrac{1}{2}(a_4^2 - a_3^2 + a_2^2 - a_1^2).$$

a) L'application $\Theta' : \dot{q}_0 \to (s_1, s_2)$ est une bijection de $\dot{Q}_1$ sur $E_{\mathbb{R}}^{a,R,r}$.
b) On a les égalités $\Theta' \circ \dot{\varphi} = \varphi_E^2 \circ \Theta'$ et $\Theta' \circ \dot{\sigma}_0 = \sigma_E \circ \Theta'$.

Démonstration a) Comme $\dot{q}_0$ est dans $\dot{Q}_1$, on a les égalités

$$s_1 s_2 = r_1^{-1} r_3 = t_1 \quad \text{et} \quad s_1 / s_2 = r_1^{-1} r_3^{-1} = -r_2 / r_4 = t_2 \ .$$

Le lemme 3.2.a prouve alors que (s_1, s_2) est dans $E_{\mathbb{R}}$ et que

$$p_E(\Theta'(\dot{q}_0)) = \Theta(\ddot{q}_0) \ .$$

Comme Θ est une bijection de $\ddot{Q}$ sur $F_{\mathbb{R}}$ et que l'on a l'égalité

$$\Theta'(-\dot{q}_0) = -\Theta'(\dot{q}_0) \ ,$$

l'application Θ' est une bijection de $\dot{Q}_1$ sur $E_{\mathbb{R}}$.

b) D'après le lemme 3.2.b, on a l'égalité

$$\Theta' \circ \dot{\varphi}(\dot{q}_0) = \pm\varphi_E^2 \circ \Theta'(\dot{q}_0) \ .$$

Il reste à déterminer ce signe ± 1. Ce signe est par construction donné par une expression rationnelle en les coordonnées $r_1, \ldots, r_4$ et les paramètres $a_1, \ldots, a_4$. Ce signe est donc constant. Pour l'évaluer, on peut par exemple supposer que q_0 est un quadrilatère dont les diagonales sont orthogonales. On vérifie qu'alors, on a $\dot{\varphi}(\dot{q}_0) = -\dot{q}_0$, $r = 0$ et $\varphi_E^2(s_1, s_2) = -(s_1, s_2)$. Le signe est donc $+1$. □

Ce lemme 3.4 nous permet enfin de démontrer la proposition 1.1 que nous réénonçons :

Proposition 3.5 *Soit q_0 un quadrilatère de côtés $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$. On suppose $(a_1, a_2) \neq (a_4, a_3)$, $(a_1, a_4) \neq (a_2, a_3)$ et on note $q_n = \varphi^n(q_0)$ la suite de quadrilatères obtenue par pliage cyclique à partir de q_0. Alors la limite $v(q_0) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} q_n$ existe.*

Notons $\delta : \dot{Q} \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\delta(\dot{q}_0) = A_5 - A_1$ de sorte que l'on a

$$\varphi(\dot{q}_0) = \dot{\varphi}(\dot{q}_0) + \delta(\dot{q}_0) \ . \tag{21}$$

Démonstration Nous allons montrer l'existence de la limite

$$v(q_0) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta(\dot{\varphi}^k(\dot{q}_0)) \ . \tag{22}$$

On aura alors

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n}\, q_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \varphi^n(\dot{q}_0) = v(q_0) \ . \tag{23}$$

Pour montrer l'existence de cette limite, on va distinguer deux cas.

1$^{\text{er}}$ cas : q_0 est de type lisse.

Il résulte du lemme 3.4 que l'action de $\dot{\varphi}$ sur $\dot{Q}_1$ est conjugué à une translation sur le groupe compact $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Donc, par le théorème d'équirépartition de Weyl, la limite (22) existe pour toute fonction continue δ.

2$^{\text{ème}}$ cas : q_0 n'est pas de type lisse.

Supposons tout d'abord $(a_1, a_2) \neq (a_3, a_4)$. D'après le lemme 3.2, on peut identifier les parties lisses de $\ddot{Q}_{\mathbb{C}}$ et de $F_{\mathbb{C}}^{a,R,r}$, avec a, R, r donnés par les égalités (16). Reprenons alors le paramètre τ de la démonstration du lemme 2.5.b. Le paramètre τ' donné par $\tau' := \frac{\tau - \sqrt{a/R}}{\tau + \sqrt{a/R}}$, donne une identification de la partie lisse de $\ddot{Q}_{\mathbb{C}} \simeq F_{\mathbb{C}}$ avec $\mathbb{C}^\star$. Dans ce paramétrage, l'application $\ddot{\varphi}_{43}$ est donnée par une multiplication $\tau' \mapsto \chi\tau'$ par un réel $\chi \neq -1, 0, 1$.

Le paramètre τ'_n correspondant au point $\ddot{\varphi}^n_{43}(\ddot{q}_0)$ est donné par $\tau'_n = \tau'_0\chi^n$. Donc la suite $\ddot{\varphi}^n_{43}(\ddot{q}_0)$ converge *exponentiellement vite* vers le point singulier $\ddot{q}_\infty$ de $\ddot{Q}_\mathbb{C}$. Donc, par le lemme 3.4 la suite $\dot{\varphi}^n(\dot{q}_0)$ converge *exponentiellement vite* vers l'un des deux points singuliers $\dot{q}_\infty$ de $\dot{Q}_1$. Comme la fonction δ est une fonction rationnelle sur $\dot{Q}_1$ qui s'annule en $\dot{q}_\infty$, la série $k \to |\delta(\dot{\varphi}^k(\dot{q}_0))|$ est majorée par une série géométrique convergente. Ceci prouve bien que la limite (22) existe et est nulle.

Le cas où $(a_1, a_2) = (a_3, a_4)$ se traite de la même façon. La différence principale est que $\ddot{Q}_\mathbb{C}$ a deux points singuliers au lieu d'un : les deux parallélogrammes plats (voir la remarque du lemme 3.1). On utilise encore une paramétrisation rationnelle des composantes irréductibles de la partie lisse de $\ddot{Q}_\mathbb{C}$ à l'aide de $\mathbb{C}^\star$. Les détails sont laissés au lecteur. □

Remarque Il résulte de cette démonstration que, lorsque q_0 est de type non lisse, la suite q_n converge exponentiellement vite vers un quadrilatère plat q_∞ et donc que la dérive est nulle : $v(q_0) = 0$. Cette remarque permettra donc de supposer dans la suite de cet article que q_0 est de type lisse, c'est à dire que $\ddot{Q}$ est une courbe elliptique.

3.4 Période stricte et semipériode

Le lemme suivant est dû à Charter et Rogers pour les quadrilatères isocèles (voir [4]).

Lemme 3.6 *Soit q_0 un quadrilatère non plat, $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ ses cotés et $\ddot{Q} = \ddot{Q}_{\underline{a}}$.*
a) Si $\ddot{\varphi}^n_{43}(\ddot{q}_0) = \ddot{q}_0$, alors on a $\ddot{\varphi}^n_{43} = Id$ sur $\ddot{Q}$. On dit alors que $\ddot{q}_0$ est n-périodique.
b) Si $\ddot{\sigma} \circ \ddot{\varphi}^n_{43}(\ddot{q}_0) = \ddot{q}_0$, alors on a $\ddot{\varphi}^n_{43} = \ddot{\sigma}$ sur $\ddot{Q}$. On dit alors que $\ddot{q}_0$ est n-semipériodique.

Démonstration Cela résulte du lemme 3.2 et du théorème de Poncelet. □

Nous dirons que q_0 est *de type n-périodique* si $\ddot{q}_0$ est n-périodique. Ceci signifie que $\varphi^n_{43}(q_0)$ est l'image de q_0 par une isométrie positive. De même, nous dirons que q_0 est *de type n-semipériodique* si $\ddot{q}_0$ est n-semipériodique. Ceci signifie que $\varphi^n_{43}(q_0)$ est l'image de q_0 par une isométrie négative.

Lorsque q_0 est de type périodique, on appelle *période* de q_0 le plus petit entier n tel que q_0 est de type n-périodique; on dit que n est une *période stricte* de q_0 si n est impair ou si n est pair et q_0 n'est pas de type $\frac{n}{2}$-semipériodique. Lorsque q_0 est de type semipériodique, on appelle *semipériode* de q_0 le plus petit entier n tel que q_0 est de type n-semipériodique.

Remarque Le lemme 3.6 affirme que la périodicité (resp. la semi-périodicité) d'un quadrilatère non plat, ne dépend que des longueurs de ses côtés. La démonstration prouve qu'elle ne dépend en fait que du triplet (a, R, r) donné par les égalités (16) et qu'elle est donnée par la condition $P_n(a, R, r) = 0$ (resp. $Q_n(a, R, r) = 0$) de la section 2.1. Par exemple :

Exemples - Les quadrilatères de période 2 sont donnés par $r = 0$. Ce sont ceux dont les diagonales sont orthogonales (voir figure 13).
- Les quadrilatères de semipériode 2 sont donnés par $R = a$.

- Les quadrilatères de période 3 sont donnés par $R^2 - a^2 = \pm 2rR$.
- Les quadrilatères de semipériode 3 sont donnés par $R^2 - a^2 = \pm 2ra$.
- Les quadrilatères de période stricte 4 sont donnés par $(R^2 - a^2)^2 = 2r^2(R^2 + a^2)$.
- Les quadrilatères de semipériode 4 sont donnés par $(R^2 - a^2)^2 = \pm 4r^2 aR$ ...

Remarque Si les coordonnées des sommets de q_0 sont rationnelles et q_0 est de type périodique, J.Esch et T.Rogers ([8] p.494) montrent en utilisant le théorème de Mazur que q_0 est de période ou de semipériode au plus 12. En particulier les quadrilatères $q_A, \ldots, q_H$ des figures 2 à 7 ne sont pas périodiques.

Le lemme suivant clarifie le lien entre "période à isométrie près" et "période à translation près".

Lemme 3.7 *Soit q_0 un quadrilatère de type n-périodique avec $n \geq 2$. Alors le quadrilatère $q_n = \varphi^n(q_0)$ est un translaté de q_0 : $q_n = q_0 + n\, v(q_0)$.*

En particulier, lorsque q_n est image de q_0 par une isométrie positive, le carré de cette isométrie est une translation.

Démonstration Utilisons le lemme 3.4. Il n'est pas restrictif de supposer que $\dot{q}_0$ est dans $\dot{Q}_1$. Notons alors $e_0 := \Theta'(\dot{q}_0)$. Par hypothèse, on a l'égalité $(\ddot{\varphi}_{43})^n(\ddot{q}_0) = \ddot{q}_0$. On a donc $\dot{\varphi}_E^n(e_0) = \pm e_0$ puis $\dot{\varphi}_E^{2n}(e_0) = e_0$. On en déduit l'égalité cherchée $\dot{\varphi}^n(\dot{q}_0) = \dot{q}_0$. □

4 La dynamique sur $\dot{Q}$

Nous déterminons dans cette partie la loi statistique des directions des côtés $A_{n+1} - A_n$. Ceci nous permettra de démontrer le théorème 1.2 et le corollaire 1.4, de calculer la dérive $v(q_0)$, et d'expliquer les figures 6 et 7.

On gardera jusqu'à la fin de ce texte les notations des parties précédentes et en particulier $M, m, p, a, R, r, k, K, K', \rho_E, \ldots$ des égalités (1), (4), (8), (9), (11), (13), (16) qui sont des fonctions de $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$.

4.1 Quadrilatères de type C

Vérifions tout d'abord que la condition "de type C" pour un quadrilatère (définition 1.3) équivaut à la condition "de type C" pour la configuration de Poncelet correspondante (définition 2.3).

Comme la symétrie $\dot{\sigma}$ ne laisse pas invariante la fonction h, il est naturel d'introduire une nouvelle symétrie $\dot{\sigma}_0 : \dot{Q} \to \dot{Q}$ donnée par

$$\dot{\sigma}_0(\dot{q}_0) = -h(\dot{q}_0) r_1^{-2} \dot{\sigma}(\dot{q}_0) \tag{24}$$

de sorte que l'on a

$$h \circ \dot{\sigma}_0 = h\ .$$

Lemme 4.1 *Soit q_0 un quadrilatère de type lisse. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*
(i) La configuration de Poncelet $\Theta(\ddot{q}_0)$ est de type C.
(ii) La courbe $\ddot{Q}$ est connexe.
(iii) Les quadrilatères $\ddot{q}_0$ et $\ddot{\sigma}(\ddot{q}_0)$ sont dans la même composante connexe de $\ddot{Q}$.
(iv) Les quadrilatères $\dot{q}_0$ et $\dot{\sigma}_0(\dot{q}_0)$ sont dans la même composante connexe de $h^{-1}(h(\dot{q}_0))$.
(v) Les quadrilatères $\dot{q}_0$ et $-\dot{q}_0$ ne sont pas dans la même comp. connexe de $h^{-1}(h(\dot{q}_0))$.
(vi) Le quadrilatère q_0 est de type C.

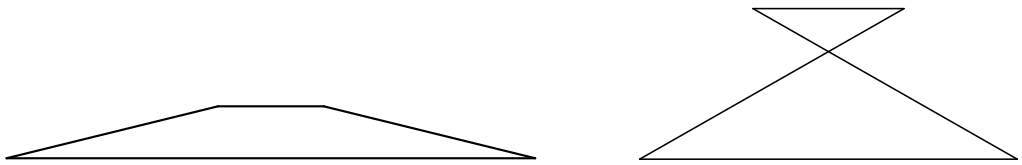


Figure 12: A. Quadrilatère de type C. B. Quadrilatère de type NC.

Démonstration Montrons l'équivalence $(i) \Leftrightarrow (vi)$. On calcule :

$$4(r^2-(a-R)^2) = (a_1+a_2+a_3+a_4)(a_1+a_2-a_3-a_4)(a_1-a_2+a_3-a_4)(a_1-a_2-a_3+a_4).$$

On a donc les équivalences :

$$\Theta(\ddot{q}_0) \text{ est de type C} \quad \Leftrightarrow \quad r^2 > (a-R)^2 \quad \Leftrightarrow \quad M+m > p \quad \Leftrightarrow \quad q_0 \text{ est de type C.}$$

Les autres affirmations du lemme résultent du corollaire 2.8 ou de la figure 10. □

Le lemme suivant relie type périodique et type NC.

Lemme 4.2 *a) Tout quadrilatère q_0 de période stricte paire est de type* NC.
b) Tout quadrilatère q_0 de semipériode paire est de type C.

Nous verrons (lemme 4.14) que dans le cas a), la dérive $v(q_0)$ est nulle.

Démonstration Cela résulte de l'identification pliage-Poncelet (lemme 3.2) et du lemme suivant. □

Lemme 4.3 *a) Toute configuration de Poncelet f_0 de période stricte paire n est de type* NC. *En outre, dans ce cas, on a l'égalité $\varphi_E^n = -Id_E$.*
b) Tout configuration de Poncelet f_0 de semipériode paire est de type C.

Démonstration a) Notons $n = 2N$. Lorsque $(\varphi_F)^{2N} = Id_F$ et que $F_{\mathbb{R}}$ est connexe, on a $(\varphi_F)^N = Id_F$ ou σ_F. Contradiction. Donc $F_{\mathbb{R}}$ n'est pas connexe. On a alors $(\varphi_E)^{2N} = Id_E$ ou $-Id_E$. Le premier cas est exclu, car on aurait alors $(\varphi_E)^N = Id_E$, $-Id_E$, σ_E ou $-\sigma_E$. On en déduirait $(\varphi_F)^N = Id_F$ ou σ_F. Contradiction.

b) Si f_0 est de type NC, la transformation σ_F échange les composantes connexes de $F_{\mathbb{R}}$ alors que, pour n est pair, φ_F^n les préserve. Contradiction. □

4.2 Quadrilatères de type non périodique

Calculons maintenant la dérive $v(q_0)$ pour un quadrilatère de type non périodique.

On peut, d'après la remarque de la section 3.3, supposer que q_0 est de type lisse. Notons $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$ la composante connexe de la courbe elliptique $h^{-1}(h(\dot{q}_0)) \simeq E_{\mathbb{R}}$ contenant $\dot{q}_0$ et μ la probabilité de Haar sur $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$.

On dira qu'une suite x_n de points dans un compact admet pour loi statistique une probabilité P, si la suite de probabilités $\frac{1}{n}\sum_{k\leq n}\delta_{x_k}$ converge vers P.

Lemme 4.4 *Soit q_0 un quadrilatère de type lisse et de type non périodique. Alors la suite $\dot{q}_n = \dot{\varphi}^n(\dot{q}_0)$ admet μ comme loi statistique.*

Démonstration On reprend la démonstration de la proposition 3.5. D'après le lemme 3.4.b, la transformation $\dot{\varphi}$ préserve $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$. Comme q_0 n'est pas de type périodique, notre assertion résulte du théorème d'équirépartition de Weyl. □

Introduisons, pour $j \in \mathbb{Z}$, les fonctions $\delta_j : \dot{Q} \to \mathbb{R}^2$ définies par

$$\delta_j(\dot{q}_0) = \tfrac{1}{a_{j'}}(A_{j+1} - A_j)$$

où $j' := j \bmod 4$, de sorte que l'on a

$$\delta = a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + a_3\delta_3 + a_4\delta_4 \ . \tag{25}$$

Le corollaire suivant ramène le calcul de la dérive à celui d'une intégrale. On introduit la *dérive moyenne*

$$V(q_0) = \int_{\dot{Q}_{\dot{q}_0}} \delta(\dot{q}) d\mu(\dot{q}) \ . \tag{26}$$

Corollaire 4.5 *Soit q_0 un quadrilatère de type lisse et de type non périodique. Alors la dérive coïncide avec la dérive moyenne : $v(q_0) = V(q_0)$.*

Démonstration Cela résulte du lemme 4.4 et de la formule (22). □

Proposition 4.6 *Pour tout quadrilatère q_0 de type* NC*, on a l'égalité $V(q_0) = 0$.*
Si en outre, q_0 est de type non périodique, alors la dérive est nulle : $v(q_0) = 0$.

Démonstration D'après le lemme 4.1, comme q_0 est de type NC, l'application $\dot{q} \to -\dot{q}$ préserve la courbe $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$. Cette translation de la courbe elliptique $h^{-1}(h(\dot{q}_0))$ préserve donc la probabilité μ. La nullité de $V(q_0)$ résulte alors de l'égalité $\delta(-\dot{q}) = -\delta(\dot{q})$. □

Pour décrire la loi des côtés, introduisons les quatre fonctions $\Delta_j : \dot{Q} \to \mathbb{S}^1$ définies, pour $j = 1, \ldots, 4$, par

$$\Delta_j = \delta_j^2/h \ .$$

Ce sont des fonctions invariantes par rotation. Les trois premières se calculent facilement :

$$\Delta_1(\dot{q}_0) = e^{i(\theta_4-\theta_2)} \ , \ \Delta_2(\dot{q}_0) = e^{i(\theta_4+\theta_2)} = e^{-i(\theta_3+\theta_1)} \ \text{ et } \ \Delta_3(\dot{q}_0) = e^{i(\theta_3-\theta_1)} \ . \tag{27}$$

Lemme 4.7 *On a les égalités :*
(i) $\Delta_1 \circ \dot{\varphi}_1 = \Delta_4$,
(ii) $\Delta_2 \circ \dot{\varphi}_2 = \Delta_1$,
(iii) $\Delta_3 \circ \dot{\varphi}_3 = \Delta_2$.

Démonstration (i) En effet, des égalités $\delta_4(\dot{\varphi}_1(\dot{q}_0)) = r_4$ et $h(\dot{\varphi}_1(\dot{q}_0)) = (\frac{r_4}{r_1})^2 h(\dot{q}_0)$, on déduit $\Delta_4(\dot{\varphi}_1(\dot{q}_0)) = h(\dot{q}_0)/r_1^2 = \Delta_1(\dot{q}_0)$. C'est ce que l'on voulait.
(ii) Le pliage $\dot{\varphi}_2$ ne modifie pas θ_4 mais change le signe de θ_2.
(iii) Le pliage $\dot{\varphi}_3$ ne modifie pas θ_1 mais change le signe de θ_3. □

Comme les pliages $\dot{\varphi}_j$ ne laissent pas invariante la fonction h, on introduit quatre nouvelles transformations $\dot{\psi}_j : \dot{Q} \to \dot{Q}$ définies par

$$\dot{\psi}_j(\dot{q}_0) = u_j(\dot{q}_0)\dot{\varphi}_j(\dot{q}_0)$$

de sorte que

$$h \circ \dot{\psi}_j = h \ .$$

Les fonctions rationnelles $u_j : \dot{Q} \to \mathbb{S}^1$ sont définies de façon unique au signe près, par les égalités ci-dessus. On a

$$u_1(\dot{q}_0) = \pm\, r_1/r_4 \ , \quad u_2(\dot{q}_0) = \pm\, \lambda_{12}^{-1}(\dot{q}_0) \ , \quad u_3(\dot{q}_0) = \pm\, \lambda_{23}^{-1}(\dot{q}_0) \text{ et } \ u_4(\dot{q}_0) = \pm\, r_3/r_4 \ . \quad (28)$$

Lemme 4.8 *Soit $\dot{q}_0$ un quadrilatère lisse, μ la probabilité invariante sur $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$ et μ' la probabilité invariante sur l'autre composante connexe de $h^{-1}(h(\dot{q}_0))$. Alors, on a les égalités*
a) $(\dot{\psi}_j)_*(\mu) = \mu$ ou μ' selon que $\dot{\psi}_j$ préserve $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$ ou pas.
b) Si q_0 est de type NC, *on a $(-Id)_*(\mu) = \mu$ et $(\dot{\sigma}_0)_*(\mu) = \mu'$.*
c) Si q_0 est de type C , *on a $(-Id)_*(\mu) = \mu'$ et $(\dot{\sigma}_0)_*(\mu) = \mu$.*

Démonstration a) Les quatre transformations $\dot{\psi}_j$ sont des involutions de la courbe elliptique $h^{-1}(h(\dot{q}_0))$ car elles relèvent les quatre involutions $\ddot{\varphi}_j$ de $\ddot{Q}$.
b) et c) Cela résulte du lemme 4.1. □

Remarques - Les points b) et c) expliquent les symétries que l'on observe pour tous les quadrilatères dans les figures 6 et 7. On reviendra sur ces symétries dans la section 5.4.
- Dans le cas NC, quelque soit le choix de signes dans (28) on a les équivalences :

$$\dot{\psi}_j(\dot{Q}_{\dot{q}_0}) = \dot{Q}_{\dot{q}_0} \Longleftrightarrow \dot{\varphi}_j \text{ préserve les composantes connexes de } \ddot{Q} \ .$$

Cela se produit pour exactement deux valeurs de $j \in \{1, \ldots, 4\}$: celles pour lesquelles, en notant $a_0 = a_4$, on a $a_{j-1} \neq M$ et $a_j \neq M$.
- Dans le cas C, on peut choisir les signes dans (28) de sorte que $\dot{\psi}_j$ préserve $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$ (voir figure 10). On reviendra sur ce choix plus loin.

4.3 Quadrilatères de type NC et non périodique

Déterminons maintenant, pour q_0 de type NC, les lois des suites $n \to (A_{4n+j+1} - A_{4n+j})$. Ce qui expliquera la façon dont les points se répartissent sur les cercles de la figure 6. Rappelons que dans ce cas on a $k < 1$.

Lemme 4.9 *Soit q_0 un quadrilatère de type lisse et de type* NC. *Pour tout $j = 1, \ldots, 4$, on note μ_j la probabilité $\mu_j := (\delta_j)_*(\mu)$ de sorte que, lorsque q_0 est de type non périodique, cette probabilité μ_j est la loi statistique des directions des côtés $\delta_j(\varphi^n(q_0))$.*
a) Les probabilités μ_j sont deux à deux égales et vérifient $(-Id)_*(\mu_j) = \mu_j$.
b) Lorsque $h(\dot{q}_0) = -1$, on a les égalités, pour tout $j = 1, \ldots, 4$,

$$\mu_j = \frac{d\theta}{4K\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} \, . \tag{29}$$

Remarques - On se ramène au cas où $h(q_0) = -1$ en tournant q_0.
- Ce lemme, comme le lemme 4.10 ci-dessous, ne dit rien sur la loi statistique du quatrième côté $(A_{4n+1} - A_{4n+4})$ du quadrilatère q_n (voir figure 11.B).
- Dans la formule (29), on a paramétré le cercle $\mathbb{S}^1$ par $e^{i\theta}$.

Démonstration On peut supposer que $h(\dot{q}_0) = -1$. Comme q_0 est de type NC, la transformation $\dot{q} \to -\dot{q}$ préserve μ (lemme 4.8) et on a les égalités $(-Id)_*(\mu_j) = \mu_j$. De même, selon les valeurs de j, on a $(\dot{\psi}_j)_*(\mu) = \mu$ ou $(\dot{\sigma}_0)_*(\mu)$. Or, d'après le lemme 4.7, on a les égalités

$$\delta_1 \circ \dot{\psi}_1 = \pm\, \delta_4 \ , \quad \delta_2 \circ \dot{\psi}_2 = \pm\, \delta_1 \text{ et } \ \delta_3 \circ \dot{\psi}_3 = \pm\, \delta_2 \ . \tag{30}$$

On en déduit que les probabilité μ_j sont soit deux à deux égales, soit deux à deux échangées par changement de signe de θ. D'après (20), on a l'égalité $\delta_1(\dot{q}_0) = r_1 = s_1^{-1}$. Le lemme 3.2 permet de calculer $\mu_1 = (\delta_1)_*(\mu)$ à l'aide de la formule (3). Comme celle-ci est invariante par changement de signe de θ, toutes les probabilités μ_j sont égales. On ajuste alors la constante pour obtenir une probabilité. Ce qui donne la formule (29). □

4.4 Quadrilatères de type C et non périodique

Déterminons maintenant, pour q_0 de type C, les lois des suites $n \to (A_{4n+j+1} - A_{4n+j})$. Ce qui expliquera la façon dont les points se répartissent sur les arcs de cercles de la figure 7 et nous permettra de calculer la dérive. Rappelons que dans ce cas on a $k > 1$.

Le lemme suivant est le petit frère du lemme 4.9.

Lemme 4.10 *Soit q_0 un quadrilatère de type lisse et de type* C. *On note j_0 le numéro du plus grand côté de q_0. Pour tout $j = 1, \ldots, 4$, on note μ_j la probabilité $\mu_j := (\delta_j)_*(\mu)$.*
a) Il existe une unique direction $u_0 \in \mathbb{S}^1$ telle que $u_0^2 = -h(\dot{q}_0)$ et tel que, pour tout $\dot{q}$ dans

$\dot{Q}_{\dot{q}_0}$ et tout $j = 1, \ldots, 4$, on a $\mathrm{Re}(\delta_j(\dot{q})/u_0) > 0$ si $j \neq j_0$ et $\mathrm{Re}(\delta_j(\dot{q})/u_0) < 0$ si $j = j_0$.
b) Pour $j \neq j_0$, les probabilités μ_j sont égales à la même probabilité $\mu_0 := (-Id)_*(\mu_{j_0})$.
c) Lorsque $u_0 = 1$, cette probabilité μ_0 est donnée par la formule

$$\mu_0 = \frac{d\theta}{2K\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} \, \mathbf{1}\{\theta \,/\, |\theta| < \arcsin(k^{-1})\} \, . \tag{31}$$

Remarques - On se ramène au cas où $u_0 = 1$ en tournant q_0.
- Dans la formule (31), on a de nouveau paramétré le cercle $\mathbb{S}^1$ par $e^{i\theta}$.
- Rappelons que, lorsque q_0 est de type non périodique, les probabilités μ_j sont les lois statistiques des directions des côtés $\delta_j(\varphi^n(q_0))$.
- Ce lemme démontre ce que l'on observe dans la figure 7 :
- les quatre arcs de cercles ont la même ouverture qui vaut $2\arcsin(k^{-1})$;
- les quatre arcs de cercles ont le même axe de symétrie qui est porté par la dérive $v(q_0)$;
- les trois arcs les plus petits sont du côté de la dérive tandis que le plus grand est de l'autre côté.

Pour démontrer le point a), nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.11 *Pour tout quadrilatère q_0 de type* C *et $1 \leq j \leq 4$, on a, en notant $a_0 = a_4$,*
a) $(a_{j-1} = M$ ou $a_j = M) \implies \delta_j(\dot{q}_0) \neq \delta_{j-1}(\dot{q}_0)$.
b) $(a_{j-1} \neq M$ et $a_j \neq M) \implies \delta_j(\dot{q}_0) \neq -\delta_{j-1}(\dot{q}_0)$.
c) $\Delta_j(\dot{q}_0) \neq 1$.

Remarques - Dans le cas a), on a $\theta_j \neq 0 \bmod 2\pi$. Dans le cas b), on a $\theta_j \neq \pi \bmod 2\pi$.
- On a $\theta_1 \pm \theta_3 \neq 0 \bmod 2\pi$ et $\theta_2 \pm \theta_4 \neq 0 \bmod 2\pi$: cela résulte du c) et des égalités (27).

Démonstration a) L'inégalité $M + m > p$ implique $a_{j-1} + a_j > p$ puis $\delta_j(\dot{q}_0) \neq \delta_{j-1}(\dot{q}_0)$.

b) L'inégalité $M + m > p$ implique que $|a_{j-1} - a_j| < |a_k - a_l|$ où a_k et a_l sont les longueurs des deux autres côtés. On a donc $\delta_j(\dot{q}_0) \neq -\delta_{j-1}(\dot{q}_0)$.

c) On peut supposer $h(\dot{q}_0) = -1$. On a alors $\Delta_1(\dot{q}_0) = -s_1^{-2}$ où $(s_1, s_2) = \Theta'(\dot{q}_0) \in E_{\mathbb{R}}$. Comme q_0 est de type C, on a $s_1^2 \neq -1$ (voir figure 9) et donc $\Delta_1(\dot{q}_0) \neq 1$. Les autres inégalités $\Delta_j(\dot{q}_0) \neq 1$, s'en déduisent grâce au lemme 4.7. □

Démonstration du lemme 4.10 a) Comme on a $\Delta_1(\dot{q}_0) \neq 1$, on peut quitte à tourner le quadrilatère q_0, supposer que $h(\dot{q}_0) = -1$ et aussi que

$$\mathrm{Re}(\delta_1(\dot{q}_0)) < 0 \;\text{ si }\; a_1 = M \quad \text{et} \quad \mathrm{Re}(\delta_1(\dot{q}_0)) > 0 \;\text{ sinon} \, . \tag{32}$$

Il reste alors à montrer que pour tout $j = 1, \ldots, 4$, et tout q dans $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$, on a

$$\mathrm{Re}(\delta_j(\dot{q})) < 0 \;\text{ si }\; a_j = M \quad \text{et} \quad \mathrm{Re}(\delta_j(\dot{q})) > 0 \;\text{ sinon} \, . \tag{33}$$

Comme $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$ est connexe et que la fonction $\dot{q} \to \mathrm{Re}(\delta_j(\dot{q}))$ ne s'annule pas sur $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$ (lemme 4.11.c), il suffit de trouver un quadrilatère $\dot{q}$ de $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$ pour lequel l'assertion (33) est vraie.

Pour $j = 1$, on prend $\dot{q} = \dot{q}_0$. Pour $2 \leq j \leq 4$, on distingue deux cas. Lorsque $a_{j-1} = M$ ou $a_j = M$, on peut choisir $\dot{q}$ dans $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$ tel que $\delta_j(\dot{q}) = -\delta_{j-1}(\dot{q})$. De même lorsque $a_{j-1} \neq M$ et $a_j \neq M$, on peut choisir $\dot{q}$ dans $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$ tel que $\delta_j(\dot{q}) = \delta_{j-1}(\dot{q})$. Ce qui permet de montrer l'assertion (33) successivement pour $j = 2$, 3 et 4.

b) La fin de la démonstration de ce lemme reprend les mêmes idées que celles du lemme 4.9. Nous aurons besoin cette fois de déterminer les signes qui apparaissent dans les formules (30). On peut supposer que $\theta_0 = 0$. D'après la remarque de la section 4.2, on peut choisir les signes dans (28) *de sorte que les transformations $\dot{\psi}_j$ préservent $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$*. On a donc par le lemme 4.8 $(\dot{\psi}_j)_*(\mu) = \mu$. Or, d'après le lemme 4.7, on a encore les formules (30) :

$$\delta_1 \circ \dot{\psi}_1 = \varepsilon_1 \, \delta_4 \ , \ \ \delta_2 \circ \dot{\psi}_2 = \varepsilon_2 \, \delta_1 \text{ et } \ \delta_3 \circ \dot{\psi}_3 = \varepsilon_3 \, \delta_2 \ .$$

où ε_j est un signe. D'après le a), on a l'équivalence

$$\varepsilon_j = 1 \Longleftrightarrow (a_{j-1} \neq M \ \text{ et } \ a_j \neq M).$$

On en déduit que les probabilité μ_j sont égales à une même probabilité μ_0 lorsque $j \neq j_0$, et que μ_{j_0} est l'image de μ_0 par la symétrie $\theta \to \theta + \pi$.

c) Comme on a $\delta_1(\dot{q}_0) = r_1 = s_1^{-1}$, la formule (3) prouve que, à une constante près, la probabilité $(\delta_1)_*(\mu)$ est localement donnée par la formule (3). On ajuste alors les constantes pour obtenir une probabilité. Ce qui donne la formule (31). □

Nous pouvons enfin terminer le calcul de la dérive pour un quadrilatère de type C.

Proposition 4.12 *Soit q_0 un quadrilatère de type lisse et de type* C. *On note j_0 le numéro du plus grand côté de q_0.*
a) Alors la dérive moyenne est non nulle : $V(q_0) \neq 0$.
b) Plus précisément, on a l'égalité,

$$V(q_0) = \frac{(p-M)\pi}{kK} u_0 \tag{34}$$

où $u_0 = \pm\sqrt{-h(\dot{q}_0)} \in \mathbb{S}^1$ avec un signe choisi de sorte que l'on ait, pour tout $j \geq 1$, $\mathrm{Re}(\delta_j(q_0)/u_0) < 0$ si $j = j_0 \bmod 4$ et $\mathrm{Re}(\delta_j(q_0)/u_0) > 0$ sinon. Un tel choix est possible.
c) En particulier, si q_0 est de type non périodique, la dérive $v(q_0)$ est non nulle et donnée par (34).

Autrement dit : *la dérive $v(q_0)$ est de norme $\frac{(p-M)\pi}{kK}$; elle fait, pour tout $j \geq 1$, un angle aigu avec les vecteurs $A_{j+1} - A_j$, sauf pour ceux de longueur M, auquel cas cet angle est obtus; lorsque $h(\dot{q}_0) = -1$, la dérive $v(q_0)$ est horizontale.*

Démonstration de la proposition 4.12 a) D'après le lemme 4.10 et la formule (25), on a l'égalité

$$V(q_0) = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 2\,a_{j_0}) z_{\mu_0} = 2(p-M) z_{\mu_0}$$

où $z_{\mu_0} := \int_{\mathbb{S}^1} z d\mu_0$ est le centre de gravité de la probabilité μ_0. Comme μ_0 est porté par un demi-cercle, ce centre de gravité z_{μ_0} est non nul.

b) Pour calculer z_{μ_0}, on peut supposer que $u_0 = 1$. On a alors

$$z_{\mu_0} = \frac{1}{K(k)} \int_0^{\arcsin(k^{-1})} \frac{\cos(\theta) d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}} = \frac{\pi}{2kK} \, .$$

c) Cela résulte du corollaire 4.5. □

Démonstration du théorème 1.2 Dans le cas non lisse, cela résulte de la remarque suivant la proposition 3.5. Dans le cas lisse, cela résulte des propositions 4.6 et 4.12. □

Démonstration du corollaire 1.4 D'après ce qui précède, on peut supposer q_0 de type lisse, NC et non périodique ; il faut alors montrer que la suite q_n ne tend pas vers l'infini. Ce résultat découlera immédiatement du lemme 5.1 et de l'énoncé suivant, dû à Koksma (voir [5]).

Lemme 4.13 *Soit ρ un irrationnel. Il existe une infinité d'entiers $q \in \mathbb{N}$ tels que, pour toute fonction $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^N$ à variation bornée et tout $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on ait :*

$$|| \sum_{k=0}^{q-1} f(x + k\rho) - q \int_0^1 f(t)\, dt|| \leq \mathrm{Var}\,(f)\,,$$

où $\mathrm{Var}\,(f)$ désigne la variation totale de f.

Démonstration D'après le principe des tiroirs de Dirichlet, il existe une infinité de couples (p, q) d'entiers premiers entre eux pour lesquels $|\rho - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$. Fixons l'un d'eux, et supposons pour fixer les idées que l'approximation ait lieu par défaut : $\frac{p}{q} < \rho < \frac{p}{q} + \frac{1}{q^2}$. On aura alors, pour $k = 0, \ldots, q-1$, l'encadrement $k\,\frac{p}{q} < k\rho < (k+1)\,\frac{p}{q}$.

Lorsque k décrit $0, \ldots, q-1$, les points $(k\,\frac{p}{q}) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ décrivent l'ensemble des $(\frac{\ell}{q})_{0 \leq \ell \leq q-1}$; il y aura donc un unique $k\rho$ (où $k = k(\ell) \in 0, \ldots, q-1$) dans chacun des intervalles disjoints $[\frac{\ell}{q}; \frac{\ell+1}{q}[$ $(0 \leq \ell \leq q-1)$ de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Fixons maintenant $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On observe que la quantité

$$|| \sum_{k=0}^{q-1} f(x + k\rho) - q \int_0^1 f(t)\, dt|| \leq \sum_{\ell=0}^{q-1} ||f(x + k(\ell)\rho) - q \int_{x+\frac{\ell}{q}}^{x+\frac{\ell+1}{q}} f(t)\, dt||$$

est majorée par la variation totale de f. □

4.5 Quadrilatères de type périodique

Dans cette section nous étudions pour les quadrilatères de type périodique le lien qui existe entre la nullité de la dérive et le type NC.

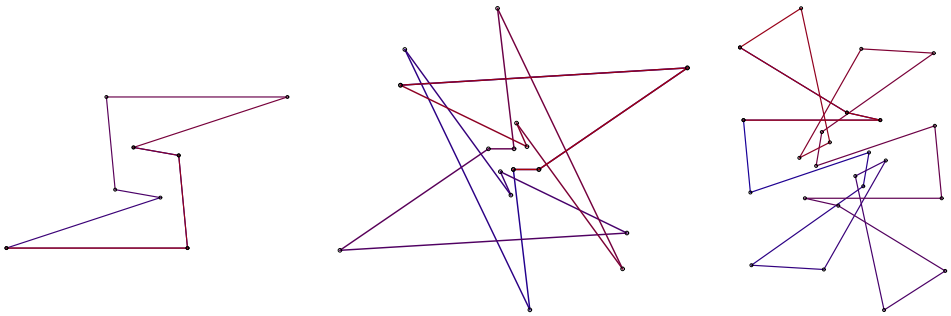


Figure 13: Quadrilatères de période stricte paire. Ici $n = 2$, 4 ou 6.
Ils sont de type NC et ont une dérive nulle.

Rassemblons quelques énoncés sur les quadrilatères de type périodiques qui sont similaires au théorème 1.2 (voir figures 13 et 14).

Proposition 4.14 *Soit q_0 un quadrilatère de type n-périodique avec $n \geq 2$.*
a) Si q_0 admet une période stricte qui est paire, alors q_0 est de type NC *et on a $v(q_0) = 0$. La suite q_n est alors périodique.*
b) Si q_0 est de type C *alors, pour presque tous quadrilatères q ayant mêmes côtés $a_1, \ldots, a_4$ que q_0, on a $v(q) \neq 0$.*

Démonstration a) D'après le lemme 4.2, q_0 est de type NC. D'après le lemme 3.4 et le lemme 4.3, on a l'égalité $\dot{\varphi}^n(\dot{q}_0) = -\dot{q}_0$ On en déduit $v(q_0) = v(-q_0)$ et donc $v(q_0) = 0$.
b) En effet, la proposition 4.12 donne les égalités

$$\int_{\dot{Q}_{\dot{q}_0}} v(\dot{q}) d\mu(\dot{q}) \; = \int_{\dot{Q}_{\dot{q}_0}} \delta(\dot{q}) d\mu(\dot{q}) \; = V(q_0) = \frac{(p-M)\pi}{kK} \sqrt{-h(\dot{q}_0)} \; \neq 0 \; .$$

Comme la fonction $\dot{q} \to v(\dot{q})$ est analytique sur $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$, elle est non nulle sauf au plus en un nombre fini de points. □

Voici maintenant quelques énoncés sur les quadrilatères de type périodique qui contrastent avec le théorème 1.2.

Proposition 4.15 *a) Pour tout $n \geq 3$ impair, il existe des quadrilatères isocèles q_0 de semipériode n, de type* NC *et tels que $v(q_0) \neq 0$.*
b) Pour tout $n \geq 2$ pair, il existe des quadrilatères isocèles q_0 de semipériode n, de type C *et tels que $v(q_0) = 0$.*

Remarque Lorsque n est impair, un quadrilatère $q_0 = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ est de semipériode n si et seulement si le quadrilatère (A_2, A_3, A_4, A_1) est de période stricte n. Cela résulte de l'égalité $\ddot{\varphi}_3 = \ddot{\varphi}_1 \circ \ddot{\sigma}$.

Le corollaire suivant contraste avec le lemme 5.8.

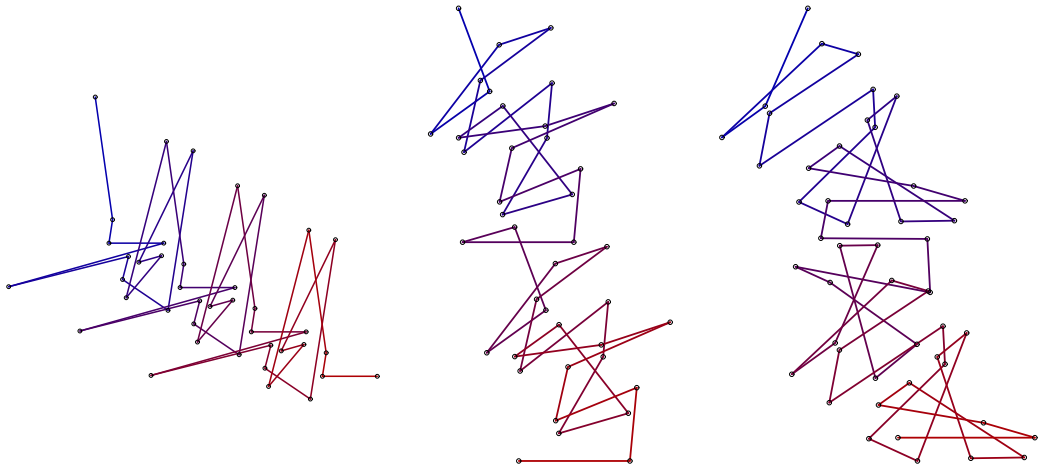


Figure 14: Quadrilatères de type C et de période n. Ici $n = 3$, 5 ou 7:
Ils ont presque tous une dérive non nulle.

Corollaire 4.16 *Il existe des quadrilatères isocèles q_0 et q ayant mêmes côtés $a_1, \ldots, a_4$ tels que la suite $\varphi^n(q_0)$ est bornée mais pas la suite $\varphi^n(q)$.*

Démonstration Les deux quadrilatères seront de type n-semipériodique avec $n \geq 2$ et de type C. On choisit un quadrilatère q_0 donné par la proposition 4.15.b. On choisit alors q à l'aide de la proposition 4.14.b. □

Pour démontrer cette proposition nous aurons besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 4.17 *La configuration de Poncelet f_0 associée (par l'application Θ du lemme 3.2) à un quadrilatère isocèle $\ddot{q}_0$ de type lisse est de type* NCII *ou* C.
Réciproquement, chaque configuration de Poncelet f_0 de type NCII *ou* C *est l'image d'un quadrilatère isocèle $\ddot{q}_0$.*

Démonstration D'après le lemme 3.2, les paramètres $a, R, r > 0$ sont donnés par $a = a_1 a_3$, $R = a_2 a_4$ et $2r = \pm(a_4^2 - a_3^2 + a_2^2 - a_1^2)$ où $a_1 = a_3$, a_2 et a_4 sont positifs. On a forcément $R < a + r$. Réciproquement, si $R < a + r$, on peut trouver de tels $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$. Il suffit de prendre $a_1 = a_3 = \sqrt{a}$ et $a_4 \pm a_2 = \sqrt{2(r + a \pm R)}$. □

Lemme 4.18 *Pour tout quadrilatère q_0 de semipériode paire, la dérive $v(q_0)$ est parallèle à la dérive moyenne $V(q_0)$.*

Démonstration D'après le lemme 4.2.b, le quadrilatère q_0 est de type C. D'après la proposition 4.12 la dérive moyenne $V(q_0)$ est non nulle et stable par la symétrie σ_0. Notons $n = 2N$ la semipériode de q_0. Par hypothèse, $\dot{\varphi}^N(\dot{q}_0)$ est une image miroir de $\dot{q}_0$ qui se trouve sur $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$. Par le lemme 4.1, $\dot{\sigma}_0(\dot{q}_0)$ est aussi sur $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$. On en déduit l'égalité $\dot{\varphi}^N(\dot{q}_0) = \dot{\sigma}_0(\dot{q}_0)$. On a donc

$$v(q_0) = v(\dot{\sigma}_0(\dot{q}_0)) = \sigma_0(v(q_0))$$

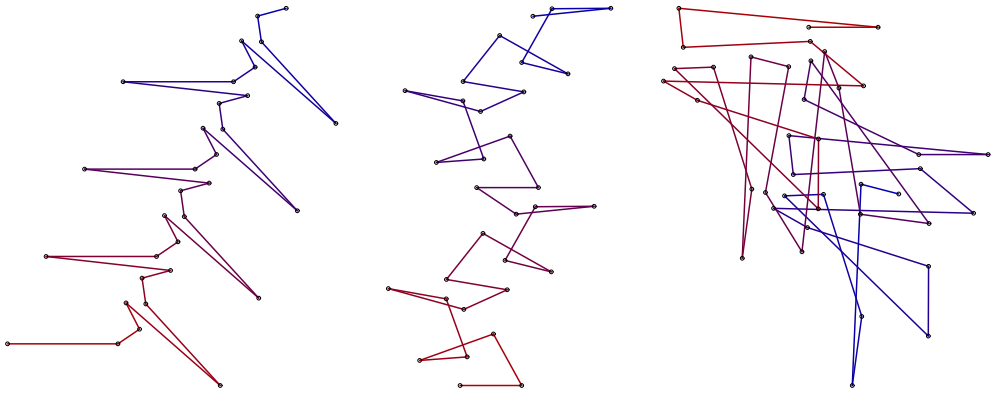


Figure 15: Quadrilatères de semipériode paire. Ici $n = 2$, 4 ou 6.
Ils sont de type C et ont presque tous une dérive non nulle.

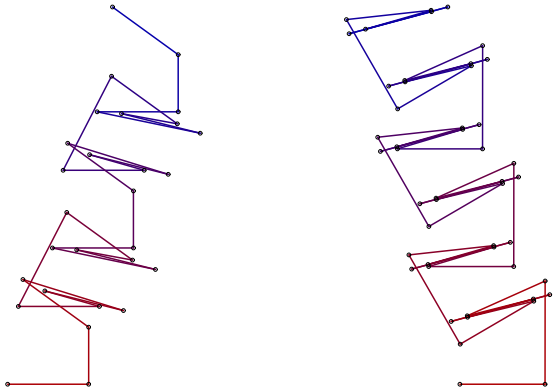


Figure 16: Quadrilatères isocèles proches du carré et de semipériode n. Ici $n = 3$ ou 4.
Pour $0 < j < n$ et $j \neq E[\frac{n}{2}]$, les quadrilatères q_j sont presque plats et contribuent peu à la dérive.

(voir figure 15). Ce qui prouve que $v(q_0)$ est sur la droite portée par le vecteur $V(q_0)$. □

Démonstration de la proposition 4.15 a) D'après la remarque du corollaire 2.11, il existe une configuration de Poncelet f_0 de type NCII, de nombre de rotation $\rho_E = \frac{1}{n}$ et avec $R = 1$ et r minuscule. On notera que, pour une telle configuration, la distance $a - R - r$ entre les deux cercles est beaucoup plus petite que r. On a $\rho_F = \frac{2}{n}$ et cette configuration est de type n-périodique. On suppose f_0 choisi dans $F_{\mathbb{R}}$ de sorte que ses coordonnées (t_1, t_2) soient proches de $(-1, 1)$. Toutes les images $f_k := \varphi_F^k(f_0)$, avec $k = 1, \ldots, n-1$ ont alors leurs coordonnées proches de $(1, -1)$ (voir figure 17).

Par le lemme 4.17, il existe donc un quadrilatère isocèle q_0 extrêmement proche du carré $(0, 1, 1 + i, i)$ qui soit de type NC et de type n-périodique (voir figure 16). Comme n est impair, tous les quadrilatères $\varphi^j(q_0)$ et $\varphi_{21}(\varphi^j(q_0))$, pour $j = 1, \ldots, n-1$, $j \neq \frac{n-1}{2}$ sont extrêmement proches d'un quadrilatère plat. Donc, dans la somme $v(q_0) = \frac{1}{n}\sum_{0 \leq j < n} \delta(\dot{\varphi}^j(\dot{q}_0))$, seuls les termes $\delta(\dot{q}_0) \simeq 1 + i$ et $\delta(\dot{\varphi}^{\frac{n-1}{2}}(\dot{q}_0)) \simeq -1 + i$ ne sont pas négligeables. On en déduit que $v(q_0) \neq 0$.

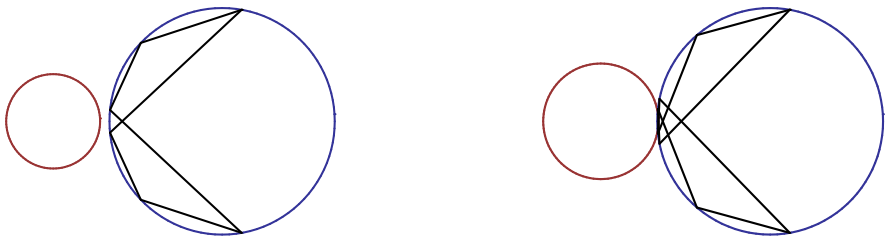


Figure 17: Configurations de Poncelet de semipériode n. Ici $n = 3$ ou 4.
Les configurations associées aux quadrilatères de la figure 16 sont semblables
avec un cercle $D_{\mathbb{R}}$ bien plus petit et des tangentes très proches de la verticale.
Le point de contact étant à droite de $D_{\mathbb{R}}$ sauf pour deux d'entre elles.

b) Il suffit de construire un trapèze q_0' qui soit de type C et de type n-semipériodique tel que $v(q_0')$ est non nul et dans la direction opposé à $V(q_0')$. En effet, comme la fonction $q_0 \to v(q_0)$, restreinte à $\dot{Q}_{\dot{q}_0'}$, est continue de moyenne égale à $V(q_0')$ et à valeurs dans la droite portée par $V(q_0')$ d'après le lemme 4.18, elle s'annule. Il suffira alors de choisir pour q_0 un zéro de cette fonction.

La construction de q_0' se fait comme en a). Notons $n = 2N$. D'après la remarque du corollaire 2.11, il existe une configuration de Poncelet f_0 de type C de nombre de rotation $\rho_E = \frac{1}{4N}$ avec $R = 1$ et r minuscule. On notera que, pour une telle configuration, la quantité positive $R + r - a$ est extrêmement plus petite que r. On a $\rho_F = \frac{1}{4N}$ et cette configuration est de type $2N$-semipériodique. Par le lemme 4.17, il existe donc un quadrilatère isocèle $q_0' = (A_1', A_2', A_3', A_4')$ de type C, de type $2N$-semipériodique et extrêmement proche du carré $(0, 1, 1 + i, i)$. On peut supposer ce choix fait de sorte que $a_2 > a_4$. On a alors $a_2 = M$.

Comme le vecteur $V(q_0')$ fait un angle aigu avec les deux côtés $A_1'A_2'$ et $A_3'A_4'$, ce vecteur $V(q_0')$ a un argument proche de $-\pi/2$ (voir figure 16). D'autre part, tous les quadrilatères $\varphi^j(q_0')$ et $\varphi_{21}(\varphi^j(q_0'))$, pour $0 < j < 2N$ et $j \neq N$, sont extrêmement proches d'un quadrilatère plat. Dans la somme $v(q_0') = \frac{1}{2N} \sum_{0 \leq j < 2N} \delta(\dot{\varphi}^j(\dot{q}_0'))$, seuls les termes $\delta(\dot{q}_0) \simeq 1 + i$ et $\delta(\dot{\varphi}^N(\dot{q}_0')) = \dot{\sigma}_0(\delta(\dot{q}_0'))$ ne sont pas négligeables. Donc $v(q_0')$ est non nul et est dans la direction opposée à $V(q_0')$. □

5 La dynamique sur Q

Nous étudions dans cette partie l'équation homologique associée au pliage cyclique. Celle-ci nous permettra de montrer que la suite $A_n - n\, v(q_0)$ est bornée pour presque tout quadrilatère q_0 et non bornée pour un ensemble générique de quadrilatères. Ceci nous permettra aussi d'expliquer les figures 4 et 5.

5.1 Le système dynamique fibré

Pour tenir compte du phénomène de dérive, nous introduisons le *pliage cyclique recentré* c'est-à-dire la transformation $q_0 \to \varphi(q_0) - V(q_0)$. Elle préserve les fermés $Q_{q_0} := \{q \in Q \ / \ \dot{q} \in \dot{Q}_{\dot{q}_0}\}$. Bien sûr, lorsque q_0 est de type NC, pliage cyclique et pliage cyclique recentré coïncident.

Lemme 5.1 *Soient q_0 un quadrilatère de type lisse et de type non périodique et $V(q_0)$ sa dérive moyenne. Le pliage cyclique recentré $q \mapsto \varphi(q) - V(q_0)$ sur Q_{q_0} est analytiquement conjugué au système dynamique $\varphi_{\mathbf{a}}$ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ donné par*

$$\varphi_{\mathbf{a}}(x, v) = (x + \rho_{\mathbf{a}}, v + f_{\mathbf{a}}(x)) \ . \tag{35}$$

où $\rho_{\mathbf{a}} = 2\rho_E$ et où la fonction $f_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est analytique de moyenne nulle et est la restriction à $\mathbb{R}$ d'une fonction méromorphe 1-périodique sur $\mathbb{C}$ et non holomorphe.

Démonstration Le pliage cyclique φ est un système dynamique fibré. Autrement dit, si on identifie Q à $\dot{Q} \times \mathbb{C}$ par $q_0 \simeq (\dot{q}_0, A_1)$ on a

$$\varphi(\dot{q}_0, v) = (\dot{\varphi}(\dot{q}_0), v + \delta(\dot{q}_0)) \ .$$

D'après les lemmes 2.9 et 3.4, la paramétrisation $x \to \dot{q}(x) = u_0 \ \Theta'^{-1}(\gamma_+(4K\,x))$ de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$ vérifie $\dot{\varphi}(\dot{q}(x)) = \dot{q}(x+\rho_{\mathbf{a}})$. Si on pose $f_{\mathbf{a}}(x) := \delta(\dot{q}(x)) - V(q_0)$, le pliage cyclique recentré devient un système dynamique sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ donné par (35).

Comme δ est une fonction rationnelle sur $E_{\mathbb{C}}$, $f_{\mathbf{a}}$ est un fonction méromorphe bipériodique sur $\mathbb{C}$. Si $f_{\mathbf{a}}$ était holomorphe, elle serait constante et l'angle θ_1 serait aussi constant sur $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$. Contradiction. □

Remarques - La constante $V(q_0)$ a été choisie pour que la moyenne de $f_{\mathbf{a}}$ soit nulle.
- On peut donner une formule explicite pour la fonction $f_{\mathbf{a}}$:
il existe $\rho_j \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, pour $1 \le j \le 4$ tels que, pour tout x,

$$f_{\mathbf{a}}(x) = \sum_{1 \le j \le 4} \pm a_j e^{i\,\mathrm{am}(4K(\rho_j + (-1)^j x))} - V(q_0) \ . \tag{36}$$

En effet, cela résulte du lemme 4.8 et des égalités (12), (25) et (30).

On peut aussi préciser les signes et les valeurs des constantes ρ_j, cela ne sera pas utile. Il résulte de cette formule que *la fonction $f_{\mathbf{a}}$ a des pôles simples qui sont portés par les droites* $\mathrm{Im}(z) = \frac{(2n+1)K'}{4K}$ *avec $n \in \mathbb{Z}$.*

5.2 L'équation homologique

L'étude de ce système dynamique fibré $\varphi_{\mathbf{a}}$ est, bien sûr, basé sur les séries de Fourier. Précisons tout d'abord les propriétés diophantiennes qui nous seront utiles.

Définition 5.2 *On note* $D := \{\rho \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \ / \ \liminf_{n\to\infty} d(n\rho,0)^{\frac{1}{n}} = 1\}$ *et*
$L := \{\rho \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \ / \ \forall j, \ell \in \mathbb{Z}^*, \ on\ a \liminf_{n\in\ell\mathbb{N}+j} d(n\rho,0)^{\frac{1}{n}} = 0\}$.

Remarques - Les éléments de D ont de bonnes propriétés diophantiennes : ils sont mal approchables par des rationnels. Le complémentaire de D a une mesure de Lebesgue nulle.
- Les éléments non rationnels de L sont des nombres de Liouville : ils sont très bien approchables par des rationnels. L'ensemble L est générique.

La proposition 1.5 sera une conséquence de la proposition suivante qui décrit le comportement d'un système dynamique fibré au dessus d'une rotation irrationnelle.

Proposition 5.3 *Soient* $\rho \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *un irrationnel et* $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *une fonction analytique de moyenne nulle qui est la restriction à* $\mathbb{R}$ *d'une fonction méromorphe* 1*-périodique sur* $\mathbb{C}$ *et non holomorphe. Soit* φ_f *le système dynamique sur* $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ *donné par*

$$\varphi_f(x,v) = (x+\rho, v+f(x)) \ . \tag{37}$$

a) Si ρ *est dans* D*, les orbites de* φ_f *sont denses sur une courbe analytique réelle compacte.*
b) Si ρ *est dans* L*, les orbites de* φ_f *ne sont pas bornées.*
c) Si φ_f *a une orbite bornée, les orbites de* φ_f *sont denses sur une courbe* C^0 *compacte.*

Le corollaire suivant, analogue au corollaire 1.6, répond à la conjecture de [4] p.222. Cette conjecture est donc presque sûrement vraie et génériquement fausse !

Corollaire 5.4 *a) Pour presque tout quadrilatère isocèle* q_0 *de type* NC*, la suite* q_n *est dense sur une courbe analytique bornée* $\mathcal{C}$*.*
b) Pour un ensemble générique de quadrilatères isocèles q_0 *de type* NC*, la suite* q_n *n'est pas bornée.*

Démonstration de la proposition 1.5 et du corollaire 5.4 Comme D^c est de mesure nulle et que L est générique, cela résulte directement du lemme 5.1 et de la proposition 5.3 appliquée à la fonction $f_{\mathbf{a}}$. Le seul point à vérifier est qu'une assertion vraie pour presque tout $\rho_{\mathbf{a}}$ (resp. pour $\rho_{\mathbf{a}}$ générique) est aussi vraie pour presque tout $\mathbf{a}$ (resp. pour $\mathbf{a}$ générique). Cela résulte de ce que l'application $\mathbf{a} \to \rho_{\mathbf{a}}$ est analytique réelle, non constante, et donc ouverte en dehors d'une hypersurface. □

Corollaire 5.5 *Lorsque* q_0 *est un quadrilatère de type lisse et de type non périodique dont les sommets sont algébriques sur* $\mathbb{Q}$*, la suite* $q_n - n\,v(q_0)$ *est dense sur une courbe analytique bornée.*

Démonstration D'après la formule (13), ρ est le quotient de deux logarithmes elliptiques associés à des points algébriques de la courbe elliptique $\ddot{Q}$. Il résulte de [9] qu'un tel ρ appartient à D (mieux, ρ est diophantien, voir [6]). □

Pour démontrer la proposition 5.3 , nous aurons besoin des deux lemmes suivants. Le premier contrôle les coefficients de Fourier de f.

Lemme 5.6 *Soit* $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi nx}$ *une fonction analytique qui est la restriction à* $\mathbb{R}$ *d'une fonction méromorphe* 1*-périodique sur* $\mathbb{C}$ *et non holomorphe. Alors, on a*

$$\limsup_{n\to\pm\infty} |c_n|^{\frac{1}{|n|}} < 1 \text{ et il existe } j, \ell \in \mathbb{Z}^* \text{ tels que } \liminf_{n\in\ell\mathbb{N}+j} |c_n|^{\frac{1}{n}} > 0 \, .$$

Démonstration C'est classique. Plus précisément, on a

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| \, |n|^{1-\kappa} e^{|n| H} < \infty \text{ et} \tag{38}$$

$$\text{il existe } j, \ell \in \mathbb{Z}^* \text{ tels que } \inf_{n\in\ell\mathbb{N}+j} |c_n| \, |n|^{1-\kappa} e^{|n| H} > 0 \tag{39}$$

où H est la distance à l'axe réel d'un pôle de f le plus proche, et κ l'ordre maximum d'un tel pôle. □

Le deuxième lemme est une variante d'un lemme de Furstenberg (voir [10], ou [12] p.135).

Lemme 5.7 *Soient* $N \geq 1$, $\rho \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *un irrationnel,* $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^N$ *une fonction continue et* φ_f *le système dynamique sur* $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N$ *donné par (37).*
a) Si φ_f *a une orbite bornée, alors l'équation homologique*

$$g(x+\rho) - g(x) = f(x) \tag{40}$$

a une solution $g : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^N$ *continue.*
b) Réciproquement, si l'équation homologique a une solution g *de classe* C^s*, avec* $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$*, alors* φ_f *est* C^s*-conjugué à* φ_0*. En particulier, chaque orbite de* φ_f *est dense dans une courbe de classe* C^s*.*

Remarques - Si l'équation (40) a une solution L^2, celle-ci est unique à constante près.
- Si l'équation (40) a une solution g dans L^∞ cette solution est continue. En effet, dans ce cas, presque toutes les orbites de φ_f sont bornées.

Démonstration a) On peut supposer $N = 1$. Si la suite $\varphi_f^n(x_0, v_0)$ est bornée pour $n \geq 0$, son ensemble ω-limite est un compact F de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ tel que $\varphi_f(F) = F$. Par minimalité de la rotation irrationnelle, F rencontre toutes les fibres $\{x\} \times \mathbb{R}$. Notons U la composante connexe du complémentaire F^c qui n'est pas bornée inférieurement. On note alors $g(x) := \sup\{t \in \mathbb{R} \ / \ (x,t) \in U\}$. La fonction g est semicontinue inférieurement. L'égalité $\varphi_f(U) = U$ assure que g est une solution de l'équation homologique (40). En remplaçant f par $-f$, on trouve une solution semicontinue supérieurement de l'équation homologique. Par unicité, ces deux solutions sont égales à constante près. L'équation homologique a donc une solution continue.

b) La formule $\psi_g(x,v) = (x, v - g(x))$ définit un homéomorphisme de classe C^s de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N$ tel que $\psi_g \circ \varphi_f \circ \psi_g^{-1} = \varphi_0$ où $\varphi_0(x,v) = (x+\rho, v)$. □

Démonstration de la proposition 5.3 On utilise le lemme 5.7. Si elle existe, la solution g de l'équation homologique est unique à constante près et a pour coefficients de Fourier $d_n = \dfrac{c_n}{e^{2i\pi n\rho} - 1}$, pour $n \neq 0$.

a) Si ρ est dans D, on a

$$\limsup_{n\to\pm\infty} |d_n|^{\frac{1}{|n|}} \leq \frac{\limsup\limits_{n\to\pm\infty} |c_n|^{\frac{1}{|n|}}}{\liminf\limits_{n\to\pm\infty} d(n\rho,0)^{\frac{1}{|n|}}} < 1$$

et l'équation homologique a une solution analytique.

b) Si ρ est dans L, on choisit j et ℓ comme dans la définition 5.2, on a alors

$$\liminf_{n\in\ell\mathbb{N}+j} |d_n|^{\frac{1}{|n|}} \geq \frac{\liminf\limits_{n\in\ell\mathbb{N}+j} |c_n|^{\frac{1}{|n|}}}{\liminf\limits_{n\in\ell\mathbb{N}+j} d(n\rho,0)^{\frac{1}{|n|}}} = \infty \ .$$

La suite d_n n'est donc pas bornée et l'équation homologique n'a pas de solution continue.

c) Cela résulte directement du lemme 5.7. □

5.3 Les orbites bornées

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de la section précédente.

Lemme 5.8 *Pour un quadrilatère q_0 de type non périodique, le fait que la suite q_n soit bornée ne dépend que des côtés $a_1, \ldots, a_4$.*

Ce lemme n'est plus vrai pour des quadrilatères de type périodique (corollaire 4.16).

Démonstration On peut supposer que q_0 est de type lisse. L'assertion résulte alors du lemme 5.1 et de la proposition 5.3.c. □

Le lemme suivant étudie les propriétés de régularité de la courbe $\mathcal{C}$ lorsqu'elle existe.

Lemme 5.9 *Il existe un ensemble dense de quadrilatères (resp. de quadrilatères isocèles) q_0 tels que la suite $q_n - nv(q_0)$ est bornée et la courbe $\mathcal{C}$ adhérence de cette suite n'est nulle part de classe* C^1.

Démonstration C'est un raffinement de la démonstration de la proposition 5.3 dont on reprend les notations. Pour tous $H > 1$, $\kappa \in \mathbb{N}$, $j, \ell \in \mathbb{Z}^*$, on introduit un ensemble dense DL d'irrationnels qui ne rencontre ni D ni L :

$$DL = DL_{H,\kappa,j,\ell} := \{\rho \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \ / \ \sum_{n\geq 1} |n|^{\kappa-1} \frac{e^{-|n|H}}{d(n\rho,0)} < \infty \ \text{ et } \ \sup_{n\in\ell\mathbb{N}+j} |n|^{\kappa} \frac{e^{-|n|H}}{d(n\rho,0)} = \infty \ \}$$

Cet ensemble DL est dense car il contient les réels de la forme $\rho = \frac{1}{j} + \sum_{h\geq 0} N_h B^{-k_h}$ où B est un entier premier, $B \equiv 1 \bmod j\ell$, k_h est une suite strictement croissante d'entiers telle que la suite $k_{h+1} - \frac{jH}{\log B} B^{k_h} + (\kappa - \frac{3}{2})k_h$ est bornée et où $N_h \in \{1, \ldots, B-1\}$. Avec un tel choix, ce sont les entiers $n_h := j\, B^{k_h}$ qui jouent un rôle dominant dans la somme et dans le sup ci-dessus.

Si la fonction f vérifie (38) et (39) et si ρ est dans $DL_{H,\kappa,j,\ell}$ alors l'équation homologique (40) a une solution g continue avec g non Lipschitzienne. On a, en effet, $\sum |d_n| < \infty$ et $\sup |n\, d_n| = \infty$. Cette solution g est donc nulle part de classe C^1.

Prenons $\rho = \rho_{\mathbf{a}}$ et $f = f_{\mathbf{a}}$. Ceci prouve notre assertion pour un ensemble dense de paramètres $(H, \rho_{\mathbf{a}})$, c'est à dire pour un ensemble dense de paramètre $(k, \rho_{\mathbf{a}})$. On veut en déduire que cette assertion est aussi vraie pour un ensemble dense de paramètres $\mathbf{a}$. Cela résulte de ce que, si on fixe k, l'application analytique réelle $\mathbf{a} \to \rho_{\mathbf{a}}$ est encore non constante (voir la dernière remarque de la section 2.4.3), et donc ouverte en dehors d'une hypersurface. □

5.4 Les symétries des figures

On explique dans cette section les symétries des figures 4 à 7.

Les symétries que l'on observe pour tous les quadrilatères dans les figures 4 à 7 sont expliquées par le corollaire du lemme suivant. On appelera encore symétrie la transformation de l'espace des quadrilatères induite par une symétrie de $\mathbb{R}^2$.

Lemme 5.10 *Soit q_0 un quadrilatère de type lisse, de type non périodique et tel que la suite $q_n - nv(q_0)$ est bornée.*
a) Alors cette suite $q_n - nv(q_0)$ admet une loi statistique P.
b) Si q_0 est de type NC*, on a $P = s_*(P)$ où s est une symétrie centrale.*
c) Si q_0 est de type C*, on a $P = s'_*(P)$ où s' est une symétrie par rapport à une droite parallèle à la dérive $v(q_0)$.*

Démonstration a) D'après les lemmes 5.1 et 5.7, il existe une application continue $G : \dot{Q}_{\dot{q}_0} \to \mathbb{C}$, unique à constante près telle que, pour tout $\dot{q}$ dans $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$, on a

$$G(\dot{\varphi}(\dot{q})) - G(\dot{q}) = \delta(\dot{q}) - V(q_0)\ . \tag{41}$$

L'application $\psi : \dot{Q}_{\dot{q}_0} \to Q_{q_0}$ donnée par $\psi(\dot{q}) = (\dot{q}, G(\dot{q}))$ vérifie

$$\psi \circ \dot{\varphi} = (\varphi - V(q_0)) \circ \psi\ .$$

Si on ajuste la constante pour que $\psi(\dot{q}_0) = q_0$, on obtient $P = \psi_*(\mu)$ où μ est la loi statistique de $\dot{q}_n$ (lemme 4.4).

b) Si q_0 est de type NC, par unicité de G, il existe une constante w_0 dans $\mathbb{C}$ telle que, pour tout $\dot{q}$ dans $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$, on a $G(-\dot{q}) = -G(\dot{q}) + 2\, w_0$. On a donc $\psi \circ (-Id) = s \circ \psi$ où s est la symétrie par rapport à w_0. L'égalité $(-Id)_*(\mu) = \mu$ du lemme 4.8.b prouve alors que $s_* P = P$.

c) Si q_0 est de type C, on procède de même avec les égalités $G(\dot\sigma_0(\dot q)) = \sigma_0(G(\dot q)) + 2\,w_0$, $\psi \circ \dot\sigma_0 = s' \circ \psi$ et l'égalité $(\dot\sigma_0)_*(\mu) = \mu$ du lemme 4.8.c. □

Pour $j \in \mathbb{Z}$, on note ν_j les lois statistiques des suites $A_{4n+j+2} - A_{4n+j}$. Lorsque la suite $q_n - nv(q_0)$ est bornée, on note P_j les lois statistiques des suites $A_{4n+j} - \frac{4n+j}{4} v(q_0)$. On a donc $\nu_{j+4} = \nu_j$ et $P_{j+4} = P_j$. Ce sont ces lois que l'on observe dans les figures 4 à 7.

Corollaire 5.11 *Soient q_0 un quadrilatère de type lisse et de type non périodique et $j \in \mathbb{Z}$.*
a) Si q_0 est de type NC*, on a $\nu_j = (-Id)_*(\nu_j)$.*
Si q_0 est de type C*, on a $\nu_j = (\sigma_0)_*(\nu_j)$.*
b) On suppose que la suite $q_n - nv(q_0)$ est bornée.
Si q_0 est de type NC*, on a $P_j = s_*(P_j)$ où s est une symétrie centrale.*
Si q_0 est de type C*, on a $P_j = s'_*(P_j)$ où s' est une symétrie par rapport à une droite parallèle à la dérive $v(q_0)$.*

Démonstration a) Cela résulte du lemme 4.8.b et 4.8.c car $\nu_j = (A_{j+2} - A_j)_*(\mu)$.
b) Cela résulte du lemme 5.10 car $P_j = (A_j)_*(P)$. □

Les symétries supplémentaires que l'on observe pour les quadrilatères isocèles dans les figures 4 à 7 sont expliquées par le lemme suivant.

Lemme 5.12 *Soit q_0 un quadrilatère isocèle de type lisse et de type non périodique.*
a) Alors, on a $\nu_2 = (\sigma_0)_*(\nu_1)$ et $\nu_4 = (\sigma_0)_*(\nu_3)$.
b) On suppose que la suite $q_n - nv(q_0)$ est bornée. Alors, on a $P_4 = s''_*(P_1)$ et $P_3 = s''_*(P_2)$ où s'' est une symétrie par rapport à une droite orthogonale à $u_0 = \pm\sqrt{-h(\dot q_0)}$.

Démonstration On peut supposer que $h(\dot q_0) = -1$. On utilise l'application de renumérotation $\tau : Q \to Q$ donnée par

$$\tau(A_1, A_2, A_3, A_4) = (A_4, A_3, A_2, A_1) \tag{42}$$

Comme q_0 est isocèle, cette application préserve les longueurs des côtés et on a l'égalité

$$\varphi^{-1} \circ \tau = \tau \circ \varphi\ . \tag{43}$$

On note $\dot\tau$ l'application induite sur $\dot Q$. Montrons tout d'abord l'égalité

$$\dot\tau_*(\mu) = (-\dot\sigma_0)_*(\mu)\ . \tag{44}$$

Remarquons pour cela que $\dot\tau$ est donné par l'égalité

$$\dot\tau(r_1, r_2, r_3, r_4) = -(r_3, r_2, r_1, r_4)$$

et donc laisse la fonction h invariante : $h \circ \dot\tau = h$. La transformation $\dot\tau$ est une involution de la courbe elliptique $\dot Q_1$ qui s'exprime dans les coordonnées (s_1, s_2) du lemme 3.4 par $(s_1, s_2) \mapsto (-s_2^{-1}, -s_1^{-1})$. La transformation $-\dot\sigma_0 \circ \dot\tau$ est donc donnée par $(s_1, s_2) \mapsto (s_2, s_1)$

et, comme $F_{\mathbb{R}}$ est de type NCII ou C, elle préserve les composantes connexes de $\dot{Q}_1$. On a donc $(-\dot{\sigma}_0 \circ \dot{\tau})_*(\mu) = \mu$. Ce qui prouve l'égalité (44).

a) Comme $\delta_j \circ \dot{\tau} = -\delta_{4-j}$, on a $(\sigma_0)_*(\nu_j) = \nu_{3-j}$. En particulier, on a $\nu_2 = (\sigma_0)_*(\nu_1)$ et $\nu_4 = (\sigma_0)_*(\nu_3)$.

b) On procède comme dans la démonstration du lemme 5.10, dont on reprend les notations. On vient de voir que la transformation $-\dot{\sigma}_0 \circ \dot{\tau}$ préserve $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$. Par unicité de la solution G de l'équation homologique (41), il existe une constante w_0' dans $\mathbb{C}$ telle que, pour tout $\dot{q}$ dans $\dot{Q}_{\dot{q}_0}$, on a

$$G(-\dot{\sigma}_0 \circ \dot{\tau}(\dot{q})) = -\sigma_0[G(\dot{q}) + \delta(\dot{q}) - a_4\delta_4(\dot{q})] + 2w_0' \ .$$

On a donc

$$\psi \circ (-\dot{\sigma}_0 \circ \dot{\tau}) = (s'' \circ \tau) \circ \psi$$

où s'' est définie par $s''(v) = -\sigma_0(v) + 2w_0'$. Puisque $-\sigma_0 \circ \tau$ est une involution, s'' est une symétrie par rapport à une droite orthogonale à u_0. On déduit alors de (44) l'égalité

$$\tau_*(P) = s''_*(P) \ .$$

En particulier, on a $P_4 = s''_*(P_1)$ et $P_3 = s''_*(P_2)$. □

Références

[1] Y.Benoist, D.Hulin - Itération de pliages de quadrilatères, preprint, 4 pages.

[2] F.Beukers, R.Cushman - Zeeman's monotonicity conjecture, Journal of differential equations, 143 (1998) p.191-200.

[3] H.Bos, C.Kers, F.Oort, D.Raven - Poncelet's closure theorem, Expositiones Math. 5 (1987) p.289-364.

[4] K.Charter, T.Rogers - The dynamics of quadrilateral folding, Experimental Mathematics 2 (1993) p.209-222.

[5] J.-P. Conze - Ergodicité d'une transformation cylindrique, Bull. Soc. math. France, 108 (1980) p.441-456.

[6] S.David, N.Hirata-Kohno - Recent progress on linear forms in elliptic logarithms, *in* A panorama of number theory, p. 26-37, CUP (2002).

[7] P.Duval - Elliptic functions and elliptic curves, LMS Lect. Note, CUP (1973).

[8] J.Esch, T.Rogers - Dynamics on elliptic curves arising from polygonal folding, Discrete Comput. Geom. 25 (2001) p.477-502.

[9] N.I.Fel'dman - An elliptic analog of an inequality of A.O. Gel'fond, Trans. Moscow Math. Soc. 18 (1968) p.71-84.

[10] H.Furstenberg - Strict ergodicity and transformation of the torus, Amer. Journ. Math. 83 (1961) p.573-601.

[11] P.Griffiths, J.Harris - On Cayley's explicit solution to Poncelet porism, l'Ens. Math. 24(1978) p.31-40.

[12] R.Mañe - Ergodic theory and differentiable dynamics, Ergebn. Springer (1987).

[13] H.McKean, V.Moll - Elliptic curves, CUP (1997).

[14] P.Samuel - Géométrie projective, PUF (1986).

Ecole Normale Supérieure-CNRS
45 rue d'Ulm, 75230 Paris
Yves.Benoist@ens.fr

Université Paris-Sud
Batiment 425, Orsay 91405
Dominique.Hulin@math.u-psud.fr