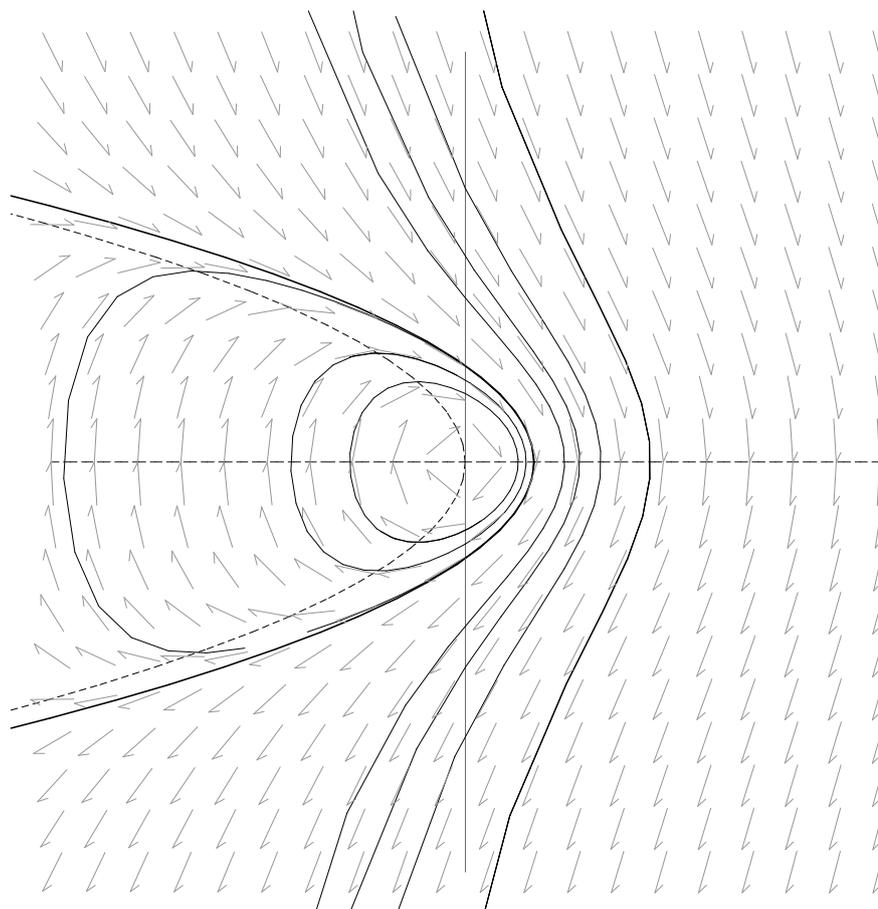


Equations différentielles ordinaires

Etudes qualitatives

Cours



M304 – L3 MFA

Université Paris-Sud

D. Hulin 2019-20

Table des matières

1	Introduction	6
A	Equations différentielles	6
B	Problème de Cauchy	8
C	Unicité	8
D	Equations autonomes	11
E	Equations d'ordre supérieur	13
2	Equations linéaires autonomes	16
A	Introduction	16
B	Résolution en dimension 1	17
C	Exponentielle de matrices	18
D	Résolution en dimension quelconque	19
E	Equations non homogènes	20
E.1	Résolution	20
E.2	Méthode de variation de la constante à l'ordre 1	22
E.3	Variation de la constante pour une équation linéaire d'ordre supérieur	23
F	Portraits de phase pour les équations linéaires en dimension quelconque	25
G	Portraits de phase linéaires en dimension 2	27
G.1	Quelques rappels d'algèbre linéaire	27
G.2	Les portraits de phase dans le plan	28
3	Le théorème de Cauchy-Lipschitz	32
A	Enoncé du théorème	32
B	Un exemple sans unicité	33
C	Cylindre de sécurité	35
D	Le théorème de Cauchy-Lipschitz	36
E	Appendice :	
	équations différentielles et coordonnées polaires	41
E.1	Relèvement de l'argument	41
E.2	Passer en polaires dans une équation différentielle	42

4	Temps de vie, solutions maximales	44
A	Uniformité du temps de vie des solutions	44
B	Le lemme des bouts	45
C	Point limite pour une équation autonome	47
5	Estimation et comparaison de solutions	49
A	Lemme de Gronwall	49
B	Temps de vie des solutions	50
C	Dépendance des solutions en fonction des conditions initiales	52
D	Dépendance par rapport au paramètre	55
6	Etudes qualitatives en dimension 1	57
A	Régionnement	57
B	Sur-solutions et sous-solutions	59
C	Comparaison avec des sur/sous-solutions larges	63
D	Entonnoirs, anti-entonnoirs	64
7	Champs de vecteurs autonomes	69
A	Flot d'un champ de vecteurs autonome	69
B	Orbites et portrait de phase	71
C	Les différents types d'orbites	72
8	Etude qualitative des champs autonomes	75
A	En dimension 2	75
B	Intégrales premières	77
C	Zones piège	79
D	Reconnaître une orbite	81
E	Orbites périodiques	84
9	Points réguliers, points singuliers	85
A	Au voisinage d'un point régulier	85
B	Au voisinage d'un point singulier : linéarisation	87
C	Etude des cols en dimension 2	90
10	Le théorème de Lyapunov	95
A	Ensembles limites futurs et passés	95
B	Stabilité d'un point singulier	97
	B.1 Stabilité	97
	B.2 Stabilité pour un champ linéaire	98
C	Fonctions de Lyapunov	100
D	Puits et sources	102
E	Bassin d'attraction d'un point singulier	104

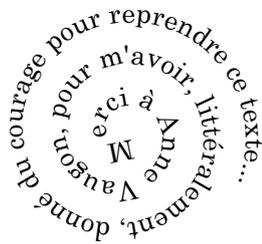
11 La méthode d'Euler	107
A Solution approchée	107
B Deuxième preuve de Cauchy-Lipschitz (local)	109
C Le théorème de Cauchy-Péano-Arzéla	110
12 Equations linéaires non autonomes	112
A Existence, unicité et temps de vie	112
B Méthode de variation de la constante	113
B.1 Résolution (ou pas) de l'équation homogène	113
B.2 Variation de la constante	113
B.3 Equations linéaires d'ordre supérieur	114
C Résolvante	116
C.1 Définitions et propriétés de la résolvante	116
C.2 La variation de la constante avec la résolvante	118
D Le Wronskien	119

Bibliographie succincte

Hirsch, Smale, Devaney Differential Equations, Dynamical Systems,
and an Introduction to Chaos

Demailly Analyse numérique et équations différentielles

Gonnord, Tosel Calcul différentiel : thèmes d'analyse pour l'agrégation



1. Introduction

L'objet de ce cours est l'étude qualitative d'une équation différentielle : que peut-on dire de ses solutions lorsqu'on ne sait pas la résoudre explicitement (ce qui est la règle plutôt que l'exception) ?

Les questions que l'on se posera concernent l'existence et l'unicité des solutions, l'étude de leur domaine de définition, le comportement des solutions au bornes du domaine, la stabilité des solutions par perturbations...

Tout ceci constitue un premier pas vers un champ mathématique plus large : la théorie des systèmes dynamiques.

Dans ce chapitre introductif nous posons les premières définitions, et formulons plus précisément les premières questions à aborder.

A Equations différentielles

On se donne $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. Une solution de l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$, que l'on se permettra également de noter de façon abrégée

$$x' = f(t, x), \quad (*_f)$$

est une application $x : I \subset J \rightarrow U$ de classe C^1 , où $I \subset J$ est un intervalle ouvert, et telle que pour tout $t \in I$ on ait l'égalité $x'(t) = f(t, x(t))$.

Exercice 1.1 Si la donnée f est de classe C^k ($k \geq 1$), toute solution de l'équation différentielle $(*_f)$ est de classe C^{k+1} sur son intervalle de définition.

Interprétation géométrique :

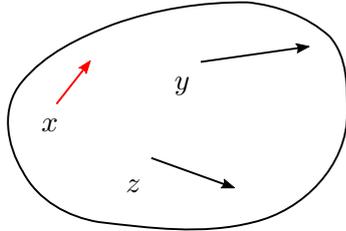
• Une application $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est aussi appelée champ de vecteurs. Penser que

- la première variable $t \in J$ correspond au temps
- la seconde variable $x \in U$ correspond à la position.

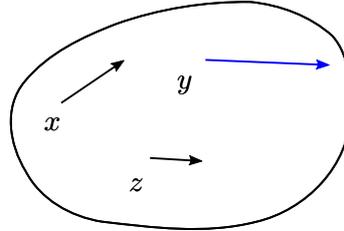
• En chaque instant $t \in J$, et en chaque point $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, on dispose d'un vecteur $f(t, x) \in \mathbb{R}^n$. On peut s'imaginer que le vecteur $f(t, x)$ indique le vent (vitesse et direction) à l'instant t et au point x . Résoudre l'équation différentielle $(*_f)$, c'est déterminer le comportement $t \rightarrow x(t)$ d'une particule

portée par le vent, et dont le vecteur vitesse en chaque instant t est donc $x'(t) = f(t, x(t))$.

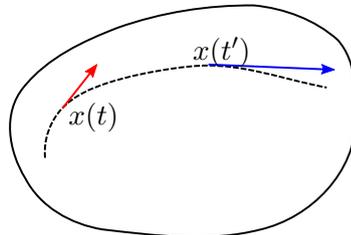
La trajectoire de cette particule est $\{(x(t) \mid t \in I)\} \subset U$, avec $x : I \rightarrow U$ solution de $(*_f)$.



une photo de U au temps $t...$



... puis au temps t'



une trajectoire

• Intéressons nous maintenant au graphe $\{(t, x(t)) \mid t \in I\} \subset J \times U$ d'une solution.

L'application $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ nous donne, en chaque point $(t, x) \in J \times U$, un "élément de contact" : c'est la droite affine de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ passant par (t, x) et de vecteur directeur $(1, f(t, x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Une application $x : I \subset J \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^1 est solution de $(*_f)$ si et seulement si son graphe $\{(t, x(t)) \mid t \in I\}$ admet pour tangente, en chaque point $(t, x(t))$ ($t \in I$), l'élément de contact en ce point. Voyons un exemple.

Exemple 1.2 Le cas de la dimension 1 (équation différentielle scalaire) est le plus propice aux dessins. Intéressons-nous pour fixer les idées à l'équation différentielle scalaire

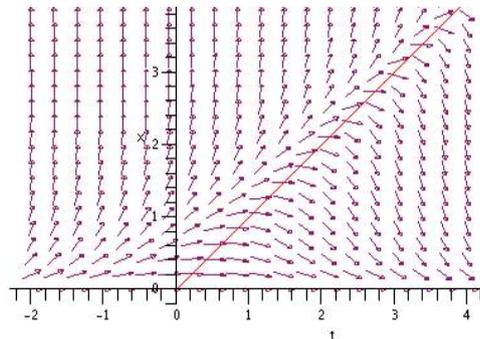
$$x' = x(x - t) = f(t, x).$$

Nous dessinons ci-contre l'isocline

$$\mathcal{I}_0 = \{(t, x) \mid f(t, x) = 0\}$$

(voir le paragraphe 6.A : ici, il s'agit de la réunion de la diagonale et de l'axe des abscisses), et nous indiquons les éléments de contact.

Avec un peu d'imagination, on voit se dessiner les graphes des solutions !



L'étude qualitative des équations différentielles scalaires, pour lesquelles on dispose d'outils spécifiques (théorèmes de comparaison), fera l'objet du chapitre 6.

B Problème de Cauchy

Dans ce cours nous intéresserons essentiellement au problème de Cauchy.

Définition 1.3 Problème de Cauchy

Soit $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. Résoudre l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ ($*_f$) avec condition initiale (ou condition de Cauchy)

$$(t_0, x_0) \in J \times U$$

c'est chercher toutes les solutions $x : I \subset J \rightarrow U$ de ($*_f$) telles que $t_0 \in I$ et $x(t_0) = x_0$, où $I \subset J$ est un sous-intervalle ouvert inconnu.

La plupart du temps, on ne saura pas résoudre explicitement l'équation différentielle ($*_f$). On cherchera alors à en mener l'étude qualitative, c'est-à-dire à obtenir le plus de renseignements possible sur les solutions de ($*_f$). On commencera bien sûr par se poser la question de l'existence, puis de l'unicité des solutions au problème de Cauchy.

Pour toute donnée continue f , tout problème de Cauchy admet une solution.

Théorème 1.4 (de Cauchy-Péano-Arzéla 11.11)

Soit $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue. Pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in J \times U$, le problème de Cauchy correspondant pour ($*_f$) possède des solutions.

C Unicité

Nous nous intéresserons pour l'essentiel aux équations différentielles $x' = f(t, x)$ où l'application continue f est suffisamment régulière, par exemple de classe C^1 . Dans ce cas, nous verrons qu'il y a non seulement existence, mais également unicité au problème de Cauchy. C'est ce qu'affirme le théorème de Cauchy-Lipschitz. Nous commençons par définir l'unicité au problème de Cauchy, puis nous donnons un premier énoncé de ce théorème fondamental.

La restriction à un sous-intervalle ouvert contenant t_0 d'une solution au problème de Cauchy de condition initiale (t_0, x_0) est encore une solution au même problème de Cauchy. Pour autant, nous ne souhaitons pas considérer ces deux solutions comme différentes!

Cette constatation nous amène à formuler la définition suivante.

Définition 1.5 Unicité au problème de Cauchy

Soit $f : J \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. On dit qu'il y a unicité au problème de Cauchy pour $(*_f)$ lorsque deux solutions de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$, de même condition initiale $(t_0, x_0) \in J \times U$, coïncident sur leur domaine commun de définition.

En d'autres termes, on a unicité au problème de Cauchy lorsque pour deux solutions

$$x_1 : I_1 \subset J \rightarrow U \quad \text{et} \quad x_2 : I_2 \subset J \rightarrow U$$

de $(*_f)$ définies sur des intervalles ouverts I_1 et I_2 contenant t_0 et telles que $x_1(t_0) = x_2(t_0)$, alors les restrictions

$$x_1|_{I_1 \cap I_2} = x_2|_{I_1 \cap I_2}$$

de ces solutions à l'intersection $I_1 \cap I_2$ sont égales.

On a dit que, pour f continue, tout problème de Cauchy admet des solutions. Si f est plus régulière, par exemple si f est de classe C^1 (cette hypothèse nous suffira pour traiter la plupart des exemples intéressants), on aura de plus unicité au problème de Cauchy. C'est ce qu'affirme le théorème de Cauchy-Lipschitz, que nous citons un peu plus bas. On réfère à 3.6 pour l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz sous une hypothèse de régularité moindre que C^1 , qui englobera notamment le cas des équations différentielles linéaires à coefficients continus (chapitre 12).

On verra dans le paragraphe 3.B un exemple où f n'est pas assez régulière, et où il n'y a donc pas unicité au problème de Cauchy.

Avant d'énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz, introduisons la notion de solution maximale.

Définition 1.6 Solutions maximales

Une solution $x : I \rightarrow U$ de $(*_f)$ est maximale si, lorsque $x_1 : I_1 \rightarrow U$ est une autre solution de $(*_f)$ qui prolonge x , i.e. telle que $I \subset I_1$ et $x_1|_I = x$, alors $I = I_1$.

Qu'il y ait ou non unicité au problème de Cauchy, toute solution de $(*_f)$ se prolonge en une solution maximale. Dans le cas général, c'est l'objet de l'exercice 1.12. Lorsqu'il y a unicité au problème de Cauchy, on a le résultat plus fort suivant. La preuve est élémentaire.

Lemme 1.7 Existence et unicité de solutions maximales

Soit $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue. On suppose qu'il y a unicité au problème de Cauchy pour $(*_f)$.

Alors, pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in J \times U$, il existe une unique solution maximale $x_{\max} : I_{\max} \rightarrow U$ de $(*_f)$ telle que $x_{\max}(t_0) = x_0$.

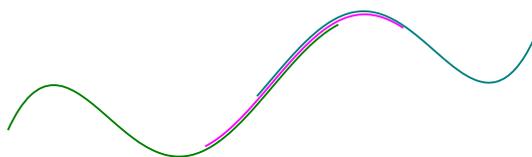
De plus, toute autre solution de $(*_f)$ de même condition initiale (t_0, x_0) est obtenue comme restriction de x_{\max} à un sous-intervalle ouvert de I_{\max} contenant t_0 .

Preuve La solution maximale cherchée sera obtenue en “recollant” toutes les solutions de $(*_f)$ de condition initiale (t_0, x_0) . On procède comme suit.

On considère la famille $(x_a : I_a \rightarrow U)_{a \in A}$ de toutes les solutions de $(*_f)$ de condition initiale (t_0, x_0) . Puisqu’il y a unicité pour le problème de Cauchy on sait que, pour tous $a, b \in A$, on a $x_a \equiv x_b$ sur $I_a \cap I_b$. On introduit donc l’intervalle $I_{\max} = \cup_a I_a$ et l’on définit, pour tout $t \in I_{\max}$, $x_{\max}(t)$ comme étant la valeur commune $x_a(t)$ de toutes les solutions x_a ($a \in A$) pour lesquelles $t \in I_a$.

L’intervalle I_{\max} est ouvert comme réunion d’ouverts.

La fonction x_{\max} est bien définie. C’est une solution de $(*_f)$ (propriété locale) de condition initiale (t_0, x_0) . Par construction, elle est maximale et toute solution de $(*_f)$ de même condition initiale s’obtient par restriction de x_{\max} à un sous-intervalle ouvert de I_{\max} contenant t_0 . \square



Recollement des solutions pour construire la solution maximale

Théorème 1.8 (de Cauchy-Lipschitz, voir également 3.6)

Lorsque l’application $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 , il y a existence et unicité au problème de Cauchy pour $(*_f)$.

Dans ce cas, pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in J \times U$, le problème de Cauchy correspondant admet une unique solution maximale, et toute autre solution de même condition initiale s’obtient par restriction de cette solution maximale à un sous-intervalle ouvert contenant t_0 .

Nous serons à même de caractériser les solutions maximales au chapitre 4. Parmi elles, faciles à repérer, il y a les solutions globales.

Définition 1.9 Solutions globales

Soit $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$. On dit qu’une solution x de $(*_f)$ est globale si elle est définie sur J tout entier. Elle est alors maximale.

Exemple 1.10 L’équation différentielle $x' = x^2$ (avec ici $J = U = \mathbb{R}$) admet pour solutions maximales :

1. la solution identiquement nulle, qui est globale
2. les fonctions $t \rightarrow \frac{1}{c-t}$ définies sur $] -\infty, c[$ ou sur $]c, \infty[$ ($c \in \mathbb{R}$).

Parmi les solutions maximales, une seule est donc globale.

Exercice 1.11 Equations à variables séparées

1. Trouver les solutions maximales de l'équation différentielle

$$x'(t) = (t + 1) \sin(x(t)).$$

On fera intervenir les primitives de la fonction $g : x \rightarrow \frac{1}{\sin x}$ (pour $x \in]k\pi, (k + 1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$).

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ continue. On considère l'équation différentielle (E) $x' = f(x)$. Montrer (sans utiliser de théorème général) qu'il y a existence et unicité pour le problème de Cauchy et discuter, selon la nature des intégrales $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(x)} dx$ et $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(x)} dx$, le domaine de définition d'une solution maximale.

Exercice 1.12 Existence de solutions maximales

Soit $f : J \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue.

Pour simplifier la démonstration, on ne s'intéressera en un premier temps aux solutions de $(*_f)$ que dans le futur. On se permet donc, exceptionnellement, de considérer des "solutions" $x : [a, b[\rightarrow U$ de l'équation différentielle qui ne sont pas définies sur un intervalle ouvert (x est alors seulement dérivable à droite en a).

1. On se donne $x_0 : [a, b_0[\subset J \rightarrow U$ une solution de l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$ $(*_f)$.
 - (a) Construire récursivement une suite de solutions $x_k : [a, b_k[\rightarrow U$ ($k \geq 0$) de sorte que x_{k+1} prolonge x_k , et avec $b_{k+1} \geq \sup(b_k, B_k - 1/k)$ si $B_k < \infty$, et $b_{k+1} \geq \sup(b_k, k)$ si $B_k = +\infty$, où

$$B_k = \sup\{\beta, x_k \text{ se prolonge en une solution définie sur } [a, \beta]\}.$$
 - (b) En déduire que x_0 se prolonge en une solution $x_+ : [a, b_+[\rightarrow U$ qui est maximale à droite (c'est-à-dire qui ne se prolonge pas en une solution définie sur un intervalle $[a, b_+ + \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$).
2. En déduire que toute solution de $(*_f)$ se prolonge en une solution maximale.

D Equations autonomes

L'étude des équations différentielle autonomes fera l'objet du chapitre 2 pour le cas linéaire, et des chapitres 8, 9 et 10 dans le cas général.

Définition 1.13 Une équation différentielle $x' = f(x)$, où l'application continue (ou champ de vecteurs) $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ne dépend pas du temps, est une équation autonome.

Le fait que l'équation soit autonome se traduit par la propriété fondamentale d'invariance suivante.

Lemme 1.14 *Si $t \in I \rightarrow x(t) \in U$ est solution (resp. solution maximale) de l'équation autonome $x' = f(x)$ ($*_f$) toute translatée $t \in I+a \rightarrow x(t-a) \in U$, pour $a \in \mathbb{R}$, est également solution (resp. solution maximale) de ($*_f$).*

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Nous supposons dans la suite de ce paragraphe qu'il y a unicité au problème de Cauchy pour $x' = f(x)$ ($*_f$). Rappelons que le théorème de Cauchy-Lipschitz 3.6 assure que c'est le cas si l'application f est suffisamment régulière, par exemple de classe C^1 .

Définition 1.15 **Orbite d'une équation autonome**

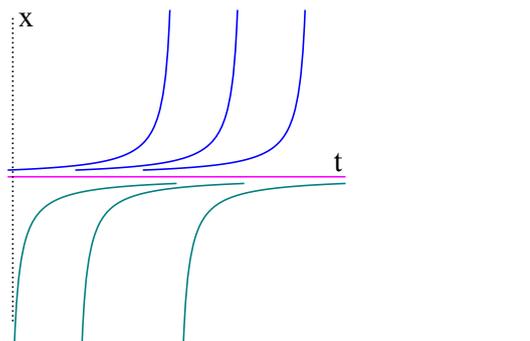
*Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. L'orbite de x_0 est l'image d'une quelconque solution maximale $t \rightarrow x(t)$ de ($*_f$) passant par ce point x_0 . On l'appelle également la trajectoire de x_0 , ou encore la courbe intégrale du champ f passant par x_0 .*

Proposition-Définition 1.16 **Portrait de phase d'une équation autonome**

Il suivra du théorème de Cauchy-Lipschitz que les orbites du champ "régulier" autonome f forment une partition de U (voir la proposition 7.12).

Le portrait de phase du champ de vecteurs autonome f est la partition de U constituée des orbites de f .

Lorsqu'on dessine le portrait de phase, on perd toute information sur la façon dont sont parcourues les trajectoires. Voir ci-dessous, pour l'équation scalaire autonome $x' = x^2$, les graphes des solutions maximales (à gauche dans $J \times U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) et le portrait de phase (à droite dans $U = \mathbb{R}$).



Pour une équation scalaire, on y perd !

Par contre, ne serait-ce qu'en dimension 2, il est délicat de tracer les graphes des solutions maximales, ces graphes vivant alors dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$. Par contre, une fois l'étude qualitative achevée, on dessine facilement le portrait de phase dans \mathbb{R}^2 . Voir le paragraphe 2.G.2 pour les portraits de phase des équations linéaires autonomes en dimension 2.

Se ramener à une équation autonome

On peut remarquer qu'en rajoutant une variable (à savoir le temps), et donc en augmentant la dimension, toute équation différentielle peut se ramener à une équation différentielle autonome. En effet :

Si $t \in I \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$ est solution de $x'(t) = f(t, x(t))$ ($*_f$) de condition initiale (t_0, x_0) , alors $t \in I \rightarrow y(t) := (t, x(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est solution de

$$y'(t) = (1, x'(t)) = (1, f(t, x(t))) = (1, f(y(t))) =: F(y(t)),$$

de condition initiale $y(t_0) = (t_0, x_0)$.

Réciproquement, si $t \rightarrow y(t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est solution de $y'(t) = (1, f(y(t)))$ de condition initiale $y(t_0) = (t_0, x_0)$, on constate que $t \rightarrow y(t)$ est de la forme $t \rightarrow y(t) = (t, x(t))$ avec x solution de ($*_f$) de condition initiale $x(t_0) = x_0$.

E Equations d'ordre supérieur

Nous n'avons considéré jusqu'ici que des équations différentielles d'ordre 1, c'est-à-dire de la forme $x' = f(t, x)$. Nous allons maintenant introduire les équations différentielles d'ordre supérieur, et voir qu'elles se ramènent par changement de fonction inconnue à une équation d'ordre 1.

Soient $k \geq 1$ et une application continue $f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}^n$. On lui associe l'équation différentielle d'ordre k

$$x^{(k)}(t) = f(t; x(t), \dots, x^{(k-1)}(t)). \quad (*_f)$$

Les solutions de ($*_f$) sont des applications $t \in I \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$ de classe C^k définies sur un intervalle ouvert, une condition initiale correspondant désormais à la donnée des valeurs

$$(x(t_0), \dots, x^{(k-1)}(t_0))$$

de la solution x et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $k - 1$ à l'instant $t_0 \in I$.

Le lemme suivant nous dit que nous pouvons nous contenter d'étudier les équations différentielles d'ordre 1.

Lemme 1.17 *Toute équation différentielle d'ordre k se ramène par changement de fonction inconnue à une équation différentielle d'ordre 1.*

Preuve Soit $f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue. Si la fonction $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k est solution de l'équation différentielle d'ordre k

$$x^{(k)}(t) = f(t; x(t), \dots, x^{(k-1)}(t)) \quad (*_f)$$

la fonction $y : I \rightarrow (\mathbb{R}^n)^k$ de classe C^1 , définie par $y = (y_0, \dots, y_{k-1})$ où $y_i(t) = x^{(i)}(t)$, est solution de l'équation différentielle d'ordre 1

$$\begin{cases} y'_0 = y_1 \\ \vdots \\ y'_{k-2} = y_{k-1} \\ y'_{k-1} = f(t; y_0, \dots, y_{k-1}) \end{cases} \quad (1.1)$$

de condition initiale $y(t_0) = (t_0, x(t_0), \dots, x^{(k-1)}(t_0))$.

Réciproquement, si $y = (y_0, \dots, y_{k-1}) : I \rightarrow (\mathbb{R}^n)^k$ de classe C^1 est solution de l'équation différentielle (1.1), on observe que y_0 est de classe C^k , que $y_i = y_0^{(i)}$ pour $i = 1 \dots k-1$, et donc que y_0 est solution de $(*_f)$. \square

Exemple 1.18 L'équation différentielle scalaire (E) $x'' = x' + x$, linéaire autonome d'ordre 2, se ramène au système différentiel (S) linéaire autonome d'ordre 1 dans \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x + y. \end{cases}$$

On définit le portrait de phase de (E) comme celui du système (S) : on trace les images des applications $t \in I \rightarrow (x(t), x'(t)) \in \mathbb{R}^2$ pour les solutions maximales $x : t \in I \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}$ de (E).

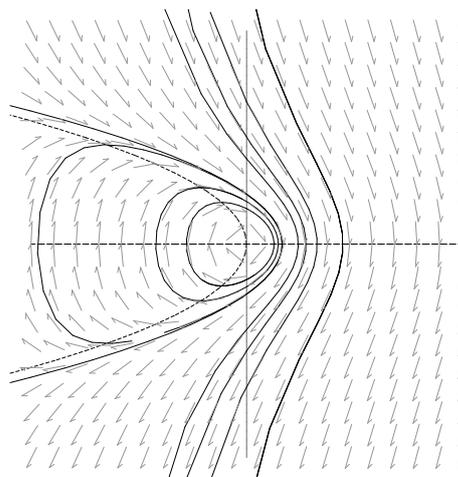
Exemple 1.19 L'équation différentielle scalaire (E) autonome d'ordre 2

$$x''(t) + (x'(t))^2 + x(t) = 0$$

se ramène au système autonome (S)

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - y^2 \end{cases}$$

Ci-contre, une ébauche du portrait de phase. On a également indiqué en pointillés la parabole d'équation $x = -y^2$, qui constitue l'isocline \mathcal{I}_0 , définition 8.2). Voir le polycopié d'exercices pour une étude complète.



Méthodes numériques

Les régionnements, tracés de solutions, ou portraits de phase qui apparaissent dans ce polycopié ont été obtenus en utilisant le logiciel Maple (voir notamment 1.2, 1.19 ou 3.20).

Vous êtes vivement encouragés à étudier des équations différentielles en utilisant votre logiciel favori (Maple, Scilab, Sage...) Cela vous permettra de mettre en évidence des propriétés que vous aurez ensuite à coeur de démontrer.

Pour une introduction aux méthodes numériques, on conseille le très beau livre de Demailly.

2. Equations linéaires autonomes

Ce chapitre est consacré aux équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Nous allons voir qu'on sait toutes les résoudre explicitement. En particulier, leur étude ne fait appel à aucun des théorèmes généraux que nous montrerons par la suite.

Les équations linéaires autonomes interviendront dans l'étude d'une équation différentielle autonome (non linéaire) au voisinage d'un point stationnaire : voir le chapitre 10.

A Introduction

Définition 2.1 • Soit $A \in M_n \mathbb{R}$ une matrice. L'équation différentielle linéaire autonome d'ordre 1 associée est $X'(t) = A X(t)$ ($*_A$), d'inconnue l'application $t \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow X(t) \in \mathbb{R}^n$ de classe C^1 .

• Soient $A_i \in M_n \mathbb{R}$ pour $i = 0 \cdots k-1$. On leur associe l'équation différentielle linéaire autonome d'ordre $k \geq 1$

$$x^{(k)}(t) + A_{k-1} x^{(k-1)}(t) + \cdots + A_0 x(t) = 0 \quad (*)$$

d'inconnue l'application $t \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$ de classe C^k .

Les solutions de ces équations linéaires autonomes sont toutes de classe C^∞ .

Revenons sur le lemme 1.17. Il permet de ramener, par changement de fonction inconnue, l'équation différentielle linéaire autonome d'ordre k (*) à une équation différentielle linéaire autonome d'ordre 1. On introduit en effet la nouvelle fonction inconnue $X = (x, x', \dots, x^{(k-1)})$, avec

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ \vdots \\ x^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -A_0 & -A_1 & \cdots & \cdots & -A_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x^{(k-1)} \end{pmatrix} = A X.$$

Lorsque $n > 1$ il faut comprendre que $A \in M_{kn} \mathbb{R}$ est une matrice par blocs, et que $1 := \text{Id}$ désigne la matrice $\text{Id} \in M_n \mathbb{R}$.

Lorsque $n = 1$, c'est-à-dire pour une équation scalaire

$$x^{(k)}(t) + a_{k-1} x^{(k-1)}(t) + \cdots + a_0 x(t) = 0 \quad (*)$$

d'inconnue $t \in I \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}$ avec $a_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 0 \cdots k - 1$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

associée est la matrice compagnon du polynôme

$$P(s) = s^k + a_{k-1} s^{k-1} + \cdots + a_1 s + a_0.$$

Exemple 2.2 La modélisation de phénomènes physiques conduit souvent à une équation différentielle linéaire, au moins en première approximation... Citons deux exemples pour mémoire :

- l'oscillateur harmonique amorti : une masse m , suspendue à un ressort de coefficient de rappel kC et avec un amortissement μ ; le déplacement vertical x par rapport à la position d'équilibre satisfait

$$m x'' + \mu x' + k x = 0$$

- le circuit RLC : une résistance R , une capacité C , une bobine d'inductance L ; la charge Q du condensateur satisfait

$$L Q'' + R Q' + (1/C) Q = f(t),$$

où $t \rightarrow f(t)$ est la tension délivrée par le générateur. Dans cet exemple, on a rajouté un "second membre" $f(t)$ (voir la section E).

B Résolution en dimension 1

Revenons sur la résolution des équations linéaires autonomes scalaires, exemple qui nous guidera pour la dimension quelconque. Soient $a \in \mathbb{R}$, et une fonction $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . On remarque que x est solution de l'équation différentielle

$$x'(t) - a x(t) = 0 \quad (*_a)$$

si et seulement si

$$(e^{-at} x(t))' = 0.$$

Il suit immédiatement que les solutions maximales de $(*_a)$ sont les fonctions

$$t \in \mathbb{R} \longrightarrow e^{at} x_0 \in \mathbb{R}$$

($x_0 \in \mathbb{R}$), toutes les autres solutions s'obtenant par restriction d'une de ces solutions maximales.

Pour résoudre les équations différentielles linéaires autonomes en dimension supérieure, nous suivrons la même méthode, mais en utilisant cette fois l'exponentielle matricielle dont nous rappelons ci-dessous les premières propriétés.

C Exponentielle de matrices

Dans ce paragraphe de rappels, les preuves sont esquissées. Le lecteur se doit de les écrire en détails. Se reporter si besoin au polycopié de Calcul Différentiel.

Lemme 2.3 Pour $p \in \mathbb{N}^*$, l'application d'élévation à la puissance p

$$e_p : A \in M_n\mathbb{R} \rightarrow A^p \in M_n\mathbb{R}$$

est de classe C^1 (polynomiale) avec, pour toutes $A, B \in M_n\mathbb{R}$:

$$D_A e_p(B) = B A^{p-1} + A B A^{p-2} + \dots + A^{p-1} B.$$

En particulier, lorsque A et B commutent, c'est-à-dire lorsque $AB = BA$, on a

$$D_A e_p(B) = p A^{p-1} B.$$

Si l'on munit $M_n\mathbb{R}$ d'une norme d'algèbre, on a la majoration

$$\|D_A e_p\| \leq p \|A\|^{p-1}.$$

Proposition 2.4 La série de fonctions

$$A \in M_n\mathbb{R} \longrightarrow \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} \in M_n\mathbb{R}$$

définit une application de classe C^1 , notée $\exp : A \in M_n\mathbb{R} \rightarrow e^A \in M_n\mathbb{R}$. La différentielle de \exp s'obtient en différentiant la série terme à terme.

Lorsque $AB = BA$, on a $(D_A \exp)(B) = e^A B = B e^A$. En particulier,

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = A e^{tA} = e^{tA} A.$$

Preuve Sur chaque boule $B(0, R)$, il y a convergence normale de la série de fonctions, ainsi que de la série des différentielles. \square

Remarque 2.5 On peut montrer de même que l'application exponentielle $\exp : A \in M_n\mathbb{R} \rightarrow e^A \in M_n\mathbb{R}$ est de classe C^∞ .

Proposition 2.6 Soient $A, B \in M_n\mathbb{R}$.

Pour toute matrice inversible $P \in \text{Gl}_n\mathbb{R}$, on a $\exp(PAP^{-1}) = Pe^AP^{-1}$.

Lorsque $AB = BA$, on a $\exp(A + B) = e^A e^B = e^B e^A$.

La matrice $e^A \in \text{Gl}_n\mathbb{R}$ est inversible, d'inverse e^{-A} .

Preuve Le premier point est conséquence de la continuité de la multiplication matricielle. Pour tout entier N , on a en effet par linéarité de la multiplication les égalités

$$P^{-1} \left(\sum_{p=0}^N \frac{A^p}{p!} \right) P = \sum_{p=0}^N (P^{-1} \frac{A^p}{p!} P) = \sum_{p=0}^N \frac{(P^{-1}AP)^p}{p!}.$$

Lorsque $N \rightarrow \infty$ le membre de droite tend vers $\exp(PAP^{-1})$. La continuité de la multiplication à gauche par P^{-1} , et à droite par P , nous dit que le membre de gauche converge vers Pe^AP^{-1} .

Pour le calcul de $\exp(A + B)$ lorsque A et B commutent, on utilise la formule du binôme, et la convergence absolue de la série pour pouvoir effectuer une sommation par paquets.

Il suit en particulier que e^A est inversible, d'inverse e^{-A} . □

D Résolution en dimension quelconque

Une fois introduite l'exponentielle matricielle, la résolution des équations différentielles linéaires autonomes en dimension quelconque suit le même chemin qu'en dimension 1.

Proposition 2.7 Soient la matrice $A \in M_n\mathbb{R}$, et l'équation différentielle linéaire autonome $X' = AX$ $(*_A)$ d'inconnue $t \in I \rightarrow X(t) \in \mathbb{R}^n$.

- Il y a existence et unicité au problème de Cauchy pour $(*_A)$.
- Les solutions maximales de $(*_A)$ sont globales (i.e. définies sur \mathbb{R}).
- La solution maximale de $(*_A)$ de condition initiale $(t_0, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow e^{(t-t_0)A} X_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Preuve On procède comme en dimension 1. Soit $t \in I \rightarrow X(t) \in \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . On dérive le produit (bilinéaire) des applications $t \rightarrow e^{-tA} \in M_n\mathbb{R}$ et $t \rightarrow X(t) \in \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Il vient

$$\frac{d}{dt}(e^{-tA} X(t)) = e^{-tA} (X'(t) - AX(t)).$$

Chaque matrice e^{-tA} étant inversible, il suit que X est solution de $(*_A)$ si et seulement si l'application $t \in I \rightarrow e^{-tA} X(t) \in \mathbb{R}^n$ est constante. □

Corollaire 2.8 – L'ensemble des solutions maximales de $X' = AX$ est un sous-espace vectoriel \mathcal{S} de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ de dimension n .

– Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, l'application d'évaluation à l'instant t_0 , soit

$$\varepsilon_{t_0} : X \in \mathcal{S} \rightarrow X(t_0) \in \mathbb{R}^n,$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels d'application réciproque

$$v \in \mathbb{R}^n \rightarrow [t \in \mathbb{R} \rightarrow e^{(t-t_0)A}v \in \mathbb{R}^n] \in \mathcal{S}.$$

Remarque 2.9 Si $v \in \mathbb{R}^n$ est vecteur propre de A pour la valeur propre λ , on a $e^{tA}v = e^{t\lambda}v$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Notamment, si la matrice A est diagonalisable dans une base de vecteurs propres (v_i) associés aux valeurs propres (λ_i) , les applications $t \in \mathbb{R} \rightarrow e^{t\lambda_i}v_i \in \mathbb{R}^n$ ($1 \leq i \leq n$) constituent une base de \mathcal{S} .

En général (et en particulier en grande dimension), le calcul de e^{tA} ne sera pas toujours évident. Il est cependant aisé lorsqu'on dispose de la décomposition de Jordan-Dunford de la matrice A (voir 10.14).

Dans la pratique, on se livrera rarement au calcul des e^{tA} .

Remarque 2.10 Pour une équation linéaire non autonome $X'(t) = A(t)X(t)$, on a vu qu'on peut se ramener, par changement de fonction inconnue, à une équation autonome (lemme 1.17); mais on perd alors la linéarité!

Nous étudierons les équations linéaires non autonomes au chapitre 12.

E Equations non homogènes

On veut maintenant résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants mais avec un second membre (équation non homogène), soit

$$X'(t) = AX(t) + B(t) \quad (*_A^B)$$

où $A \in M_n\mathbb{R}$ et $B : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application continue définie sur un intervalle ouvert J de \mathbb{R} . L'équation homogène associée à $(*_A^B)$ est

$$X'(t) = AX(t). \quad (*_A)$$

E.1 Résolution

On sait de nouveau résoudre explicitement ces équations $(*_A^B)$ (modulo le calcul des exponentielles matricielles (e^{tA}) et un calcul de primitive), et l'on a encore des informations sur la structure de l'ensemble des solutions. C'est ce que nous dit l'énoncé suivant.

Proposition 2.11 Soient $A \in M_n \mathbb{R}$ et $B : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue sur l'intervalle ouvert J . Soit l'équation différentielle $X' = AX + B$ $(*_A^B)$ d'inconnue $t \in I \rightarrow X(t) \in \mathbb{R}^n$.

- Il y a existence et unicité au problème de Cauchy pour $(*_A^B)$.
- Les solutions maximales de $(*_A^B)$ sont globales (i.e. définies sur J).
- La solution maximale de $(*_A^B)$ de condition initiale $(t_0, X_0) \in J \times \mathbb{R}^n$ est

$$t \in J \rightarrow e^{(t-t_0)A} X_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} B(s) ds.$$

Preuve Pour une application $t \in I \rightarrow X(t) \in \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , on écrit comme ci-dessus

$$(e^{-tA} X(t))' = e^{-tA} (X'(t) - AX(t)).$$

Puisque chaque matrice e^{-tA} est inversible, il suit que X est solution de $(*_A^B)$ si et seulement si

$$(e^{-tA} X(t))' = e^{-tA} B(t).$$

Pour $t_0 \in I$ et $t \in I$, on intègre entre t_0 et t , et on obtient

$$e^{-tA} X(t) - e^{-t_0A} X(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-sA} B(s) ds$$

soit, en utilisant la linéarité de l'intégrale et les propriétés de l'exponentielle (Proposition 2.6)

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} B(s) ds. \quad (2.1)$$

Cette expression a un sens pour tout $t \in J$ et définit une solution $X : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, ce qui assure que les solutions maximales de $(*_A^B)$ sont globales. \square

Une fois connues les solutions de l'équation homogène $(*_A)$, c'est-à-dire une fois connue l'application $t \in \mathbb{R} \rightarrow e^{tA} \in M_n \mathbb{R}$, on obtient donc les solutions de l'équation avec second membre $(*_A^B)$ par simple quadrature (recherche de primitive) : on n'a plus d'équation différentielle à résoudre ! Il peut cependant arriver que l'on ne sache pas donner de formule explicite pour la primitive de $s \rightarrow e^{-sA} B(s)$.

Corollaire 2.12 L'ensemble des solutions maximales de $(*_A^B)$ forme un sous-espace affine \mathcal{S}^B de dimension n de $C^\infty(J, \mathbb{R}^n)$, qui est dirigé par l'espace vectoriel des restrictions à J des solutions maximales de l'équation homogène $(*_A)$.

Autrement dit, si Z est **une** solution (dite “particulière”, ce qui signifie simplement que c’est elle qu’on considère...) de l’équation $(*_A^B)$, les solutions de $(*_A^B)$ sont toutes les applications $X + Z : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, où X est la restriction à J d’une solution maximale quelconque $t \rightarrow e^{tA}X_0$ de $(*_A)$ (X_0 décrivant donc \mathbb{R}^n).

La solution particulière $Z : t \rightarrow \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} B(s) ds$ qui apparaît dans (2.1) est l’unique solution de $(*_A^B)$ qui s’annule en t_0 .

E.2 Méthode de variation de la constante à l’ordre 1

Une fois connue la famille des exponentielles matricielles e^{tA} ($t \in \mathbb{R}$), la proposition 2.11 permet de résoudre une équation différentielle autonome avec second membre $X' = AX + B$.

Nous revenons ici sur cette proposition avec une présentation un peu différente, commode dans la pratique. Nous généraliserons cette méthode aux équations d’ordre supérieur dans le paragraphe 2.E.3, et aux équations linéaires non autonomes dans le chapitre 12.

Soit $X : t \in I \subset J \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 . On veut savoir à quelle condition X sera solution de l’équation non homogène $X'(t) = AX(t) + B(t)$ $(*_A^B)$.

Nous supposons connue une base (X_1, \dots, X_n) de l’espace vectoriel \mathcal{S} des solutions de l’équation homogène $X' = AX$.

Nous restreignons ces applications à l’intervalle J . Nous avons vu au corollaire 2.8 que, pour tout $t \in J$, la famille de vecteurs $(X_1(t), \dots, X_n(t))$ constitue une base de \mathbb{R}^n . On peut donc exprimer, en chaque instant $t \in J$, le vecteur $X(t)$ dans cette base, c’est-à-dire écrire $X(t) = \sum c_i(t) X_i(t)$ pour des réels $(c_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ dépendant de t .

En écriture matricielle, cela revient à introduire l’application de classe C^1

$$t \in J \longrightarrow M(t) := \left(\begin{array}{c|ccc|c} & & & & \\ X_1(t) & & & & \\ & & \cdots & & \\ & & & & X_n(t) \\ & & & & \end{array} \right) \in \text{Gl}_n \mathbb{R}$$

et à écrire

$$X(t) = M(t)C(t) \quad \text{où} \quad C(t) := \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}.$$

On note que les applications $t \rightarrow (M(t))^{-1}$ et donc $t \rightarrow C(t) = (M(t))^{-1}X(t)$ sont de classe C^1 . On observe également que l’application X est solution de l’équation homogène $(*_A)$ si et seulement si le vecteur $C(t)$ ne dépend pas de t .

Puisque les (X_i) sont solution de l'équation homogène, on a $M'(t) = A(t)M(t)$ et donc

$$X'(t) = M'(t)C(t) + M(t)C'(t) = A(t)X(t) + M(t)C'(t).$$

Il suit que X est solution de $(*_A^B)$ si et seulement si

$$C'(t) = (M(t))^{-1} B(t).$$

On n'a plus, pour résoudre $(*_A^B)$, qu'à trouver une (ou les) primitives de l'application $t \rightarrow (M(t))^{-1} B(t)$.

Remarque 2.13 On obtient les solutions de l'équation homogène lorsque l'application $t \rightarrow C(t)$ est constante. Pour résoudre l'équation avec second membre, on fait donc "varier la constante".

Remarque 2.14 Désignons par (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n . Si, dans ce qu'on vient d'exposer, on choisit pour base de \mathcal{S} la famille $t \rightarrow X_i(t) = e^{tA} e_i$, alors on a $M(t) = e^{tA}$ et l'on retrouve ce qui a été fait dans la preuve de la proposition 2.11.

Si la matrice A est diagonalisable, on choisit naturellement pour base de \mathcal{S} la famille $t \rightarrow X_i(t) = e^{t\lambda_i} v_i$, où (v_i) est une base de vecteurs propres associés aux valeurs propres (λ_i) (voir la remarque 2.9).

Exercice 2.15 Résoudre l'équation différentielle scalaire $x'(t) = 2t x(t)$. En déduire les solutions de $x'(t) = 2t x(t) - te^{t^2}$.

Exercice 2.16 On considère le système différentiel non homogène $(*_A^B)$

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) + e^t. \end{cases} \quad (2.2)$$

1. Montrer que les applications $t \in \mathbb{R} \rightarrow (\sin t, \cos t) \in \mathbb{R}^2$ et $t \in \mathbb{R} \rightarrow (\cos t, -\sin t) \in \mathbb{R}^2$ forment une base de l'espace des solutions du système homogène associé $(*_A)$.
2. Résoudre le système $(*_A^B)$.

E.3 Variation de la constante pour une équation linéaire d'ordre supérieur

Pour étudier une équation différentielle linéaire d'ordre supérieur, on suit le principe général vu dans le paragraphe 1.E et on se ramène à l'ordre 1.

Pour simplifier l'écriture, nous nous contentons dans ce paragraphe d'exposer la méthode pour une équation scalaire d'ordre 2

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = b(t) \quad (*_a^b)$$

où $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ et $t \in J \rightarrow b(t) \in \mathbb{R}$ est une application continue. On traitera l'ordre supérieur en 12.B.3 pour les équations non autonomes. Noter que la méthode s'applique également à des équations non scalaires.

• Pour savoir quoi faire, on se ramène sagement à une équation d'ordre 1... On introduit, comme en 1.E, la nouvelle fonction inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ et on introduit l'équation différentielle $X'(t) = A X(t) + B(t)$ ($*_A^B$), où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Supposons alors connue une base (x_1, x_2) de l'espace des solutions de l'équation homogène ($*_a$), et donc une base $X_i = \begin{pmatrix} x_i \\ x'_i \end{pmatrix}$ ($i = 1, 2$) de l'espace des solutions de l'équation homogène ($*_A$). Comme on l'a vu dans le paragraphe précédent, la méthode de variation de la constante pour l'équation d'ordre 1 ($*_A^B$) consiste à chercher les solutions X de cette équation sous la forme

$$X(t) = c_1(t) X_1(t) + c_2(t) X_2(t) \quad (2.3)$$

où $t \rightarrow c_i(t)$ ($i = 1, 2$) sont deux fonctions scalaires inconnues de classe C^1 .

• Nous allons maintenant oublier X et l'équation ($*_A^B$), pour revenir à la fonction inconnue x et à ($*_a^b$). L'identité (2.3) s'écrit

$$\begin{cases} x(t) = c_1(t) x_1(t) + c_2(t) x_2(t) \\ x'(t) = c_1(t) x'_1(t) + c_2(t) x'_2(t). \end{cases} \quad (2.4)$$

Autrement dit, en chaque instant t , on exprime les réels $x(t)$ et $x'(t)$ comme combinaisons linéaires respectives de $(x_1(t), x_2(t))$ et $(x'_1(t), x'_2(t))$ avec le même couple de coefficients $(c_1(t), c_2(t))$. Voyons comment ceci nous permet de résoudre notre équation différentielle.

• Dérivons la première ligne de (2.4). Il vient

$$x'(t) = (c_1(t) x'_1(t) + c_2(t) x'_2(t)) + (c'_1(t) x_1(t) + c'_2(t) x_2(t)).$$

Demander que la seconde ligne de (2.4) soit satisfaite, sachant que la première l'est pour tout $t \in J$, équivaut donc à la condition

$$c'_1(t) x_1(t) + c'_2(t) x_2(t) = 0. \quad (\diamond)$$

Dérivons maintenant la seconde ligne de (2.4). Il vient

$$x''(t) = c_1(t) x''_1(t) + c_2(t) x''_2(t) + c'_1(t) x'_1(t) + c'_2(t) x'_2(t). \quad (2.5)$$

Puisque x_1 et x_2 sont deux solutions de l'équation homogène $(*_a)$, il suit de (2.5) et de (2.4) que

$$\begin{aligned} x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) &= c_1 x_1'' + c_2 x_2'' + c_1' x_1' + c_2' x_2' \\ &+ a_1 c_1 x_1' + a_2 c_2 x_2' + a_0 c_1 x_1 + a_0 c_2 x_2 \\ &= c_1' x_1' + c_2' x_2'. \end{aligned}$$

Il suit alors que x est solution de $(*_a^b)$ si et seulement

$$c_1' x_1' + c_2' x_2' = b. \quad (\diamond\diamond)$$

• On résume ce qu'on vient de voir en (\diamond) et $(\diamond\diamond)$. Une fois écrits (x, x') sous la forme (2.4), la fonction x est solution de $(*_a^b)$ si et seulement si les fonctions inconnues c_1' et c_2' sont solutions, pour tout instant t , du système

$$\begin{cases} c_1'(t) x_1(t) + c_2'(t) x_2(t) = 0 \\ c_1'(t) x_1'(t) + c_2'(t) x_2'(t) = b(t). \end{cases} \quad (2.6)$$

En chaque instant t , le système linéaire (2.6) est inversible puisque les vecteurs $X_1(t)$ et $X_2(t)$ sont linéairement indépendants. On obtient donc $c_1'(t)$ et $c_2'(t)$ en résolvant ce système, puis les fonctions c_1 et c_2 par quadrature. On retrouve la structure de l'espace des solutions \mathcal{S}^b , le "terme constant" dans la primitive correspondant aux solutions de l'équation homogène.

Exercice 2.17 Résoudre l'équation différentielle scalaire $x''(t) + x(t) = e^t$.

F Portraits de phase pour les équations linéaires en dimension quelconque

Nous énonçons quelques généralités concernant le portrait de phase d'une l'équation différentielle linéaire autonome

$$X'(t) = AX(t) \quad (*_A)$$

pour une matrice $A \in M_n \mathbb{R}$. Rappelons que le portrait de phase est la partition de \mathbb{R}^n constituée des images des solutions maximales de cette équation différentielle autonome (chapitre 1).

Droites stables

Si $v \in \mathbb{R}^n$ est vecteur propre de A de valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $A(v) = \lambda v$, et donc $e^{tA}v = e^{t\lambda}v$ ($t \in \mathbb{R}$). Une droite propre (pour une valeur propre non nulle $\lambda \in \mathbb{R}^*$), est donc réunion de trois orbites : l'origine, et les deux demi-droites ouvertes.

Soit maintenant v un vecteur non nul tel que la droite $\mathbb{R}v$ engendrée par v soit réunion d'orbites. Il suit qu'on a une application $t \rightarrow a(t)$ de classe C^1 avec $a(0) = 1$ pour laquelle $t \rightarrow a(t)v$ est solution, c'est-à-dire telle que $a'(t)v = a(t)Av$. On en déduit que v est vecteur propre de A , pour la valeur propre $a'(0)$.

Les droites propres de A sont donc exactement les droites qui sont réunions d'orbites (c'est-à-dire les droites "stables" par l'équation différentielle). On les dessinera donc d'emblée lorsqu'on veut tracer le portrait de phase.

Renversement du temps

Lorsqu'on remplace la matrice A par son opposé $-A$, on obtient le même portrait de phase mais avec des orbites parcourues en sens opposé.

En effet, lorsque $t \rightarrow X(t)$ est solution de l'équation linéaire $X' = AX$, l'application $t \rightarrow Y(t) := X(-t)$ est solution de $Y' = (-A)Y$.

Conjugaison, changement de repère

Pour une application $t \rightarrow X(t)$ de classe C^1 solution de $X'(t) = AX(t)$ ($*_A$) et une matrice inversible $P \in \text{Gl}_n\mathbb{R}$, on a

$$(PX)' = PX' = PAX = (PAP^{-1})(PX).$$

Donc X est solution de ($*_A$) si et seulement si $Y = PX$ est solution de l'équation linéaire $Y' = (PAP^{-1})Y$ associée à la matrice conjuguée PAP^{-1} . Il suit que l'endomorphisme associé à la matrice P envoie le portrait de phase de l'équation linéaire $X' = AX$ sur le portrait de phase de l'équation linéaire $Y' = (PAP^{-1})Y$.

Un exemple

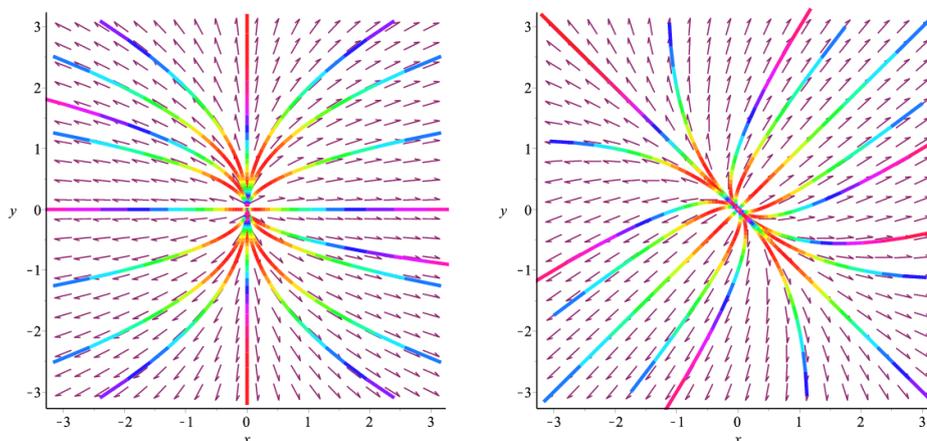
Pour rendre les choses plus concrètes, traitons un exemple simple.

On se donne la matrice inversible $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, ainsi que les deux les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$.

On introduit les systèmes différentiels

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (*_A)$$

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3x(t) + y(t))/2 \\ (x(t) + 3y(t))/2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (*_B).$$



On a esquissé les portraits de phase des équations différentielles $(*_A)$ (à gauche) et $(*_B)$ (à droite). L'application linéaire $(x, y) \rightarrow (x - y, x + y)$ associée à la matrice P (qui envoie les axes de coordonnées sur les diagonales) envoie le portrait de phase de gauche sur celui de droite.

G Portraits de phase linéaires en dimension 2

Il est indispensable de bien connaître l'allure des portraits de phase des équations linéaires autonomes en dimension 2. On vient de voir qu'il suffit de déterminer les portraits de phase pour une seule matrice dans chaque classe de conjugaison : on la choisit la plus simple possible !

G.1 Quelques rappels d'algèbre linéaire

Rappelons que deux matrices A et B sont conjuguées s'il existe une matrice inversible P telle que $B = PAP^{-1}$. Cela revient à dire que A et B sont associées au même endomorphisme, mais dans deux bases différentes.

Nous commençons par rappeler ci-dessous les classes de conjugaison dans $M_2\mathbb{R}$. Pour cela, on distinguera selon que la matrice est, ou non, diagonalisable sur \mathbb{R} ou bien sur \mathbb{C} .

Soit $A \in M_2\mathbb{R}$, d'endomorphisme associé $L \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$.

- Si A est diagonalisable sur \mathbb{R} , on peut la supposer diagonale après changement de base. Lorsque les deux valeurs propres (réelles) sont confondues, la matrice est scalaire (c'est un multiple de l'identité). Sinon, elle a deux valeurs propres réelles distinctes.

La classe de conjugaison de A est alors donnée par deux réels $\lambda \leq \mu$.

• Si la matrice A n'est pas diagonalisable sur \mathbb{C} , cela impose que ses deux valeurs propres sont confondues (sinon on a une base de vecteurs propres), mettons égales à λ . Remarquons que λ est réel. En effet, la matrice est réelle et si λ est valeur propre, son conjugué $\bar{\lambda}$ est également valeur propre : on doit donc avoir $\lambda = \bar{\lambda}$.

Soient v_1 un vecteur propre de A , et v_2 un vecteur quelconque non colinéaire à v_1 . Dans la base (v_1, v_2) , la matrice de l'endomorphisme L se lit donc $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, avec $a \neq 0$ (sinon la matrice serait scalaire.) Dans la base normalisée $(v_1, v_2/a)$, la matrice de l'endomorphisme L se lit alors $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. La classe de conjugaison de A est alors donnée par un seul réel λ .

• Si la matrice n'est pas diagonalisable sur \mathbb{R} , mais qu'elle est diagonalisable sur \mathbb{C} , ses valeurs propres ne sont pas réelles et sont donc conjuguées. Notons les $a + ib$ et $a - ib$. On dispose donc d'une base (w_1, w_2) de vecteurs propres sur \mathbb{C} . Ce sont des vecteurs de \mathbb{C}^2 . Puisque la matrice A est réelle, on peut prendre $w_2 = \bar{w}_1$. En effet, si w_1 est propre pour la valeur propre $a + ib$, on a $\overline{Aw_1} = A\bar{w}_1 = Aw_2$ tandis que $\overline{Aw_1} = \overline{(a + ib)w_1} = (a - ib)w_2$.

Les vecteurs $v_1 = (w_1 + w_2)$ et $v_2 = i(w_1 - w_2)$ sont alors deux vecteurs réels indépendants. On a

$$A(v_1) = A(w_1 + w_2) = (a + ib)w_1 + (a - ib)w_2 = a(w_1 + w_2) + ib(w_1 - w_2)$$

$$A(v_2) = i(Aw_1 - Aw_2) = i(a + ib)w_1 - i(a - ib)w_2 = -bw_1 + av_2,$$

autrement dit la matrice de L dans la base réelle (v_1, v_2) est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

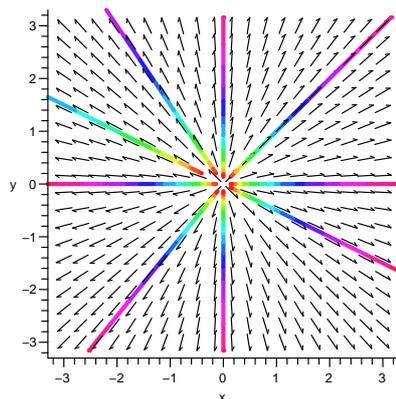
La classe de conjugaison de A est alors donnée par un nombre complexe $a + ib$ avec $b \neq 0$.

G.2 Les portraits de phase dans le plan

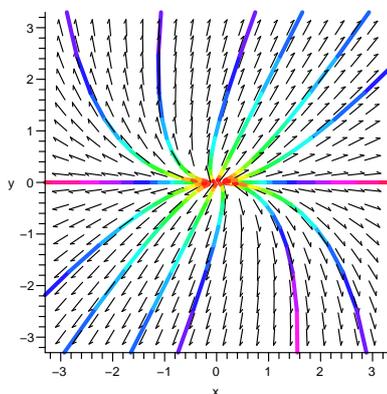
Nous étudions ci-dessous les équations différentielles linéaires autonomes en dimension 2. Les démonstrations, sont laissées au lecteur. Nous n'illustrons pas les portraits de phase associés à des matrices possédant une valeur propre nulle.

Tous les dessins s'entendent "sans conjugaison" : ce sont les portraits de phase de $X' = AX$, où A est bien la matrice indiquée dans la légende.

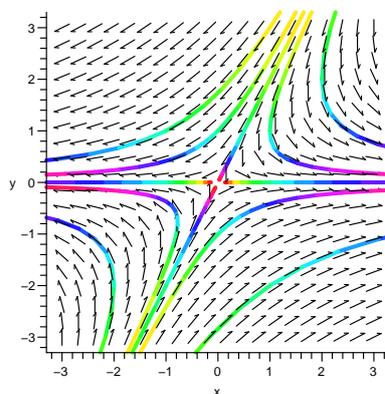
• **A diagonalisable sur \mathbb{R}** : après conjugaison de A (c'est-à-dire dans une base adaptée) on peut supposer que A est diagonale, soit $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\mu} \end{pmatrix}$ et $(x(t), y(t)) = (e^{t\lambda}x_0, e^{t\mu}y_0)$.



Soleil $\lambda = \mu \neq 0$,
ici $A = \lambda \text{Id}$ avec $\lambda > 0$



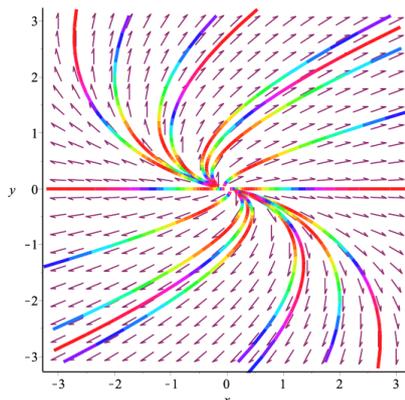
Noeud : $\lambda \neq \mu$ de même signe,
ici pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$



Col : λ et μ de signes contraires,
ici pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

• **A non diagonalisable sur \mathbb{C}** : la matrice A a deux valeurs propres (réelles) confondues, mais n'est pas multiple de l'identité ; après conjugaison, on peut donc supposer que

$$A = \lambda \text{Id} + N = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad e^{tA} = e^{t\lambda \text{Id}} e^{tN} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix}$$



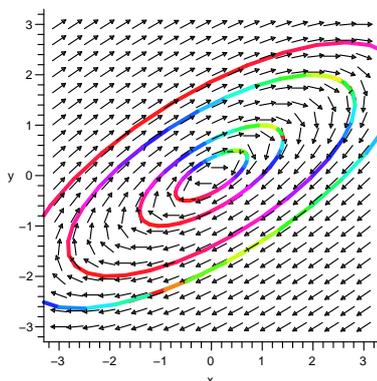
Noeud dégénéré, ici pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

• **A diagonalisable sur \mathbb{C} , mais pas sur \mathbb{R}** : après conjugaison, on peut donc supposer que $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a\text{Id} + bJ$, avec $b \neq 0$.

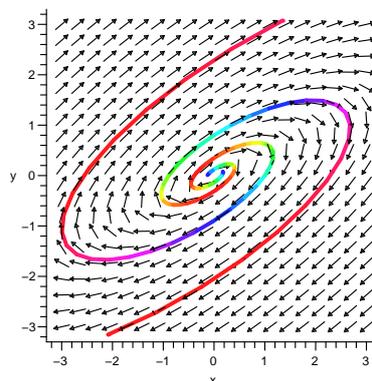
Puisque $J^2 = -\text{Id}$, $J^3 = -J$ et $J^4 = \text{Id}$, on a

$$e^{tA} = e^{ta} e^{tbJ} = e^{ta} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}.$$

Lorsque $a = 0$, il s'agit d'un centre, et les orbites sont des ellipses. Lorsque $a \neq 0$, c'est un foyer.



Un centre, ici pour
 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$



Un foyer, ici pour
 $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

Remarque 2.18 On aurait également pu traiter ce dernier cas en identifiant \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} . Pour $X = (x, y)$, on introduit le complexe $z = x + iy$, et l'on pose $\omega = a + ib$. On observe alors que $X' = AX$ équivaut à $z' = \omega z$ que l'on résoud en $z(t) = e^{t\omega} z_0$, avec $e^{t\omega} = e^{ta} e^{itb}$.

Exercice 2.19 Esquisser le portrait de phase des équations linéaires autonomes associées aux matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

On commencera bien entendu par indiquer les orbites remarquables. On pourra également s'aider du régionnement (paragraphe 8.A) pour tracer le portrait de phase, ou vérifier sa cohérence avec les données.

3. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

L'objectif de ce chapitre est le théorème de Cauchy-Lipschitz : existence et unicité au problème de Cauchy pour une équation différentielle $x' = f(t, x)$ avec f suffisamment régulière.

Nous présenterons dans ce polycopié deux preuves du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Dans la première preuve, qui est l'objet de ce chapitre, on ramène la recherche d'une solution au problème de Cauchy à la recherche d'un point fixe pour une certaine transformation (lemme 3.13). On conclut alors avec le théorème du point fixe de Banach-Picard.

La seconde preuve sera présentée au chapitre 11. Elle consiste à construire tout d'abord une famille de solutions approchées puis à vérifier, en utilisant le lemme de Gronwall, que ces solutions approchées convergent vers une solution.

A Enoncé du théorème

Soit $f : J \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. On s'intéresse, tout au long du chapitre, au problème de Cauchy de condition initiale $(t_0, x_0) \in J \times U$ pour l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)). \quad (*)$$

Définition 3.1 *Un cylindre fermé $C \subset J \times U$ centré en (t_1, x_1) est le produit*

$$C = [t_1 - a, t_1 + a] \times \overline{B}(x_1, R) \subset J \times U$$

d'un intervalle fermé centré en t_1 et d'une boule fermée centrée en x_1 .

Nous introduisons maintenant l'hypothèse de régularité qui intervient dans le théorème de Cauchy-Lipschitz. Soit $k > 0$.

Définition 3.2 *La restriction à un cylindre C de l'application f est k -lipschitzienne par rapport à la variable d'espace (seconde variable) si*

$$\text{pour tous } (t, y) \text{ et } (t, z) \text{ dans } C, \text{ on a } \|f(t, y) - f(t, z)\| \leq k \|y - z\|.$$

Définition 3.3 *L'application $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable (variable d'espace x) si et seulement si, pour tout $(t_1, x_1) \in J \times U$, il existe un cylindre $C_1 \subset J \times U$ centré en (t_1, x_1) sur lequel f est lipschitzienne par rapport à x .*

Remarque 3.4 – La constante de Lipschitz dépend alors du cylindre C_1 , et peut exploser lorsqu'on va vers le bord de $J \times U$.

– Si f est de classe C^1 sur $J \times U$, elle est lipschitzienne (et donc lipschitzienne par rapport à la seconde variable) sur tout cylindre de $J \times U$. Ceci est conséquence du théorème des accroissements finis puisqu'un cylindre est compact (donc la différentielle de f y est uniformément bornée) et convexe.

Exercice 3.5 On suppose que la fonction continue $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable x . Montrer alors que sa restriction à tout compact $K \subset J \times U$ est lipschitzienne par rapport à x .

Voir le lemme 5.8.

L'énoncé que nous allons démontrer dans ce chapitre est le suivant.

Théorème 3.6 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit $f : J \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. On suppose de plus :

- que f est de classe C^1 sur $J \times U$;
- ou, plus généralement, que l'application continue $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de plus localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable (hypothèse dite “de Cauchy-Lipschitz”).

Alors, pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in J \times U$:

- il existe une unique solution maximale de l'équation $x' = f(t, x)$, de condition initiale (t_0, x_0) ;
- toute autre solution, de même de condition initiale, est obtenue par restriction de cette solution maximale.

Ce théorème suivra de deux énoncés intermédiaires : existence et unicité locales (théorème 3.11) puis unicité globale (théorème 3.19).

Dans la plupart des exemples que nous rencontrerons, l'application f sera de classe C^1 (voire C^∞). L'intérêt de l'hypothèse plus générale “de Cauchy-Lipschitz” est qu'elle englobe l'exemple naturel des équations linéaires non autonomes à coefficients continus (voir le chapitre 12).

B Un exemple sans unicité

Avant de démarrer la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz à la section suivante, nous montrons sur un exemple simple en quoi l'hypothèse de régularité sur l'application continue f (c'est-à-dire

f localement lipschitzienne par rapport à la variable d'espace)
est pertinente pour assurer l'unicité au problème de Cauchy.

Considérons l'équation différentielle autonome

$$\begin{cases} x'(t) = -\sqrt{x(t)} & \text{pour } x(t) \geq 0 \\ x'(t) = 0 & \text{pour } x(t) \leq 0. \end{cases}$$

Autrement dit, on s'intéresse à l'équation différentielle $x'(t) = f(x(t))$ (*) où $f(x) = -\sqrt{x}$ lorsque $x \geq 0$ et $f(x) = 0$ sinon. Cette fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bien continue, mais elle n'est pas lipschitzienne au voisinage de 0.

Décrivons les solutions de l'équation différentielle. Soit $t \in I \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}$ une solution. Puisque $f \leq 0$, la solution x est partout décroissante. De plus :

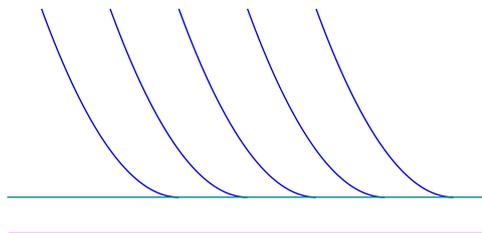
- Sur un intervalle où $x < 0$, x est constante.
- Sur un intervalle où $x > 0$, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $x(t) = \frac{1}{4}(c-t)^2$ (avec $t < c$).
- La solution nulle est solution particulière.

Il suit que les solutions maximales de (*) sont toutes globales. Ce sont les fonctions $x_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (pour $c \in \mathbb{R}$) et $y_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (pour $a \leq 0$) définies par
– $x_c(t) = \frac{1}{4}(c-t)^2$ pour $t \leq c$, et $x_c(t) = 0$ pour $t \geq c$ (lorsque $c \in \mathbb{R}$)
– $y_a(t) = a$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (lorsque $a \leq 0$).

Dans cet exemple, il n'y a pas unicité au problème de Cauchy. Ce manque d'unicité est dû au peu de régularité de f en 0. De fait, les "points de branchement" des solutions apparaissent lorsque celles-ci s'annulent.

On observe en effet que, pour toute condition initiale $(t_0, 0) \in \mathbb{R}$, il y a une infinité de solutions maximales au problème de Cauchy correspondant : toute la droite $\{(t, 0)\}$ est constituée de points de branchement.

Cette équation modélise l'écoulement d'un seau percé (au moins en ce qui concerne les solutions positives). Vous arrivez devant un seau percé ; s'il est vide, vous ne savez pas si il l'a été de toute éternité, ou à partir de quand il a fini de se vider.



Écoulement du seau percé

Nous constatons donc que, lorsque f est seulement supposée continue, il n'y a en général pas unicité au problème de Cauchy pour l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ (*_f).

C Cylindre de sécurité

On dégage la notion de cylindre de sécurité, qui nous servira dans la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Définition 3.7 Cylindre de sécurité

Un cylindre fermé

$$\mathcal{C} = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B}(x_0, R) \subset J \times U$$

est un cylindre de sécurité pour la condition initiale (t_0, x_0) lorsque $\varepsilon \leq \frac{R}{M}$, où $M = \sup_{\mathcal{C}} \|f\|$.

Dans le lemme suivant, on constate qu'il est facile de construire des cylindres sécurité.

Lemme 3.8 Soient $C = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(x_0, R) \subset J \times U$ un cylindre fermé centré en (t_0, x_0) , et $M = \sup_C \|f\|$. Soit $\varepsilon := \min(a, \frac{R}{M})$. Alors

$$\mathcal{C} = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B}(x_0, R) \subset C$$

est un cylindre de sécurité centré en (t_0, x_0) .

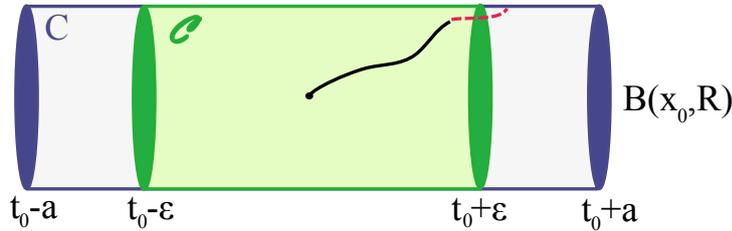
Preuve Immédiate. Noter que $M < \infty$ car $C \subset J \times U$ est compact. \square

L'intérêt des cylindres de sécurité réside dans le lemme suivant, qui localise l'endroit où une solution de condition initiale (t_0, x_0) , définie sur un intervalle suffisamment petit, prend ses valeurs.

Lemme 3.9 Soit

$$\mathcal{C} = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B}(x_0, R) \subset J \times U$$

un cylindre de sécurité centré en (t_0, x_0) . Soit $I \subset [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ un intervalle ouvert contenant t_0 . Toute solution $x : I \rightarrow U$ de (*) de condition initiale (t_0, x_0) prend ses valeurs dans la boule ouverte $B(x_0, R)$.



Le cylindre C et le cylindre de sécurité \mathcal{C} du lemme 3.8 ;
le graphe d'une solution telle que $x(t_0) = x_0$

Preuve du lemme 3.9 Démontrons la propriété dans le futur de t_0 .

Notons $M = \sup_{\mathcal{C}} \|f\|$. On a donc $\varepsilon_0 \leq \frac{R}{M}$. On procède par l'absurde et on suppose que la solution $x : I \rightarrow U$ sort de la boule ouverte $B(x_0, R)$ dans le futur de t_0 . On considère alors le premier instant $T \geq t_0$, avec $T \in I$, où la solution sort de la boule. Autrement dit, on introduit

$$T = \inf\{t \geq t_0, t \in I \mid \|x(t) - x_0\| \geq R\}.$$

On a donc $\|x(T) - x_0\| = R$, avec $\|x(t) - x_0\| < R$ pour tout $t \in [0, T[$. Il vient alors, puisque $(t, x(t)) \in \mathcal{C}$ lorsque $t \in [t_0, T]$:

$$R = \|x(T) - x_0\| \leq \int_{t_0}^T \|x'(t)\| dt = \int_{t_0}^T \|f(t, x(t))\| dt \leq M(T - t_0).$$

Il suit que $T \geq t_0 + \frac{R}{M} \geq t_0 + \varepsilon$, une contradiction.

On démontre de même la propriété dans le passé de t_0 , ou bien on la déduit de la propriété dans le futur en utilisant l'exercice suivant. \square

Exercice 3.10 Renversement du temps

Soit $x :]-\alpha, \beta[\rightarrow U$ une solution de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$. Alors la fonction $\tilde{x} :]-\beta, \alpha[\rightarrow U$ définie par $\tilde{x}(t) = x(-t)$ est solution de l'équation différentielle $x' = -f(-t, x)$.

D Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Comme annoncé dans l'introduction, nous allons démontrer le théorème 3.6 en deux étapes : existence et unicité locales (3.11), puis unicité globale (3.19).

Théorème 3.11 de Cauchy-Lipschitz (existence et unicité locales)

Soient $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue, $(t_0, x_0) \in J \times U$ une condition initiale et

$$\mathcal{C} = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B}(x_0, R)$$

un cylindre de sécurité centré en (t_0, x_0) . On suppose que, en restriction à \mathcal{C} , l'application f est k -lipschitzienne par rapport à la variable d'espace.

Alors, pour tout intervalle ouvert I tel que $t_0 \in I \subset]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, il existe une unique solution de $x'(t) = f(t, x(t))$ (*) de condition initiale (t_0, x_0) , et définie sur l'intervalle I .

Le théorème 3.11 dit qu'il existe une solution $x :]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\rightarrow U$ de (*) de condition initiale (t_0, x_0) . Cette solution n'est pas forcément maximale, mais son temps de vie ε est explicite et ne dépend que de $M = \sup_{\mathcal{C}} \|f\|$ (et pas de la constante de Lipschitz k). De plus, toute autre solution $y : I_y \rightarrow U$ de (*), de même condition initiale (t_0, x_0) , coïncide avec x sur leur domaine commun de définition $I_y \cap]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$.

Exemple 3.12 Considérons l'équation différentielle $x' = \sin(tx)$. La fonction $f(t, x) = \sin(tx)$ est de classe C^1 , et bornée par 1. Pour chaque condition initiale (t_0, x_0) , tout cylindre $[t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(x_0, a)$ ($a > 0$) est un cylindre de sécurité. Le théorème 3.11 assure l'existence d'une solution de condition initiale (t_0, x_0) définie (par exemple) sur $[t_0 - 1, t_0 + 1]$. En raccordant de telles solutions, on obtient une solution globale, c'est-à-dire ici définie sur \mathbb{R} , de condition initiale (t_0, x_0) .

(La proposition 5.4 nous donnera un autre argument pour montrer que les solutions maximales de cette équation différentielle sont globales.)

Passons à la preuve du théorème 3.11. Pour plus de clarté, nous la décomposons en quelques étapes élémentaires. Le point clé (lemme 3.13) consiste à ramener la recherche d'une solution au problème de Cauchy pour (*) à la recherche d'un point fixe pour une transformation intégrale. Après cela, on n'aura plus qu'à se laisser porter par les événements.

Lemme 3.13 Soient $I \subset J$ un intervalle ouvert contenant t_0 et $x : I \rightarrow U$ une application continue. Alors

- l'application x est de classe C^1 et est solution du problème de Cauchy

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (*_0)$$

si et seulement si

- on a, pour tout $t \in I$, $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$.

Preuve Immédiate. □

On suppose désormais que l'intervalle I contient t_0 , et satisfait $I \subset]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$. Si il existe une solution du problème de Cauchy $(*_0)$ définie sur I , le lemme 3.9 nous assure que cette solution prend ses valeurs dans $B(x_0, R)$ puisque \mathcal{C} est un cylindre de sécurité. Introduisons donc l'espace de fonctions dans lequel nous allons chercher la solution, soit

$$E = \{x : I \rightarrow \overline{B}(x_0, R) \subset \mathbb{R}^n \mid x \text{ continue}\},$$

et l'application qui, à $x \in E$, associe $\Phi(x) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie pour $t \in I$ par

$$\Phi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \in \mathbb{R}^n.$$

Lemme 3.14 – La transformation $\Phi : E \rightarrow E$ est bien définie.

– Une fonction $x : I \rightarrow U$ est solution du problème de Cauchy $(*_0)$ si et seulement si $x \in E$ et $\Phi(x) = x$.

– L'espace E , muni de la distance de la convergence uniforme définie par $d(y, z) = \sup_I \|y(t) - z(t)\|$, est complet.

Preuve – Le choix de ε assure que, pour tous $x \in E$ et $t \in I$, on a

$$\|\Phi(x)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right\| \leq M\varepsilon \leq R,$$

où $M = \sup_C \|f\|$. Il suit que $\Phi(x)$, définie et continue sur I , est à valeurs dans la boule fermée $\overline{B}(x_0, R)$.

– Une solution du problème de Cauchy $(*_0)$ définie sur I est à valeurs dans la boule ouverte $B(x_0, R)$ (lemme 3.9), donc a fortiori dans $\overline{B}(x_0, R)$. On conclut avec le lemme 3.13.

– On a pris soin de travailler avec la boule fermée $\overline{B}(x_0, R) \subset \mathbb{R}^n$ (même si on sait que notre solution prendra ses valeurs dans la boule ouverte...). Cette boule fermée est complète. Ceci assure que l'espace métrique (E, d) est complet. \square

Nous avons donc ramené la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz 3.11 à la recherche d'un point fixe pour la transformation Φ .

Définition 3.15 Application strictement contractante

Soit (E, d) un espace métrique. Une transformation $\Phi : E \rightarrow E$ est dite strictement contractante si elle est α -lipschitzienne pour une constante de Lipschitz $\alpha < 1$.

Rappel 3.16 Théorème du point fixe de Picard

Soit (E, d) un espace métrique complet. Si une transformation $\Phi : E \rightarrow E$ est strictement contractante, ou plus généralement si elle possède une itérée strictement contractante, elle admet un unique point fixe.

La dernière étape de la preuve du théorème 3.11 consiste à montrer que Φ a une itérée contractante. Cela résultera du lemme suivant.

Lemme 3.17 Soient $y, z \in E$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a

$$\|\Phi^p(y)(t) - \Phi^p(z)(t)\| \leq \frac{|t - t_0|^p}{p!} k^p d(y, z) \quad \text{pour tout } t \in I. \quad (\mathcal{P}_p)$$

Preuve La preuve se fait par récurrence sur p . Nous l'écrivons pour $t \geq t_0$.

La propriété (\mathcal{P}_0) est vraie. Supposons la propriété (\mathcal{P}_p) vraie. On a alors, pour tous $y, z \in E$ et $t \in I$ avec $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned} \|\Phi^{p+1}(y)(t) - \Phi^{p+1}(z)(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, \Phi^p(y)(s)) - f(s, \Phi^p(z)(s))\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t k \frac{|s - t_0|^p}{p!} k^p d(y, z) ds \\ &\leq k^{p+1} \frac{|t - t_0|^{p+1}}{(p+1)!} d(y, z). \end{aligned}$$

□

Preuve du théorème 3.11 Il suit du lemme 3.17 que, pour deux applications $y, z \in E$, un instant $t \in I$ et un entier $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\|\Phi^p(y)(t) - \Phi^p(z)(t)\| \leq \frac{|t - t_0|^p}{p!} k^p d(y, z) \leq \frac{k^p \varepsilon^p}{p!} d(y, z).$$

Lorsque p est assez grand, $k^p \varepsilon^p < p!$, et donc $\Phi^p : E \rightarrow E$ est strictement contractante. Le théorème du point fixe de Picard 3.16 s'applique donc pour montrer que l'application Φ possède un unique point fixe. Il suit des lemmes 3.9 et 3.13 que cet unique point fixe est l'unique solution du problème de Cauchy $(*_0)$ définie sur l'intervalle I . Le théorème 3.11 est donc prouvé. □

Remarque 3.18 Choisissons $0 < \varepsilon_1 < \inf(\varepsilon, 1/k)$, et un intervalle I tel que $t_0 \in I \subset]t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1[$. Avec $E = C^0(I, \overline{B}(x_0, R))$, l'application $\Phi : E \rightarrow E$ est bien définie, et est strictement contractante puisqu'alors

$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\| ds \leq k\varepsilon_1 d(y, z).$$

Le théorème de Picard s'applique donc comme ci-dessus pour montrer l'existence et l'unicité des solutions définies sur des intervalles ouverts I qui vérifient $t_0 \in I \subset]t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1[$. Cela simplifie la preuve précédente (on n'a plus besoin de considérer les itérées de Φ). Mais le minorant ε_1 obtenu pour le temps de vie des solutions dépend alors de la constante de Lipschitz k .

Montrons maintenant qu'il y a unicité au problème de Cauchy.

Théorème 3.19 Théorème de Cauchy-Lipschitz (unicité globale)

Soit $f : J \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. On suppose de plus que f est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Alors, deux solutions

$$x_1 : I_1 \rightarrow U \quad \text{et} \quad x_2 : I_2 \rightarrow U$$

de l'équation $x' = f(t, x)$, de même condition initiale $(t_0, x_0) \in J \times U$, coïncident sur leur domaine commun de définition $I_1 \cap I_2$.

Preuve Il s'agit de passer de l'unicité locale (théorème 3.11) à l'unicité globale. Ceci va découler d'un argument de connexité. Pour cela, on introduit

$$A = \{t \in I_1 \cap I_2 \mid x_1(t) = x_2(t)\},$$

qui est l'ensemble des instants où les deux solutions coïncident et on souhaite montrer que $A = I_1 \cap I_2$. On constate que :

- A est non vide car il contient t_0 ;
- $A \subset I_1 \cap I_2$ est fermé dans $I_1 \cap I_2$ car x_1 et x_2 sont continues sur $I_1 \cap I_2$;

- A est ouvert (dans \mathbb{R} et *a fortiori* dans $I_1 \cap I_2$) : c'est le théorème 3.11 (unicité locale) que l'on applique à chaque condition initiale (t, y) où $t \in A$ et $y = x_1(t) = x_2(t)$.

On conclut par connexité de l'intervalle que $A = I_1 \cap I_2$. \square

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz, tel qu'énoncé au début de ce chapitre.

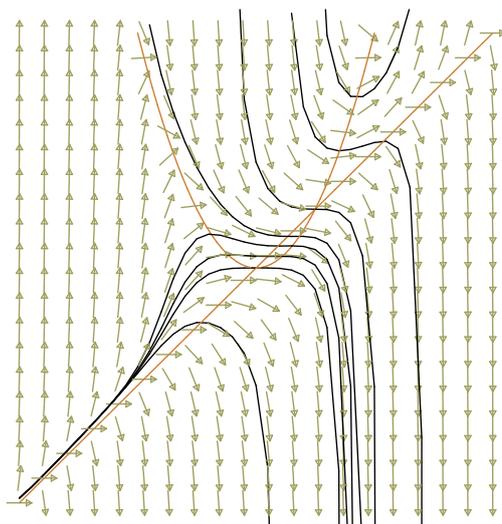
Preuve du théorème 3.6 Le théorème 3.11 assure l'existence d'au moins une solution au problème de Cauchy. L'énoncé précédent 3.19 dit qu'il y a unicité au problème de Cauchy. Il reste à invoquer le lemme 1.7 pour conclure à l'existence d'une unique solution maximale pour ce problème de Cauchy, dont toute autre solution s'obtient par restriction. \square

Remarque 3.20 – Par la suite, on s'intéressera donc exclusivement aux solutions maximales. Attention : on a déjà dit qu'une solution maximale n'est pas toujours globale.

– Reformulons plus géométriquement le théorème de Cauchy-Lipschitz. Il nous dit que, si $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est suffisamment régulière :

- par tout point du domaine $J \times U$, il passe un graphe de solution maximale de $x' = f(t, x)$ (*);
- deux graphes de solutions maximales distinctes ne se coupent pas.

En d'autres termes, les graphes des solutions maximales de (*) constituent une partition de $J \times U$.



Partition du plan en graphes des solutions maximales de l'équation différentielle scalaire $x' = (t - x)(x - t^2)$.

Exercice 3.21 Symétries

Soit $n \geq 1$. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaisant les hypothèses de Cauchy-Lipschitz. Donner les conditions nécessaires et suffisantes sur f pour que, pour toute solution $t \in I \rightarrow x(t)$ de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$, les fonctions définies par $y : t \in I \rightarrow -x(t)$ (resp. $z : t \in (-I) \rightarrow x(-t)$ ou $w : t \in (-I) \rightarrow -x(-t)$) soient également solutions. Comment ces symétries se traduisent-elles géométriquement sur l'ensemble des graphes $\{(t, x(t))\} \subset J \times U$ des solutions maximales ?

On retrouvera ces questions de symétrie (pour un champ de vecteurs autonome cette fois-ci) à l'exercice 8.3. Voir également l'exercice 3.26.

E Appendice : équations différentielles et coordonnées polaires

En passant en coordonnées polaires, il sera possible de ramener l'étude d'une équation différentielle dans le plan possédant une symétrie par rotation autour de l'origine à celle d'une équation différentielle scalaire.

E.1 Relèvement de l'argument

On commence par un petit lemme de variable complexe.

Lemme 3.22 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $t \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow z(t) \in \mathbb{C}^*$ une fonction de classe C^1 ne s'annulant pas.*

Il existe une fonction $t \in I \rightarrow u(t) \in \mathbb{C}$ de classe C^1 telle que, pour tout $t \in I$, $z(t) = e^{u(t)}$. Deux telles fonctions u diffèrent de $2ik\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Remarque 3.23 – Ecrivons $u(t) = \alpha(t) + i\theta(t)$, avec α et θ à valeurs réelles. On a alors $z(t) = e^{u(t)} = e^{\alpha(t)} e^{i\theta(t)}$. Autrement dit, on a :

- $r(t) := |z(t)| = e^{\alpha(t)}$, i.e. $\alpha(t) = \log |z(t)|$ (qui est bien de classe C^1)
- tandis que θ est une détermination C^1 de l'argument de z .

– Soit $z \in I \rightarrow \mathbb{C}^*$, que l'on suppose maintenant simplement continue. On peut encore montrer qu'il existe une détermination continue de l'argument de z , mais la preuve est un peu plus délicate.

Preuve On choisit un instant $t_0 \in I$. Une fonction $t \in I \rightarrow u(t) \in \mathbb{C}$ de classe C^1 satisfait $z(t) = e^{u(t)}$ si et seulement si $z(t) e^{-u(t)} \equiv 1$ ou encore, si et seulement si

$$\begin{cases} z(t_0) = e^{u(t_0)} \\ z'(t) = u'(t) z(t). \end{cases}$$

On sait que l'application exponentielle complexe $w \in \mathbb{C} \rightarrow e^w \in \mathbb{C}^*$ est surjective (voir le cours de Fonctions Holomorphes). On peut donc choisir un complexe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $e^\alpha = z(t_0)$. Soit alors $u : I \rightarrow \mathbb{C}$ la primitive de la fonction continue $z'/z : I \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $u(t_0) = \alpha$: elle convient. \square

Remarque 3.24 La démonstration ci-dessus permet également de prouver la surjectivité de l'application exponentielle $w \in \mathbb{C} \rightarrow e^w \in \mathbb{C}^*$. Puisque $1 = e^0$, on sait que 1 est dans l'image de l'exponentielle. Soient alors $z_1 \in \mathbb{C}^*$ et $t \in [0, 1] \rightarrow z(t) \in \mathbb{C}^*$ un chemin de classe C^1 tel que $z(0) = 1$ et $z(1) = z_1$ (faire un dessin). La preuve ci-dessus (qui n'utilisait la surjectivité de l'exponentielle que pour amorcer la pompe, c'est-à-dire pour trouver $u(t_0)$) montre qu'il existe une application $t \in [0, 1] \rightarrow u(t) \in \mathbb{C}$ de classe C^1 avec $z(t) = e^{u(t)}$. En particulier $z_1 = e^{u(1)}$.

E.2 Passer en polaires dans une équation différentielle

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on notera $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. On s'intéresse à une équation différentielle d'inconnue $t \in I \rightarrow (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$, qui s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = a(t, r(t)) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + b(t, r(t)) \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} \quad (*)$$

avec a et b définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On suppose de plus que l'équation différentielle (*) vérifie les hypothèses de Cauchy-Lipschitz.

On verra dans l'exercice 3.26 que le fait que l'équation différentielle s'écrive sous la forme indiquée revient à dire qu'elle est invariante par rotations.

On remarque que la fonction constante nulle est solution particulière. Soit $t \in I \rightarrow (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ une solution de (*) non identiquement nulle. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, elle ne s'annule donc en aucun instant. Nous allons donc pouvoir l'écrire en coordonnées polaires.

Identifions le plan \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} et introduisons la fonction $t \in I \rightarrow z(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{C}^*$, qui est de classe C^1 . On écrit, en utilisant le lemme 3.22,

$$z(t) = r(t) e^{i\theta(t)}$$

avec r et θ de classe C^1 . En dérivant, il vient

$$z'(t) = r'(t) e^{i\theta(t)} + \theta'(t) r(t) i e^{i\theta(t)}.$$

On observe que l'équation (*) se réécrit

$$z'(t) = a(t, r) r(t) e^{i\theta(t)} + b(t, r) r(t) i e^{i\theta(t)}.$$

Pour chaque $t \in I$, $(e^{i\theta(t)}, i e^{i\theta(t)})$ constitue une base de \mathbb{R}^2 . Il suit donc que $z = (x, y)$ est solution de (*) si et seulement si

$$r'(t) = a(t, r(t)) r(t) \quad \text{et} \quad \theta'(t) = b(t, r(t)) \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Nous avons donc ramené la résolution du système différentiel (*) sur \mathbb{R}^2 à la résolution de l'équation différentielle scalaire

$$r'(t) = a(t, r(t)) r(t). \quad (e)$$

Une fois obtenue une solution $t \rightarrow r(t)$ de (e), on obtient en effet $\theta = \int b(t, r(t))$ par quadrature.

Exercice 3.25 Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x - y(x^2 + y^2) \\ y' = y + x(x^2 + y^2) \end{cases}$$

en passant en coordonnées polaires. On prendra garde de bien justifier les calculs.

Dans l'exercice suivant, on étudie sous quelle condition une équation différentielle dans le plan est invariante par rotations.

Exercice 3.26 On munit \mathbb{R}^2 de sa structure euclidienne canonique.

Soit $m' = f(t, m)$ (*) une équation différentielle dans \mathbb{R}^2 , avec $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 . On dit qu'elle est invariante par rotations lorsque, pour toute rotation $A \in \text{SO}(2)$ et toute solution $t \in I \rightarrow m(t) \in \mathbb{R}^2$ de l'équation différentielle (*), l'application $t \in I \rightarrow Am(t) \in \mathbb{R}^2$ est également solution de (*).

1. Montrer que l'équation différentielle (*) est invariante par rotations si et seulement si, pour toute $A \in \text{SO}(2)$ et tout $(t, m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, on a l'égalité $f(t, Am) = Af(t, m)$.
2. Montrer que l'égalité $f(t, Am) = Af(t, m)$ pour tout $(t, m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ équivaut à dire qu'il existe deux fonctions $a, b : \mathbb{R} \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(t, m) = a(t, \|m\|)m + b(t, \|m\|)Jm$$

pour tout $(t, m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, où $J : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (-y, x) \in \mathbb{R}^2$ désigne la rotation d'angle $\pi/2$.

4. Temps de vie, solutions maximales

A Uniformité du temps de vie des solutions

On considère l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ (*), où la fonction $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz.

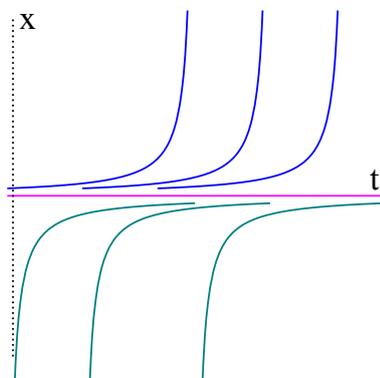
Pour chaque condition initiale $(t_0, x_0) \in J \times U$, on a donc une unique solution maximale au problème de Cauchy, qui est définie sur un intervalle $\mathcal{I}(t_0, x_0) \subset J$ (théorème 3.6). On veut comprendre comment cet intervalle $\mathcal{I}(t_0, x_0)$ dépend du choix de la condition initiale (t_0, x_0) .

Lemme 4.1 *On suppose que la fonction $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue, et est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable (hypothèse de Cauchy-Lipschitz). Pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in J \times U$, il existe*

- un voisinage V de (t_0, x_0) dans $J \times U$
- et un réel $\varepsilon > 0$

tels que, pour toute condition initiale $(t_1, x_1) \in V$, la solution maximale de $x' = f(t, x)$ () au problème de Cauchy correspondant soit définie sur un intervalle contenant $]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[$ (de taille fixe).*

Ce lemme signifie que, lorsqu'on modifie la condition initiale, le temps de vie reste (localement) minoré, assertion que nous illustrons ci-dessous sur l'un de nos exemples favoris.



L'équation différentielle $x' = x^2$

Preuve Soit $\mathcal{C} = [t_0 - 2\varepsilon, t_0 + 2\varepsilon] \times \overline{B}(x_0, 2R) \subset J \times U$ un cylindre de sécurité centré en (t_0, x_0) , et sur lequel f est k -lipschitzienne par rapport à la seconde variable. On introduit alors le cylindre “de taille moitié”

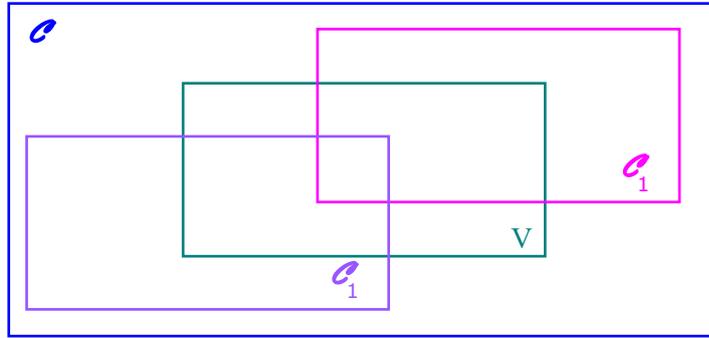
$$V = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B}(x_0, R)$$

et on observe que, pour tout $(t_1, x_1) \in V$, le cylindre

$$\mathcal{C}_1 = [t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon] \times \overline{B}(x_1, R) \subset \mathcal{C}$$

est un cylindre de sécurité centré en (t_1, x_1) . Il existe donc une solution de $(*)$, de condition initiale (t_1, x_1) et définie sur $]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[$ (théorème 3.11).

□



Le gros cylindre de sécurité \mathcal{C} , le petit cylindre V
et deux cylindres de sécurité \mathcal{C}_1

Corollaire 4.2 Soit $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application satisfaisant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. Soit $\mathcal{K} \subset J \times U$ un compact.

Il existe $\alpha = \alpha(\mathcal{K}) > 0$ tel que toute solution maximale de $x' = f(t, x)$ de condition initiale $(t_0, x_0) \in \mathcal{K}$ est au moins définie sur tout l'intervalle $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$.

Preuve C'est une conséquence immédiate du lemme précédent. On recouvre le compact \mathcal{K} par un nombre fini d'ouverts $V_i \subset J \times U$ pour lesquels, pour toute condition initiale $(t, x) \in V_i$, le temps de vie de la solution maximale de $(*)$ de condition initiale (t, x) est minoré par $\varepsilon_i > 0$. Prendre $\alpha = \inf \varepsilon_i$, qui est strictement positif par construction. □

B Le lemme des bouts

Il nous faut maintenant apprendre à reconnaître les solutions maximales d'une équation différentielle.

Théorème 4.3 Lemme des bouts, ou lemme de sortie des compacts

Soit $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$. On suppose que l'application f satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. Soit $x :]t^-, t^+[\rightarrow U$ une solution de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ (*). On a donc $]t^-, t^+[\subset J$.

La solution x est maximale à droite si et seulement si

- soit $t^+ = \sup J$;
- soit $t^+ < \sup J$ et, lorsque $t \rightarrow t^+$, $x(t)$ sort définitivement de tout compact de U . Ceci signifie que, pour tout compact $K \subset U$, il existe un instant $a_K \in]t^-, t^+[$ tel que $x(t) \notin K$ dès que $t \in [a_K, t^+[$.

De même dans le passé (solutions maximales à gauche).

C'est bien sûr la partie directe de cet énoncé qui est intéressante. Avant de passer à la démonstration, il faut comprendre ce que signifie "sortir définitivement de tout compact". Pour cela, voyons quelques exemples.

Exercice 4.4 Soient $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaisant les hypothèses de Cauchy-Lipschitz et $x :]t^-, t^+[\subset J \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ une solution maximale à droite de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$. Dédurre du théorème 4.3 que :

- $J = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}^n$ (pour $n \geq 1$) : $t^+ < \infty \Rightarrow \|x(t)\| \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow t^+$.
- $J = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}$: $t^+ < \infty \Rightarrow x(t) \rightarrow +\infty$, ou bien $x(t) \rightarrow -\infty$, quand $t \rightarrow t^+$.
- $J =]-\infty, 0[$, $U = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ (pour $n \geq 1$) : $t^+ < 0 \Rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 1$ lorsque $t \rightarrow t^+$.
- $J = \mathbb{R}$, $U =]0, 1[$: $t^+ < \infty \Rightarrow x(t) \rightarrow 0$ ou $x(t) \rightarrow 1$ lorsque $t \rightarrow t^+$.

Preuve du théorème 4.3.

Pour montrer la partie directe du lemme des bouts, nous passons par la contraposée. Travaillons dans le futur. Soit $x :]t^-, t^+[\subset J \rightarrow U$ une solution de (*). On suppose que $t^+ < \sup J$, et qu'il existe un compact $K \subset U$, ainsi qu'une suite d'instant $t_n \rightarrow t^+$, avec $x(t_n) \in K$. Notons \tilde{x} la solution maximale qui prolonge x . On veut voir que x n'est pas maximale dans le futur, c'est-à-dire que \tilde{x} est définie au-delà de t^+ .

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $x(t_n)$, qui prend ses valeurs dans le compact K , converge vers un point $\xi \in K$. L'ensemble $\mathcal{K} := \{(t_n, x(t_n))\} \cup \{(t^+, \xi)\}$ (une suite et sa limite) constitue donc un compact de $J \times U$. Le lemme sur l'uniformité du temps de vie assure donc qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout n , la solution maximale de (*) de condition initiale $(t_n, x(t_n))$ (qui n'est autre que \tilde{x}) est définie au moins sur l'intervalle $]t_n - \alpha, t_n + \alpha[$. Pour n assez grand, $t_n + \alpha > t^+$. La solution x n'est donc pas maximale dans le futur.

$$\overline{t_- \quad \quad \quad t_n - \alpha \quad \quad \quad t_n \quad \quad \quad t_n + \alpha \quad \quad \quad t_+ \quad \quad \quad t_+ + \alpha}$$

Démonstration du lemme des bouts

Réciproquement, on suppose que $x :]t^-, t^+[\subset J \rightarrow U$ est une solution de (*) qui n'est pas maximale à droite. On a donc $t^+ < \sup J$. On note $\tilde{x} : \mathcal{I} \rightarrow U$ la solution maximale qui prolonge x . Pour $t_0 \in]t^-, t^+[$, on a donc

$$x([t_0, t^+]) \subset \tilde{x}([t_0, t^+]) =: K \subset U,$$

où $K \subset U$ est un compact de U comme image continue d'un compact.

On laisse le lecteur le soin de prouver le résultat dans le passé, soit en adaptant la preuve précédente, soit en utilisant de nouveau l'exercice 3.10 (renversement du temps). \square

Exemple 4.5 Soit l'équation différentielle scalaire

$$x'(t) = (x^2(t) - 1) \sinh t + t^5 \sin(\pi x).$$

On ne voit pas trop comment la résoudre explicitement... Mais on remarque que $x \equiv 1$ et $x \equiv -1$ sont solutions particulières. Il suit qu'une solution de condition initiale (t_0, x_0) avec $x_0 \in]-1, 1[$ reste piégée dans cet intervalle (théorème des valeurs intermédiaires, et unicité de Cauchy-Lipschitz). Elle est donc définie sur tout \mathbb{R} (lemme des bouts).

Exemple 4.6 Soit maintenant une solution $t \in I \rightarrow (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ du système différentiel

$$\begin{cases} x' = x - y(x^2 + y^2) \\ y' = y + x(x^2 + y^2). \end{cases}$$

On observe que, si l'on pose $f(t) = x^2(t) + y^2(t)$, on a

$$(1/2)f'(t) = x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = x^2(t) + y^2(t),$$

soit $f'(t) = 2f(t)$ et donc $f(t) = f(t_0)e^{2(t-t_0)}$ pour tous $t, t_0 \in I$. Une solution quelconque de ce système différentiel reste donc bornée sur tout intervalle borné. Il suit du lemme des bouts que ses solutions maximales sont globales, c'est-à-dire définies sur \mathbb{R} .

Remarque 4.7 Le système différentiel de l'exemple 4.6 a été choisi pour illustrer simplement le lemme des bouts. Mais on peut le résoudre explicitement en passant en coordonnées polaires ! Voir l'exercice 3.25.

C Point limite pour une équation autonome

Nous proposons ici une illustration du lemme des bouts. Nous y reviendrons lorsque nous étudierons les équations différentielles autonomes dans le chapitre 8.

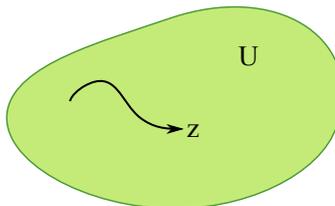
Proposition 4.8 Soit $x' = f(x)$ (*) une équation différentielle autonome, avec $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ localement lipschitzienne (par exemple de classe C^1).

Soit $x :]t^-, t^+[\rightarrow U$ une solution maximale de (*). On suppose que, lorsque $t \rightarrow t^+$, $x(t)$ converge vers un point $z \in U$.

Alors $t^+ = +\infty$ et $f(z) = 0$. Autrement dit la solution est globale dans le futur, et z est un point singulier : le champ s'annule au point z .

De même dans le passé.

Attention, dans cet énoncé il est indispensable de supposer que le point limite z appartient à l'ouvert U , et pas à son bord.



Preuve Lorsque $t \rightarrow t^+$, $x(t)$ converge dans U et donc $x(t)$ reste dans une partie compacte de U . Le théorème des bouts assure donc que $t^+ = +\infty$. Pour deux instants $t_0, t \in]t^-, +\infty[$, on a

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t x'(s) ds = \int_{t_0}^t f(x(s)) ds.$$

Puisque $x(t) - x(t_0) \rightarrow z - x(t_0)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, et comme l'intégrand a une limite $f(z)$ lorsque $s \rightarrow +\infty$, il suit que cette limite est nulle, soit $f(z) = 0$.

De nouveau, on laisse au lecteur le soin de prouver la propriété dans le passé. \square

5. Estimation et comparaison de solutions

Le lemme de Gronwall est un outil fondamental pour l'étude qualitative des équations différentielles. Il nous servira à estimer des solutions d'équations différentielles ou bien à comparer entre elles deux solutions, ou encore deux solutions approchées comme dans le chapitre 11.

A Lemme de Gronwall

Commençons par motiver l'énoncé du lemme de Gronwall. Soient k et b deux constantes, avec $k \neq 0$. La méthode de variation de la constante permet de montrer que toute solution maximale de l'équation différentielle linéaire scalaire $u' = ku + b$ vérifie, pour tous t et $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$u(t) = u(t_0) e^{k(t-t_0)} + b \frac{e^{k(t-t_0)} - 1}{k}.$$

Si l'on garde ce résultat en tête, l'énoncé suivant semble bien naturel.

Lemme 5.1 de Gronwall *Soient k et b deux constantes, avec $k > 0$. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que, pour tout $t \in I$, on ait*

$$\|y'(t)\| \leq k \|y(t)\| + b.$$

Alors, pour tous t et t_0 dans I , on a l'estimation

$$\|y(t)\| \leq \|y(t_0)\| e^{k|t-t_0|} + b \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}.$$

Remarque 5.2 Attention à ne pas oublier les valeurs absolues $|t - t_0|$ dans cet énoncé. Supposons pour simplifier que $b = 0$. Sous l'hypothèse faite (à savoir une majoration de la norme de y'), il est illusoire de vouloir montrer que $\|y(t)\|$ décroît : une majoration en $\|y(t)\| \leq \|y(t_0)\| e^{k(t-t_0)}$ (sans la valeur absolue) est donc absolument hors de question lorsque $t < t_0$!

Preuve Quitte à effectuer une translation, on pourra supposer que $t_0 = 0$. L'estimation de $\|y(t)\|$ dans le passé, c'est-à-dire pour $t < 0$, se déduira comme d'habitude de celle dans le futur en renversant le sens du temps. Poser en effet $z(t) = y(-t)$, qui vérifie encore $\|z'(t)\| \leq k \|z(t)\| + b$.

Soit donc $t \in I$, avec $t \geq 0$. On souhaite majorer $\|y(t)\|$. La première chose à faire est d'exprimer que $y(t) = y(0) + \int_0^t y'(s) ds$. On en déduit, d'abord par l'inégalité triangulaire puis en utilisant l'hypothèse, que

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq \|y(0)\| + \int_0^t \|y'(s)\| ds \\ &\leq \|y(0)\| + k \int_0^t \|y(s)\| ds + bt. \end{aligned} \quad (5.1)$$

A ce stade, on a obtenu une majoration de $\|y(t)\|$ qui fait intervenir tous les $\|y(s)\|$ pour $s \in [0, t]$. Ce n'est pas ce qu'on veut, mais on observe que, en posant $v(t) := \int_0^t \|y(s)\| ds$, la fonction v est de classe C^1 avec $v'(t) = \|y(t)\|$. Ainsi l'inégalité (5.1) se réécrit

$$v'(t) - kv(t) \leq \|y(0)\| + bt. \quad (5.2)$$

On est sauvés! On procède en effet maintenant comme dans la méthode de variation de la constante en multipliant l'inégalité (5.2) par e^{-kt} , pour obtenir :

$$(v(t) e^{-kt})' \leq (\|y(0)\| + bt) e^{-kt}.$$

On intègre cette inégalité entre 0 et t . Puisque $v(0) = 0$, il vient

$$v(t) e^{-kt} \leq \|y(0)\| \frac{1 - e^{-kt}}{k} + b \frac{1 - (1 + kt)e^{-kt}}{k^2}.$$

Le résultat suit en utilisant cette majoration dans (5.1) (revenir à la définition de v et observer que, puisque $k > 0$, multiplier une inégalité par k conserve bien le sens de cette inégalité). \square

Exercice 5.3 Lemme de Gronwall, forme intégrale

S'inspirer de la preuve précédente pour montrer le résultat suivant.

Soient $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : [a, b] \rightarrow [0, \infty[$ des fonctions continues et $k \geq 0$ une constante positive. On suppose que, pour tout $t \in [a, b]$, on a la majoration

$$y(t) \leq k + \int_a^t \psi(s)y(s) ds.$$

Alors, pour tout $t \in [a, b]$, on peut majorer $y(t)$ par

$$y(t) \leq k \exp\left(\int_a^t \psi(s) ds\right).$$

B Temps de vie des solutions

Dans ce paragraphe, nous utilisons le lemme de Gronwall conjointement avec le lemme des bouts pour estimer des temps de vie de solutions d'équations différentielles.

Proposition 5.4 Existence globale en croissance sous-linéaire

Soit $f : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaisant les hypothèses de Cauchy-Lipschitz.

On suppose qu'il existe deux fonctions continues α et $\beta : J \rightarrow [0, \infty[$ telles que, pour tout $(t, x) \in J \times \mathbb{R}^n$, on ait la majoration

$$\|f(t, x)\| \leq \alpha(t) \|x\| + \beta(t).$$

Alors, les solutions maximales de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ (*) sont globales, c'est-à-dire définies sur J tout entier.

Il est indispensable de supposer dans cet énoncé que $U = \mathbb{R}^n$. Sinon, il est facile de construire des contre-exemples !

Preuve Soit $x :]t^-, t^+[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de (*). On suppose par exemple que $t^+ < \sup J$ (et donc $t^+ < \infty$), et on va montrer que x n'est pas maximale dans le futur. Le raisonnement serait le même dans le passé.

D'après le lemme des bouts, et puisque $U = \mathbb{R}^n$, il suffit pour cela de montrer que la solution x est bornée au voisinage de t^+ . Ainsi, elle reste confinée dans un compact de \mathbb{R}^n au voisinage de t^+ et elle n'est donc pas maximale.

A cet effet, on fixe un instant $t_0 \in]t^-, t^+[$. Les fonctions continues α et β sont bornées sur le compact $[t_0, t^+] \subset J$. On introduit,

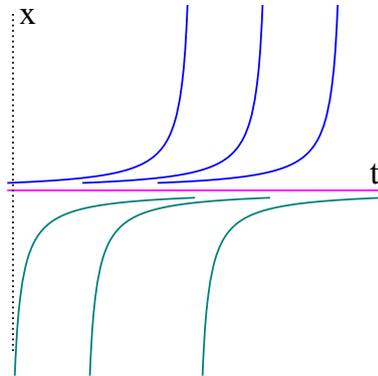
$$\sup_{[t_0, t^+]} \alpha = k, \quad \sup_{[t_0, t^+]} \beta = b,$$

de sorte qu'on a

$$\|x'(t)\| = \|f(t, x(t))\| \leq \alpha(t) \|x(t)\| + \beta(t) \leq k \|x(t)\| + b$$

pour tout $t \in [t_0, t^+]$. On conclut avec le lemme de Gronwall 5.1. \square

Remarque 5.5 Par contraste avec la proposition précédente, les solutions non identiquement nulles de l'équation scalaire $x' = |x|^p$ pour $p > 1$ ont toutes un temps de vie fini, soit dans le futur, soit dans le passé.



Solutions de $x' = x^2$

Corollaire 5.6 Existence globale pour les équations linéaires

Soient $t \in J \rightarrow A(t) \in M_n \mathbb{R}$ et $t \in J \rightarrow B(t) \in \mathbb{R}^n$ continues. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à l'équation différentielle linéaire

$$X'(t) = A(t) X(t) + B(t) \quad (*)$$

et toute solution maximale de (*) est globale.

Preuve On munit \mathbb{R}^n d'une norme, et $M_n \mathbb{R}$ de la norme subordonnée. L'application $f : (t, X) \in J \times \mathbb{R}^n \rightarrow A(t) X + B(t) \in \mathbb{R}^n$ est continue comme A et B , et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'espace X puisque A est localement bornée. De plus, f est à croissance sous-linéaire puisque

$$\|f(t, X)\| \leq \|A(t)\| \|X\| + \|B(t)\|.$$

La proposition 5.4 s'applique donc. \square

C Dépendance des solutions en fonction des conditions initiales

Dans cette section, nous utilisons le lemme de Gronwall pour comparer deux solutions de conditions initiales différentes.

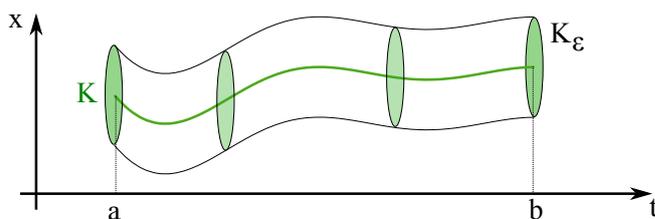
Soit toujours $f : J \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaisant les hypothèses de Cauchy-Lipschitz. Pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in J \times U$, il existe donc une unique solution maximale de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ (*) de condition initiale $x(t_0) = x_0$. On veut savoir comment cette solution maximale, et son domaine de définition, dépendent de la condition initiale.

Définition 5.7 Soit $x : [a, b] \rightarrow U$ la restriction d'une solution de (*) à un sous-intervalle compact de son intervalle de définition. Le graphe de x est

$$K := \{(t, x(t)) \mid t \in [a, b]\} \subset J \times U.$$

Pour $\varepsilon > 0$, le ε -tube autour de K est

$$K_\varepsilon = \{(t, y) \mid t \in [a, b], \|y - x(t)\| \leq \varepsilon\} \subset J \times \mathbb{R}^n.$$



Le graphe K et le tube K_ε

Lemme 5.8 Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le tube K_ε est une partie compacte de $J \times U$.

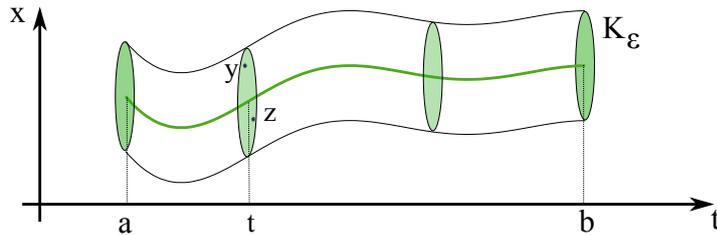
La restriction $f|_{K_\varepsilon}$ est alors lipschitzienne par rapport à la variable d'espace.

Preuve On munit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ de la distance $d((t, x), (s, y)) = |t - s| + \|x - y\|$. Le graphe $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est compact comme image continue d'un compact. Pour tout $\varepsilon > 0$, le tube

$$K_\varepsilon = \{(t, y) / t \in [a, b], \|y - x(t)\| \in [0, \varepsilon]\}$$

est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$: c'est donc un compact de \mathbb{R}^n . Le compact K ne rencontre pas ${}^c(J \times U)$. Pour $0 < \varepsilon < d(K, {}^c(J \times U))$ on aura donc bien $K_\varepsilon \subset J \times U$.

Notons que, lorsque f est supposée de classe C^1 , il suit du théorème des accroissements finis appliqué à chaque boule (convexe) $\bar{B}(x(t), \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$ que la restriction $f|_{K_\varepsilon}$ est k -lipschitzienne par rapport à la seconde variable x , avec $k = \sup_{K_\varepsilon} \|Df\|$.



Lorsque f satisfait simplement les hypothèses de Cauchy-Lipschitz, on procède comme suit pour montrer que $f|_{K_\varepsilon}$ est lipschitzienne par rapport à x . Pour chaque point $m = (s, y) \in K_\varepsilon$, on dispose d'un “gros” cylindre $I(m) \times \bar{B}(y, 2r(m)) \subset J \times U$ sur lequel f est lipschitzienne par rapport à la seconde variable, pour une constante $k(m)$. Les cylindres ouverts (plus petits) $\mathring{I}(m) \times B(y, r(m))$ recouvrent le compact K_ε lorsque m décrit K_ε . De ce recouvrement on extrait un sous-recouvrement fini du compact K_ε . Interviennent dans ce recouvrement les points m_1, \dots, m_p , les constantes de Lipschitz $k_i := k(m_i)$ (sur chacun des gros cylindres) et les rayons $r_i := r(m_i)$ ($1 \leq i \leq p$). On pose alors $k := \sup k_i < \infty$ et $r = \inf r_i > 0$.

Soient (t, y) et $(t, z) \in K_\varepsilon$. On veut estimer $\|f(t, y) - f(t, z)\|$. Supposons pour commencer $\|y - z\| < r$ (y et z proches). Le point (t, y) appartient à l'un des “petits” cylindres $\mathring{I}(m_i) \times B(m_i, r_i)$. Puisque $r \leq r_i$, les deux points (t, y) et (t, z) appartiennent au même “gros” cylindre $I(m_i) \times \bar{B}(m_i, 2r_i)$ sur lequel f est k_i lipschitzienne par rapport à la variable d'espace. Donc

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq k_i \|y - z\| \leq k \|y - z\|.$$

Supposons maintenant $\|y - z\| \geq r$ (y et z éloignés). Puisque K_ε est compact, la fonction f y est bornée par M . On a alors

$$\frac{\|f(t, y) - f(t, z)\|}{\|y - z\|} \leq \frac{2M}{r}.$$

Il suit que la restriction de f à K_ε est $\sup(k, \frac{2M}{r})$ -lipschitzienne par rapport à la seconde variable. \square

Enonçons maintenant le théorème que nous avons en vue.

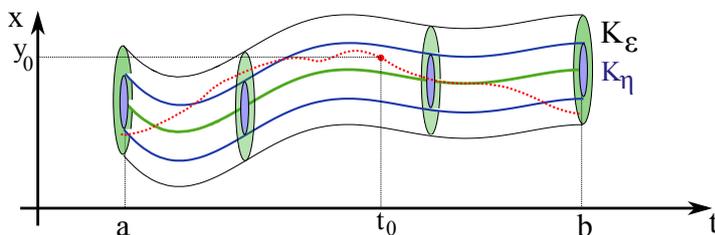
Théorème 5.9 *Dépendance C^0 des solutions par rapport aux conditions initiales*

Soit $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaisant les hypothèses de Cauchy-Lipschitz. Soit $x : [a, b] \rightarrow U$ la restriction d'une solution de $x' = f(t, x)$ (*) à un sous-intervalle compact $[a, b] \subset J$ de son domaine de définition.

Pour tout $\varepsilon > 0$ tel que le ε -tube K_ε autour de la trajectoire de x soit inclus dans $J \times U$, il existe $0 < \eta < \varepsilon$ tel que si y est une solution maximale de (*) de condition initiale $(t_0, y_0) \in K_\eta$:

- y est définie sur un intervalle ouvert contenant $[a, b]$
- pour tout $t \in [a, b]$, on a $(t, y(t)) \in K_\varepsilon$, autrement dit,

$$\sup_{t \in [a, b]} \|x(t) - y(t)\| \leq \varepsilon.$$



En vert, la solution de référence.

En rouge, une solution de condition initiale dans K_η

Remarque 5.10 Il est indispensable de travailler avec un intervalle compact. Penser à l'équation différentielle $x' = x^2$. La solution nulle est globale, les autres pas. L'écart entre deux solutions distinctes n'est pas majoré.

Preuve Le lemme 5.8 assure qu'il existe $k > 0$ tel que la restriction de f au tube K_ε est k -lipschitzienne par rapport à la seconde variable.

Soit $0 < \eta < \varepsilon$, $(t_0, y_0) \in K_\eta$ et $y : I \rightarrow U$ la solution maximale de (*) de condition initiale (t_0, y_0) . Travaillons dans le futur de t_0 (on procéderait de même dans le passé de t_0). On veut voir que, si η est assez petit :

- $\sup I > b$

— $\|x(t) - y(t)\| \leq \varepsilon$ lorsque $t \in [t_0, b]$.

• On va d'abord montrer que, si η est assez petit, on a

$$t \in [t_0, b] \cap I \Rightarrow \|x(t) - y(t)\| < \varepsilon.$$

Si ce n'est pas le cas, on introduit le premier instant dans le futur de t_0 où $(t, y(t))$ est sur le bord du tube K_ε , soit

$$t_1 := \inf \{t \in [t_0, b] \cap I \mid \|x(t) - y(t)\| \geq \varepsilon\}.$$

On a donc $\|x(t_1) - y(t_1)\| = \varepsilon$ tandis que $\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon$ pour tout $t \in [t_0, t_1[$. Pour tout $t \in [t_0, t_1]$, le point $(t, y(t))$ est encore dans le tube K_ε et donc

$$\|x'(t) - y'(t)\| = \|f(t, x(t)) - f(t, y(t))\| \leq k\|x(t) - y(t)\|.$$

Il suit alors du lemme de Gronwall 5.1 que

$$\|x(t_1) - y(t_1)\| \leq e^{k(t_1 - t_0)} \|x(t_0) - y(t_0)\| \leq e^{k(b-a)} \eta.$$

Si l'on choisit $\eta < \varepsilon e^{-k(b-a)}$ (qui convient également dans le passé), le résultat est acquis.

• Soit donc $\eta < \varepsilon e^{-k(b-a)}$ et supposons, par l'absurde, que $\sup I \leq b$. Lorsque $t \rightarrow \sup I$, le graphe de la solution y , soit $\{(t, y(t)) \mid t \in [t_0, \sup I]\}$, reste confiné dans le compact $K_\varepsilon \subset J \times U$. A fortiori, $y(t)$ reste dans le compact $p(K_\varepsilon) \subset U$, où $p : (t, x) \in J \times U \rightarrow x \in U$ est la projection sur la seconde coordonnée. On conclut avec le lemme des bouts que y n'est pas maximale à droite.

On a donc montré que, si η est assez petit, on a $\sup I > b$ et $\|x(t) - y(t)\| \leq \varepsilon$ lorsque $t \in [t_0, b]$, ce qui achève la démonstration dans le futur de t_0 . \square

D Dépendance par rapport au paramètre

On s'intéresse maintenant à une variante du problème précédent : on se donne une famille d'équations différentielles dépendant d'un paramètre, et on s'intéresse au comportement des solutions lorsqu'on fait varier le paramètre.

On se contente d'un énoncé très simple, qui sera utilisé dans le chapitre 6 (avec $n = 1$) pour étudier les sur et sous-solutions larges pour une équation scalaire.

Proposition 5.11 Soit $f : J \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue sur $J \times U$, et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'espace $x \in U$.

Soit $x_0 : [a, b] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ la restriction à un sous-intervalle compact de son intervalle de définition d'une solution de condition initiale $(\theta, \xi) \in [a, b] \times U$ de l'équation différentielle scalaire

$$x'_0 = f(t, x_0). \quad (*)$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^n$, on considère la solution maximale $x_\lambda : I_\lambda \rightarrow U$, de même condition initiale (θ, ξ) que x , de l'équation différentielle perturbée

$$x'_\lambda = f(t, x_\lambda) + \lambda. \quad (*_\lambda)$$

Alors :

- pour $\lambda \in \mathbb{R}^n$ assez petit, on a $[a, b] \subset I_\lambda$, c'est-à-dire que la solution x_λ est définie sur tout l'intervalle compact $[a, b]$
- $x_\lambda \rightarrow x_0$ uniformément sur $[a, b]$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$.

Preuve Nous allons recycler l'idée que nous avons utilisée dans le paragraphe 1.D pour ramener l'étude d'une équation différentielle quelconque à celle d'une équation différentielle autonome. En rajoutant le paramètre comme variable, nous allons cette fois-ci ramener la famille d'équations différentielles dépendant d'un paramètre à une simple équation différentielle.

Pour cela, on introduit l'application

$$\begin{aligned} F : J \times (U \times \mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ (t, x, \lambda) &\longrightarrow (f(t, x) + \lambda, 0) \end{aligned}$$

et l'équation différentielle d'inconnue $t \in I \rightarrow X(t) = (x(t), \lambda(t)) \in \mathbb{R}^{2n}$ qui lui est associée, soit :

$$X' = (x, \lambda)' = (f(t, x) + \lambda, 0) = F(t, X). \quad (\diamond)$$

Noter que, puisque f satisfait les hypothèses de Cauchy-Lipschitz, il en va de même pour F . On observe que $t \in I_\lambda \rightarrow X_\lambda(t) = (x_\lambda(t), \lambda) \in \mathbb{R}^{2n}$ est la solution maximale de (\diamond) de condition initiale $X_\lambda(\theta) = (\xi, \lambda)$.

Supposons x_0 ou, de façon équivalente, X_0 définie sur un intervalle compact $[a, b] \subset I_0$. Il suit alors du théorème 5.9 appliqué à l'équation (\diamond) pour la condition initiale $(\theta; \xi, 0)$ que, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit il existe $0 < \eta < \varepsilon$ tel qu'on ait, dès que $\|\lambda\| < \eta$:

- X_λ définie sur $[a, b]$
- $\sup_{t \in [a, b]} \|X_\lambda(t) - X_0(t)\| = \sup_{t \in [a, b]} \|x_\lambda(t) - x_0(t)\| + \|\lambda\| \leq \varepsilon$.

Il suit immédiatement que, pour $\|\lambda\|$ petit, la solution x_λ est définie sur tout l'intervalle $[a, b]$ et que, $x_\lambda \rightarrow x_0$ uniformément sur $[a, b]$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$. \square

Remarque 5.12 Le théorème 5.9 et la proposition 5.11 s'appliquent en particulier lorsque la donnée f est de classe C^1 .

6. Etudes qualitatives en dimension 1

Le thème de ce chapitre est l'étude d'une équation différentielle scalaire

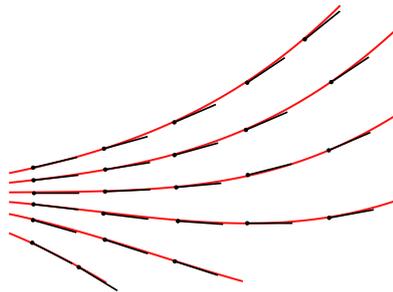
$$x' = f(t, x) \quad (*)$$

où $f : J \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. L'équation différentielle (*) admet donc, pour chaque condition initiale $(t_0, x_0) \in J \times U$, une unique solution maximale telle que $x(t_0) = x_0$.

On a déjà dit qu'il est exceptionnel de savoir résoudre explicitement l'équation différentielle (*). Nous proposons dans ce chapitre des méthodes géométriques spécifiques à la dimension 1 pour en mener l'étude qualitative.

A Régionnement

Dessignons, en chaque point $(t, x) \in J \times U$, l'élément de contact pour (*) (voir le chapitre 1). Ici nous sommes en dimension 1 : cet élément de contact est la droite affine passant par ce point (t, x) et dirigée par le vecteur $(1, f(t, x))$, donc de pente $f(t, x(t))$. Rappelons que résoudre l'équation différentielle (*) revient à trouver toutes les courbes $t \in I \subset J \rightarrow x(t) \in U$ de classe C^1 dont le graphe admet pour tangente, en chaque point $(t, x(t))$, l'élément de contact correspondant.



Éléments de contacts, et courbes intégrales

Plutôt que de dessiner les éléments de contact, on se contentera en pratique d'établir un régionnement selon le signe de f (qui est ici à valeurs réelles!). Voyons ce que cela donne sur un exemple.

Un exemple

Expliquons comment on peut démarrer l'étude qualitative de l'équation différentielle $x' = x^2(t)(x(t) - t)$. On pose $f(t, x) = x^2(x - t)$.

* On vérifie d'abord que f satisfait les hypothèses de Cauchy-Lipschitz. Ici, c'est bien le cas puisque f est de classe C^1 . Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit alors que les graphes des solutions maximales de (*) fournissent une partition du domaine $J \times U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Notre objectif est alors de dessiner cette famille de graphes avec le plus de précision possible.

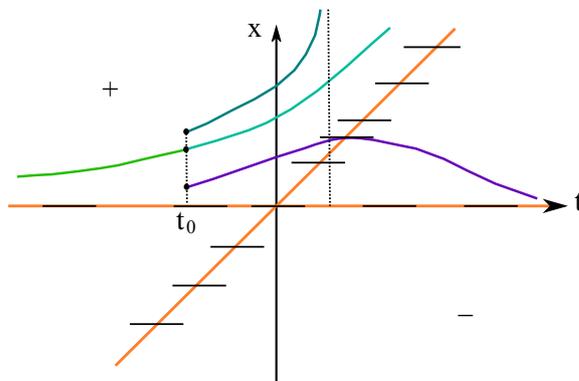
* Traçons alors l'isocline¹ de pente nulle, soit

$$\mathcal{I}_0 := \{(t, x) \in J \times U \mid f(t, x) = 0\}.$$

C'est l'ensemble des points de $J \times U$ où l'élément de contact est horizontal. Un point $(t_0, x_0) \in J \times U$ appartient à \mathcal{I}_0 lorsque le graphe d'une solution de condition initiale (t_0, x_0) admet, en ce point, une tangente horizontale.

Sur cet exemple \mathcal{I}_0 est la réunion de l'axe des abscisses et de la diagonale (en rouge/orange sur le dessin).

* On régionalise alors $J \times U$ selon le signe de f ; ce signe est constant sur chaque composante connexe de $(J \times U) \setminus \mathcal{I}_0$. Dans une zone où $f > 0$ les solutions de (*) seront croissantes. Dans une zone où $f < 0$, elles seront décroissantes.



Régionnement pour $x' = x^2(x - t)$

* On essaye de ensuite de repérer des solutions particulières (sur notre exemple, la solution nulle), et des symétries éventuelles pour réduire l'étude (ici, il n'y en a pas).

* A ce stade de l'étude, on a déjà une petite idée de l'allure que peuvent avoir les graphes des solutions maximales de (*).

1. du grec ἴσος pour "même" et κλίνω pour "pencher"

Intéressons-nous, pour fixer les idées, aux solutions maximales de condition initiale (t_0, x_0) avec $t_0 < 0$ et $x_0 > 0$. Puisque la fonction nulle est solution particulière, ces solutions ne s'annulent pas et donc gardent un signe constant (unicité dans Cauchy-Lipschitz).

On aura manifestement envie de montrer que de telles solutions sont globales dans le passé (penser au lemme des bouts). Puis, selon la condition initiale, que certaines d'entre elles sont toujours croissantes (parmi celles-ci, on se demandera lesquelles – s'il y en a – sont globales dans le futur et lesquelles – s'il y en a – ne le sont pas) et enfin que certaines sont globales, croissantes puis décroissantes (quelles sont alors leurs limites en $\pm\infty$?) Ces diverses possibilités sont indiquées sur le dessin.

Pour répondre à ces dernières questions de façon un peu systématique (sans refaire le même travail à chaque nouvelle équation), il est judicieux de dégager les notions de sur et de sous-solutions, spécifiques à la dimension 1. C'est le thème de ce chapitre. Pour des exemples concrets d'applications, voir le paragraphe 9.C où l'on étudie le portrait de phase d'un champ linéaire au voisinage d'un col, ainsi que le polycopié d'exercices.

B Sur-solutions et sous-solutions

Exceptionnellement, nous considérons dans ce paragraphe une équation différentielle

$$x' = f(t, x) \quad (*)$$

où la donnée $f : J \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est seulement continue.

Définition 6.1 Soit $A \subset J$ un sous-intervalle. On dit qu'une fonction dérivable $u : A \subset J \rightarrow U \subset \mathbb{R}$ est

- une sous-solution stricte de (*) si $u'(t) < f(t, u(t))$ pour tout $t \in A$;
- une sur-solution stricte de (*) si $u'(t) > f(t, u(t))$ pour tout $t \in A$;
- une sous-solution large (resp. une sur-solution large) de (*) si on a $u'(t) \leq f(t, u(t))$ (resp. $u'(t) \geq f(t, u(t))$) pour tout $t \in A$.

Remarque 6.2 • Dans la définition précédente, on ne demande pas que l'intervalle A soit ouvert : voir le théorème 6.8 puis l'exercice 6.11 pour une mise en pratique. Par exemple, la fonction définie par $t \in \mathbb{R} \rightarrow (1+t^2)^{1/3} \in \mathbb{R}$ est, pour l'équation différentielle

$$x' = x^3 - (1 + t^2) :$$

- une sur-solution large sur l'intervalle $A = [0, +\infty[$
- une sous-solution large sur l'intervalle $A =]-\infty, 0]$.

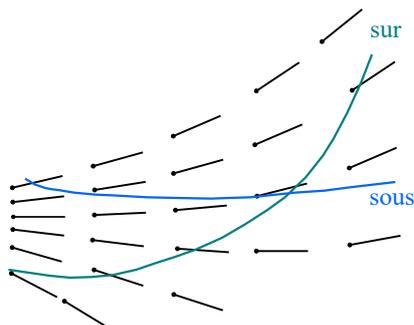
• On autorisera la fonction u à admettre une dérivée généralisée, égale à $\pm\infty$, en certains points (tangente verticale pour le graphe), avec bien entendu la convention $-\infty < \alpha < \infty$ pour tout réel α .

Par exemple, la fonction $u : t \in [0, \infty[\rightarrow \sqrt{t} \in \mathbb{R}$ est une sur-solution stricte pour l'équation différentielle $x' = x^2 - t$.

Interprétation géométrique

La fonction u est une sur-solution de (*) si, pour chaque instant $t \in A$, la tangente au graphe de u au point $(t, u(t))$ a une pente plus grande que la pente de l'élément de contact au point $(t, u(t))$.

Pour une sous-solution, la pente doit être plus petite.



Comme nous le verrons dans ce chapitre, il sera utile de pouvoir repérer facilement des sur- ou des sous-solutions pour l'équation différentielle à étudier. A cet effet, on peut faire la remarque suivante.

Remarque 6.3 Lorsque le graphe d'une fonction dérivable et croissante u est inclus dans l'isocline \mathcal{I}_0 , cette fonction u est une sur-solution.

De même lorsque u est dérivable et décroissante, et lorsque son graphe est inclus dans l'isocline \mathcal{I}_0 , alors u une sous-solution.

Reprenons l'exemple du paragraphe précédent A. La fonction définie par $u(t) = t$ a une dérivée strictement positive, donc est une sur-solution stricte pour $x' = x^2(x - t)$. Voir également les exemples de la remarque 6.2.

Nous passons maintenant à une série de théorèmes de comparaison *a priori* entre une solution de (*) et une sur- ou une sous-solution de cette équation différentielle. Dans les applications, il faut penser qu'on ne connaît pas explicitement la solution, mais qu'on a réussi à trouver des sur- et/ou des sous-solutions pour l'équation différentielle : c'est bien sûr beaucoup plus facile d'en construire (on demande une inégalité, pas une égalité) que de trouver des solutions!

Proposition 6.4 Comparaison dans le futur avec une sous-solution stricte

Soit $f : J \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $x : I \subset J \rightarrow U$ une solution de $x' = f(t, x)$ (*) et $u : A \rightarrow U$ une sous-solution stricte de (*). On suppose que $t_0 \in I \cap A$ et que $u(t_0) \leq x(t_0)$.

Alors, pour tout $t \in I \cap A$ avec $t > t_0$ (i.e. dans le futur de t_0 , tant que x et u sont simultanément définies) on a $u(t) < x(t)$.

Remarque 6.5 L'hypothèse que u est une sous-solution de (*) ne donne une information sur le signe de $u'(t) - x'(t)$ qu'aux instants où $u(t) = x(t)$ puisqu'on sait seulement que pour tout $t \in I$

$$u'(t) - x'(t) < f(t, u(t)) - f(t, x(t)),$$

et que l'on ne sait pas comparer $f(t, u)$ et $f(t, x)$... sauf lorsque $u = x$!

Preuve La preuve est élémentaire (développements limités à l'ordre 1). On l'écrit dans le cas où u admet une dérivée finie en chaque point (remarque 6.2). Le cas où u admet des dérivées égales à $\pm\infty$ est laissé au lecteur. On supposera que $\sup A > t_0$, sinon il n'y a rien à montrer.

* Commençons par montrer que $u(t) < x(t)$ dans le futur immédiat de t_0 (c'est-à-dire pour $t > t_0$ proche de t_0). Deux cas se présentent.

- Si $u(t_0) < x(t_0)$: l'inégalité stricte $u(t) < x(t)$ reste vraie sur un voisinage de t_0 par continuité de x et de u .
- Si $u(t_0) = x(t_0)$: dans ce cas, puisque u est une sous-solution stricte de (*), on a $u'(t_0) < f(t, u(t_0)) = f(t, x(t_0)) = x'(t_0)$. On a donc

$$\begin{aligned} u(t_0 + s) - x(t_0 + s) &= u(t_0) - x(t_0) + (u'(t_0) - x'(t_0))s + o(s) \\ &= [u'(t_0) - x'(t_0) + \varepsilon(s)]s < 0 \end{aligned}$$

pour $s > 0$ petit.

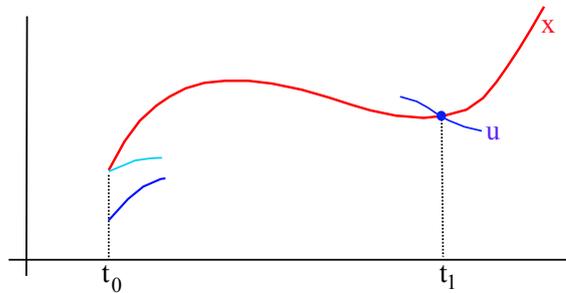
* On termine la preuve en procédant par l'absurde. On introduit l'ensemble

$$Z = \{t \in I \cap A \mid t > t_0, u(t) \geq x(t)\},$$

que l'on suppose non vide. L'ensemble Z est minoré par t_0 . On introduit $t_1 := \inf Z$. On vient de voir que $t_1 > t_0$, et on observe que $u(t_1) = x(t_1)$. On raisonne alors de nouveau comme dans la première partie. Il vient

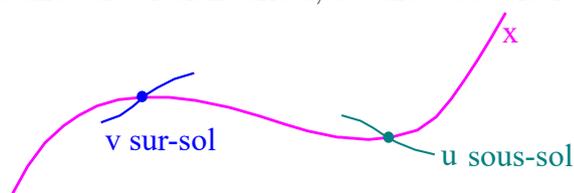
$$\begin{aligned} u(t_1 + s) - x(t_1 + s) &= u(t_1) - x(t_1) + (u'(t_1) - x'(t_1))s + o(s) \\ &= [u'(t_1) - x'(t_1) + \varepsilon(s)]s > 0 \end{aligned}$$

pour $s < 0$ petit car $u'(t_1) < f(t_1, u(t_1)) = f(t_1, x(t_1)) = x'(t_1)$. On aurait donc, dans le passé immédiat de t_1 , $u(t) > x(t)$: une contradiction avec la définition de t_1 . □



Comparaison dans le futur avec une sous-solution stricte

La même démonstration se décline pour comparer, dans le futur ou dans le passé, une solution de (*) avec une sur-ou une sous-solution stricte (c'est la proposition 6.6). Les vérifications sont laissées au lecteur qui est invité à garder en tête le croquis ci-dessous, qui indique ce qui se passe aux instants où une solution croise une sur-solution stricte, ou une sous-solution stricte.



x est une solution ; u est une sous-solution stricte, v une sur-solution stricte

Proposition 6.6 Les quatre théorèmes de comparaison (strict)

On suppose que $x : I \rightarrow U$ est une solution de (*) et que $u, v : A \rightarrow U$ sont dérivables. Soient $t_0, t \in I \cap A$.

– Dans le futur :

- u sous-solution stricte et $u(t_0) \leq x(t_0) \implies$ si $t > t_0$, on a $u(t) < x(t)$.
- v sur-solution stricte et $v(t_0) \geq x(t_0) \implies$ si $t > t_0$, on a $v(t) > x(t)$.

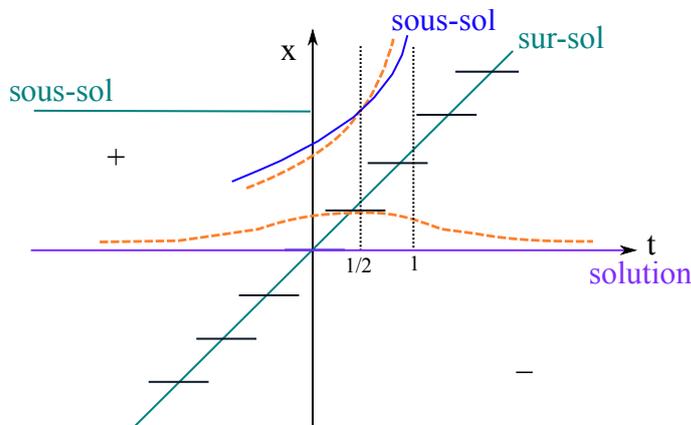
Dans le passé :

- u sous-solution stricte et $u(t_0) \geq x(t_0) \implies$ si $t < t_0$, on a $u(t) > x(t)$.
- v sur-solution stricte et $v(t_0) \leq x(t_0) \implies$ si $t < t_0$, on a $v(t) < x(t)$.

Exercice 6.7 On revient à l'équation différentielle $x' = x^2(x - t)$. Montrer que $t \in \mathbb{R} \rightarrow t \in \mathbb{R}$ est une sur-solution stricte. Montrer que $t \in]0, 1[\rightarrow (1 - t)^{-1} \in \mathbb{R}$ et $t \in]-\infty, 0[\rightarrow a \in \mathbb{R} (a > 0)$ sont des sous-solutions strictes.

La solution de condition initiale $x(1/2) = 2$ est-elle globale dans le futur ?

La solution de condition initiale $x(1/2) = 1/2$ est-elle globale dans le futur ?



Sur et sous-solutions strictes pour $x' = x^2(x - t)$

C Comparaison avec des sur/sous-solutions larges

Nous reprenons désormais nos hypothèses de régularité habituelles (de Cauchy-Lipschitz).

Théorème 6.8 Comparaison dans le futur avec une sous-solution large

Soit $f : J \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les hypothèses de Cauchy-Lipschitz.

Soient $x : I \subset J \rightarrow U$ une solution de $x' = f(t, x)$ (*).

Soit $u : A \subset J \rightarrow \mathbb{R}$ une sous-solution large de (*). On suppose que $t_0 \in I \cap A$, et que $u(t_0) \leq x(t_0)$.

Alors on a $u(t_1) \leq x(t_1)$ pour tout $t_1 \in I \cap A$ avec $t_0 \leq t_1$.

Autrement dit, si u minore x en t_0 , alors u minore x dans le futur de t_0 tant que u et x sont simultanément définies. Le théorème 6.8, comme son homologue 6.6, se décline en plusieurs variantes.

Exercice 6.9 Enoncer et démontrer les résultats correspondants lorsque u est une sur-solution large et/ou dans le passé. Pour les démonstrations on peut, par exemple, renverser le sens du temps.

Remarque 6.10 Remarquons que, lorsque le théorème de comparaison 6.8–6.9 s’applique, il y a unicité au problème de Cauchy pour (*). En effet, si x et y sont deux solutions de (*) de même condition initiale $x(t_0) = y(t_0)$, on peut faire jouer à x le rôle de la solution et à y le rôle de la sur-solution, ou bien de la sous-solution. Le théorème 6.8 (ainsi que les variantes de l’exercice 6.9) montre alors que $x = y$.

C’est pourquoi on a besoin, dans le théorème 6.8, d’une hypothèse de régularité plus forte sur f que dans la proposition 6.6 (où l’on demande seulement f continue).

Preuve du théorème 6.8

La preuve de la proposition 6.6 (comparaison avec des sur- et des sous-solutions strictes) ne permet plus de conclure lorsqu’on a affaire à des sur-ou sous-solutions larges.

Pour démontrer le théorème 6.8, on se ramène à la proposition 6.6 en perturbant l’équation différentielle (*). Pour cela on introduit, pour $\varepsilon > 0$, l’équation différentielle

$$y' = f_\varepsilon(t, y) := f(t, y) + \varepsilon \quad (*_\varepsilon).$$

La fonction u est maintenant une sous-solution stricte pour $(*_\varepsilon)$, puisque

$$u'(t) \leq f(t, u(t)) < f(t, u(t)) + \varepsilon = f_\varepsilon(t, u(t)).$$

On considère alors, pour chaque $\varepsilon > 0$, la solution maximale x_ε de $(*_\varepsilon)$ de même condition initiale $x_\varepsilon(t_0) = x(t_0) = x_0$ que x . Le théorème de dépendance des solutions par rapport au paramètre (proposition 5.11) affirme que :

- lorsque ε est assez petit, la solution x_ε est définie sur tout l’intervalle $[t_0, t_1]$
- x_ε converge uniformément vers x sur l’intervalle compact $[t_0, t_1]$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

On aura donc, sur l'intervalle $]t_0, t_1]$ (et en particulier en t_1) :

- par le résultat de comparaison strict 6.6 pour l'équation différentielle $(*_\varepsilon) : u < x_\varepsilon$;
- puis par passage à la limite $u < x$. □

Exercice 6.11 Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ la solution maximale de l'équation différentielle

$$x' = x^3 - (1 + t^2)$$

de condition initiale $y(0) = 1$.

Démontrer que, pour tout $t \in I$, on a $y(t) \leq (1 + t^2)^{1/3}$. On pourra travailler séparément dans le futur et dans le passé de $t_0 = 0$.

D Entonnoirs, anti-entonnoirs

Comme dans la section précédente, on s'intéresse à l'équation différentielle scalaire $x' = f(t, x)$ (*), où $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait les hypothèses de Cauchy-Lipschitz.

Définition 6.12 Un entonnoir pour l'équation différentielle (*) est la donnée d'une sous-solution $u : A \subset J \rightarrow U$ et d'une sur-solution $v : A \subset J \rightarrow U$ pour (*) définies sur un sous-intervalle $A \subset J$, et qui satisfont $u(t) \leq v(t)$ pour tout $t \in A$.

Proposition 6.13 Entonnoir dans le futur

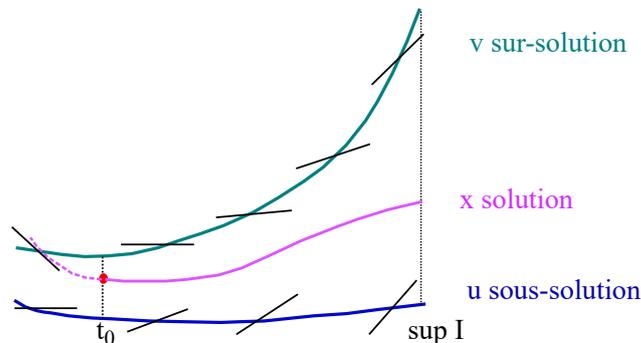
On suppose que f satisfait les hypothèses de Cauchy-Lipschitz.

Soient $u \leq v$ un entonnoir sur l'intervalle $A \subset J$, et $(t_0, x_0) \in A \times U$ une condition initiale avec $u(t_0) \leq x_0 \leq v(t_0)$.

La solution maximale x de condition initiale (t_0, x_0) est alors définie sur tout l'intervalle $[t_0, \infty[\cap A$ et elle satisfait, pour tout $t \in [t_0, \infty[\cap A$,

$$u(t) \leq x(t) \leq v(t).$$

Si une solution démarre à l'intérieur de l'entonnoir, elle y reste dans le futur. Par contre, elle peut sortir de l'entonnoir dans le passé.



Une solution piégée, dans le futur, dans un entonnoir

Preuve La solution maximale x de condition initiale (t_0, x_0) est définie sur un intervalle $]t^-, t^+[$. Le théorème de comparaison 6.8 montre que, sur tout l'intervalle $A \cap [t_0, t^+[$, on a $u \leq x \leq v$.

Supposons par l'absurde que $t^+ \in A$. On a donc $t^+ < \sup J$. Sur l'intervalle $[t_0, t^+[$, $x(t)$ reste confinée dans le compact $[\inf_{[t_0, t^+]} u, \sup_{[t_0, t^+]} v] \subset U$, une contradiction avec le lemme des bouts. \square

Le résultat précédent admet un analogue dans le passé pour un anti-entonnoir.

Définition 6.14 *Un anti-entonnoir pour l'équation différentielle (*) est la donnée d'une sous-solution $u : A \subset J \rightarrow U$ ainsi que d'une sur-solution $v : A \subset J \rightarrow U$ pour (*), définies sur un sous-intervalle $A \subset J$, et qui satisfont $v(t) \leq u(t)$ pour tout $t \in A$.*

Proposition 6.15 Anti-entonnoir dans le passé

On suppose que f satisfait les hypothèses de Cauchy-Lipschitz.

Soient $v \leq u$ un anti-entonnoir sur l'intervalle A , et $(t_0, x_0) \in A \times U$ une condition initiale avec $v(t_0) \leq x_0 \leq u(t_0)$.

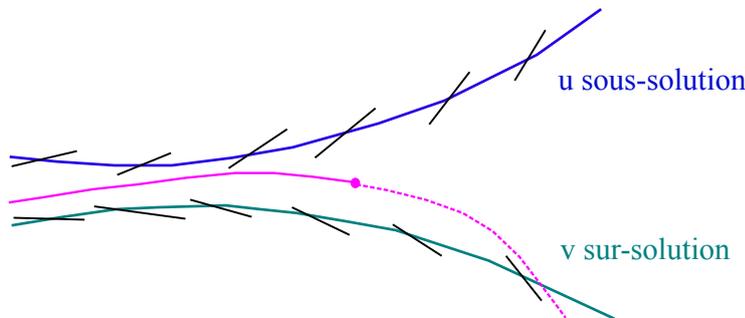
La solution maximale x de condition initiale (t_0, x_0) est alors définie sur tout l'intervalle $]-\infty, t_0] \cap A$ et elle satisfait $v(t) \leq x(t) \leq u(t)$ pour tout $]-\infty, t_0] \cap A$.

Si une solution démarre à l'intérieur de l'anti-entonnoir, elle y reste dans le passé. Par contre, elle peut sortir de l'anti-entonnoir dans le futur.

Preuve Adapter la preuve ci-dessus.

Ou bien se ramener à l'énoncé précédent (entonnoir) en renversant le sens du temps (voir l'exercice 3.10). On raisonne alors comme suit :

pour $x : I \rightarrow U$ solution de $x'(t) = f(t, x(t))$ (*), on introduit $\tilde{x} : -I \rightarrow U$ définie par $\tilde{x}(t) = x(-t)$. On a $\tilde{x}'(t) = -x'(-t) = -f(-t, x(-t)) = \tilde{f}(t, \tilde{x}(t))$ où $\tilde{f}(t, x) := -f(-t, x)$. Si $u : A \rightarrow U$ est une sous-solution de (*), i.e. si $u'(t) \leq f(t, u(t))$, on définit $\tilde{u} : -A \rightarrow U$ en posant $\tilde{u}(t) = u(-t)$ et on remarque que $\tilde{u}'(t) = -u'(-t) \geq \tilde{f}(t, \tilde{u}(t))$ et donc que \tilde{u} est une sur-solution de $(\tilde{*})$. Un entonnoir $u \leq v$ pour (*) sur l'intervalle A donne donc un anti-entonnoir $\tilde{u} \leq \tilde{v}$ sur l'intervalle $-A$ pour $(\tilde{*})$. Faire un dessin !



Une solution piégée, dans le passé, dans un anti-entonnoir

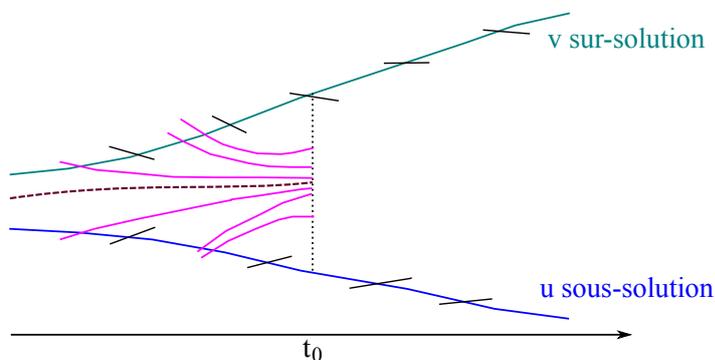
Passons à un résultat plus fin.

Théorème 6.16 Existence globale dans un entonnoir

On suppose que f satisfait les hypothèses de Cauchy-Lipschitz.

Soit $u \leq v$ un entonnoir sur l'intervalle $A \subset J$. Alors il existe au moins une solution $x : A \rightarrow U$ définie sur A et tracée dans l'entonnoir : pour tout $t \in A$, on a $u(t) \leq x(t) \leq v(t)$.

L'idée de la preuve consiste à choisir $t_0 \in A$, et à considérer toutes les solutions maximales de (*), de condition initiale (t_0, x_0) avec $u(t_0) \leq x_0 \leq v(t_0)$. Ces solutions conviennent toutes dans le futur (proposition 6.13). Dans le passé, certaines peuvent sortir de l'entonnoir par le haut, d'autres par le bas : entre les deux, on trouvera une condition initiale qui convient : voir le dessin suivant.



Preuve Supposons dans un premier temps que nous sommes dans le cas facile où l'intervalle A est fermé à gauche. On pose alors $t_0 = \inf A \in A$. D'après la proposition 6.13, toute solution maximale de condition initiale (t_0, x_0) avec $u(t_0) \leq x_0 \leq v(t_0)$ convient.

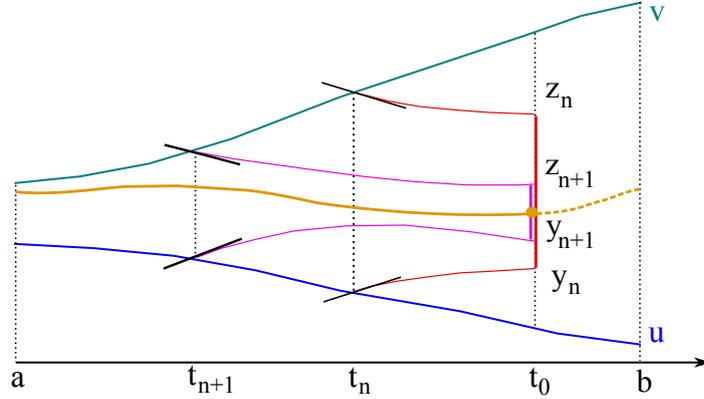
On suppose maintenant que A est ouvert à gauche, et on note $a = \inf A \notin A$. On choisit $t_0 \in A$. Pour tout $x_0 \in [u(t_0), v(t_0)]$ la solution maximale x de condition initiale (t_0, x_0) est définie sur l'intervalle $[t_0, \infty[\cap A$ est y est tracée dans l'entonnoir.

On se préoccupe donc du passé de t_0 . Pour cela, on choisit une suite décroissante d'instant $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $a < t_{n+1} < t_n < \dots < t_0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = a$ et on introduit, pour $n \in \mathbb{N}$:

- $y_n : [t_n, t_0] \rightarrow U$, la restriction à l'intervalle compact $[t_n, t_0]$ de la solution maximale de condition initiale $y_n(t_n) = u(t_n)$
- $z_n : [t_n, t_0] \rightarrow U$, la restriction à l'intervalle compact $[t_n, t_0]$ de la solution maximale de condition initiale $z_n(t_n) = v(t_n)$.

Puisque le couple $u \leq v$ constitue un entonnoir sur l'intervalle A , ces solutions maximales de conditions initiales $(t_n, u(t_n))$ et $(t_n, v(t_n))$ sont définies sur tout l'intervalle $[t_n, t_0]$, donc y_n et z_n sont bien définies.

Chaque couple de solutions $y_n \leq z_n$ forme un anti-entonnoir sur $[t_n, t_0]$, et donc une solution de condition initiale (t_0, x_0) avec $y_n(t_0) \leq x_0 \leq z_n(t_0)$ sera définie sur $[t_n, t_0]$ et y vérifiera $y_n \leq x \leq z_n$, donc a fortiori, $u \leq x \leq v$.



Comme u est une sous-solution et $y_{n+1}(t_{n+1}) = u(t_{n+1})$, on a la minoration $y_{n+1}(t_n) \geq u(t_n) = y_n(t_n)$. D'où $y_{n+1}(t_0) \geq y_n(t_0)$ par Cauchy-Lipschitz. De même, $z_{n+1}(t_0) \leq z_n(t_0)$.

On a donc construit une suite d'intervalles compacts emboîtés

$$[y_{n+1}(t_0), z_{n+1}(t_0)] \subset [y_n(t_0), z_n(t_0)] \subset [u(t_0), v(t_0)].$$

Leur intersection K est non vide. Soit x une solution maximale de condition initiale (t_0, x_0) avec $x_0 \in K$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, x est définie sur $[t_n, t_0]$ et y vérifie $u \leq x \leq v$ (utiliser la proposition 6.15 pour l'anti-entonnoir $y_n \leq z_n$). Donc x est définie sur tout l'intervalle $]a, t_0]$, et elle y vérifie $u \leq x \leq v$. \square

Théorème 6.17 Existence globale dans un anti-entonnoir

On suppose que f satisfait les hypothèses de Cauchy-Lipschitz.

Soit $v \leq u$ un anti-entonnoir sur l'intervalle A . Alors il existe au moins une solution $x : A \rightarrow U$ définie sur tout l'intervalle A et tracée dans l'anti-entonnoir : pour tout $t \in A$, on a $v(t) \leq x(t) \leq u(t)$.

Preuve Adapter la preuve ci-dessus, ou bien se ramener à l'énoncé précédent comme dans la preuve de la proposition 6.15. \square

Remarque 6.18 Bien entendu, les théorèmes de comparaison avec des sur ou des sous-solutions peuvent également, selon les cas, servir à montrer que certaines solutions ne sont pas globales dans le futur ou le passé. Voir par exemple l'exercice 6.7.

Tant que nous y sommes, nous allons terminer ce chapitre par un résultat d'unicité que nous utiliserons notamment dans l'étude du portrait de phase au voisinage d'un point singulier d'un champ autonome en dimension 2, lorsque le linéarisé est un col (théorème 9.13).

Théorème 6.19 Existence et unicité dans un entonnoir contractant

On suppose toujours que f satisfait les hypothèses de Cauchy-Lipschitz.

Soient $A \subset J$ et un entonnoir formé de $u : A \rightarrow U$ sous-solution et $v : A \rightarrow U$ sur-solution avec $u \leq v$. On suppose que l'entonnoir est

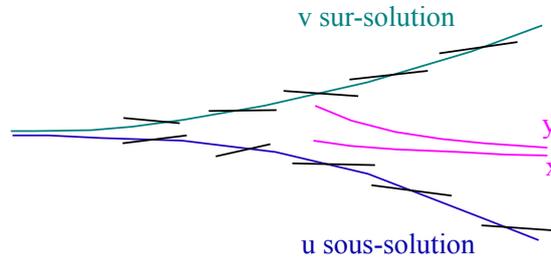
- **resserré dans le passé** : $\lim_{t \rightarrow \inf A} v(t) - u(t) = 0$
- **contractant** : on a, pour tout $t \in I$, et tous $u(t) \leq x \leq y \leq v(t)$, l'inégalité $f(t, y) \leq f(t, x)$.

Alors il existe une unique solution définie sur tout l'intervalle A et qui est tracée dans l'entonnoir.

Remarque 6.20 La seconde hypothèse signifie que, à $t \in I$ fixé, la pente des éléments de contacts décroît avec x à t fixé (c'est-à-dire sur les verticales de $J \times U$). Cette hypothèse va assurer que deux solutions tracées dans l'entonnoir se rapprochent l'une de l'autre dans le futur. Elle sera en particulier satisfaite lorsque la fonction f est de classe C^1 et vérifie $\frac{\partial f}{\partial x} \leq 0$ dans le domaine $\{(t, x) \mid t \in A, u(t) \leq x \leq v(t)\}$ délimité par l'entonnoir.

Lorsque A est fermé dans le passé, c'est-à-dire lorsque $a = \inf A \in A$, le résultat est immédiat et l'unique solution tracée dans l'entonnoir vérifie $x(a) = u(a) = v(a)$.

Preuve du théorème 6.19 L'existence est acquise par le théorème précédent.



Unicité dans un entonnoir resserré dans le passé, et contractant

Soient $x \leq y$ deux telles solutions, et $\Delta(t) := y(t) - x(t) \geq 0$. Puisque $u \leq x \leq y \leq v$, et comme l'entonnoir est resserré dans le passé, on aura $\lim_{t \rightarrow a} \Delta(t) = 0$. Puisque l'entonnoir est contractant, on a

$$\Delta'(t) = y'(t) - x'(t) = f(t, y(t)) - f(t, x(t)) \leq 0,$$

donc Δ est décroissante et positive. On a donc $0 \leq \Delta(t) \leq \lim_{t \rightarrow a} \Delta(t) = 0$ pour tout $t \in I$. \square

On démontrerait de même l'existence et l'unicité d'une solution tracée dans un anti-entonnoir dilatant, et resserré dans le futur (renverser le sens du temps).

7. Champs de vecteurs autonomes

Nous revenons désormais à la dimension quelconque. Dans tout ce chapitre on s'intéressera à l'équation différentielle autonome

$$x'(t) = X(x(t)) \quad (*)$$

où la donnée $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs autonome de classe C^1 (ou au moins localement lipschitzien) défini sur un ouvert U de \mathbb{R}^n . Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique donc à (*).

A Flot d'un champ de vecteurs autonome

On commence par revenir sur quelques résultats et définitions qui avaient déjà été évoqués dans le paragraphe introductif 1.D. Le point fondamental est l'invariance par translation dans le temps des solutions d'une équation différentielle autonome.

Lemme 7.1 *Si $x : t \in I \rightarrow x(t) \in U$ est une solution maximale de (*) alors, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, la translatée $\tau_{t_0}x : t \in I - t_0 \rightarrow x(t + t_0) \in U$ est également une solution maximale de (*).*

Preuve Puisque le champ de vecteurs X est autonome, la translatée dans le temps $\tau_{t_0}x$ de la solution x par t_0 est encore solution (dériver une fonction composée).

Si la translatée $\tau_{t_0}x$ est une solution qui n'est pas maximale, on la prolonge en une solution y , et la translatée $\tau_{-t_0}y$ de y par $-t_0$ est une solution qui prolonge x . □

Pour savoir résoudre tous les problèmes de Cauchy de conditions initiales $(t_0, m_0) \in \mathbb{R} \times U$, il suffira donc de s'intéresser aux solutions maximales de conditions initiales $(0, m_0)$ où m_0 décrit U .

Notation 7.2 *Pour tout $m \in U$, on note*

$$t \in I_m \rightarrow \varphi(t, m) = \varphi_t(m) \in U$$

la solution maximale de () de condition initiale $(0, m_0)$, c'est-à-dire telle que $\varphi_0(m) = m$.*

On obtient $\varphi_t(m)$ en partant du point m et en suivant le champ de vecteurs pendant le temps t . Puisque le champ est autonome, ceci a bien un sens c'est-à-dire qu'on n'a pas besoin de préciser à quel instant on part de m_0 (lemme 7.1). Cette notation permet de concilier deux points de vue :

- On fixe m . Alors l'application $t \rightarrow \varphi_t(m)$ est solution de (*), de condition initiale $(0, m)$.
- On fixe t . L'application $m \rightarrow \varphi_t(m)$ consiste à regarder comment le système a évolué entre l'instant 0 et l'instant t (ou dans un laps de temps t).

Définition 7.3 *L'application*

$$\varphi : \Omega := \{(t, m) \in \mathbb{R} \times U \mid t \in I_m\} \rightarrow \varphi_t(m) \in U$$

est le flot de l'équation () (ou du champ de vecteurs X).*

- Exercice 7.4**
1. Déterminer le flot φ (avec son domaine de définition Ω) d'une équation linéaire autonome $X' = AX$ dans \mathbb{R}^n .
 2. Même question pour l'équation scalaire autonome $x' = x^2$.

Proposition 7.5 *Le domaine Ω de définition du flot est un ouvert de $\mathbb{R} \times U$ contenant $\{0\} \times U$. Le flot $\varphi : \Omega \rightarrow U$ est une application continue.*

Preuve Les deux assertions sont conséquence immédiate de la dépendance continue des solutions par rapport aux conditions initiales (théorème 5.9). Les détails sont laissés au lecteur. \square

Proposition 7.6 *Le flot de (*) satisfait, pour tout $m \in U$, les relations suivantes :*

1. $\varphi_0 = \text{Id}$.
2. Pour $t \in I_m$, on a $I_{\varphi_t(m)} = I_m - t$.
3. Pour $t \in I_m$ et $s \in I_{\varphi_t(m)}$, on a $s + t \in I_m$ et $\varphi_s(\varphi_t(m)) = \varphi_{t+s}(m)$.
4. Pour $t \in I_m$ on a $-t \in I_{\varphi_t(m)}$ et $\varphi_{-t}(\varphi_t(m)) = m$.

Preuve La première assertion 1. est immédiate.

Démontrons les deux suivantes. L'application $s \in I_m \rightarrow \varphi_s(m) \in U$ est la solution maximale de (*) de condition initiale $(0, m)$. Puisque l'équation est autonome, la translatée dans le temps $\psi : s \in I_m - t \rightarrow \varphi_{s+t}(m) \in U$ de cette solution est également une solution maximale de (*), et elle vérifie $\psi(0) = \varphi_t(m)$. Elle coïncide donc avec $s \in I_{\varphi_t(m)} \rightarrow \varphi_s(\varphi_t(m)) \in U$. Les points 2. et 3. sont donc démontrés.

Le dernier point 4. s'en déduit. En effet, $0 \in I_m$ assure que, pour $t \in I_m$, on a $-t \in I_{\varphi_t(m)}$ avec $\varphi_{-t}(\varphi_t(m)) = \varphi_0(m) = m$. \square

Nous allons traduire le contenu de la proposition 7.6 dans le cas particulier d'un champ de vecteurs complet.

Définition 7.7 Champ de vecteurs complet

On dit que le champ de vecteurs X est complet lorsque toutes les solutions maximales de (*) sont globales, c'est-à-dire définies sur \mathbb{R} .

Exemple 7.8 – Un champ de vecteurs $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 qui satisfait $\|X(m)\| \leq a\|m\| + b$ pour deux constantes $a, b \in \mathbb{R}$ est complet (croissance sous-linéaire, proposition 5.4).

– Le champ de vecteurs défini sur \mathbb{R} par $X(x) = x^2$ n'est pas complet.

Corollaire 7.9 On suppose que le champ $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est complet. Alors :

- pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $\varphi_t : U \rightarrow U$ est un homéomorphisme de U ;
- l'application $t \in \mathbb{R} \rightarrow \varphi_t \in \text{Homeo}(U)$, à valeurs dans le groupe des homéomorphismes de U , est un morphisme de groupes : on dit alors que $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre d'homéomorphismes de U .

Preuve Conséquence immédiate des propositions 7.5 et 7.6. □

Remarque 7.10 On peut montrer que chaque application φ_t est un C^1 -difféomorphisme de U . Lorsque le champ X est de classe C^k , chaque φ_t est un C^k -difféomorphisme de U et $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ constitue un groupe à un paramètre de C^k -difféomorphismes de U .

Lorsque le champ n'est pas complet, chaque φ_t n'est défini que sur une partie de U (qui peut dépendre de t , et éventuellement être vide) et on parle alors de groupe local à un paramètre.

B Orbites et portrait de phase

Définition 7.11 Orbite, trajectoire

L'orbite de $m \in U$ (ou la trajectoire de m , ou encore la courbe intégrale du champ de vecteurs passant par m) est

$$\mathcal{O}_m = \{\varphi_t(m) \mid t \in I_m\}.$$

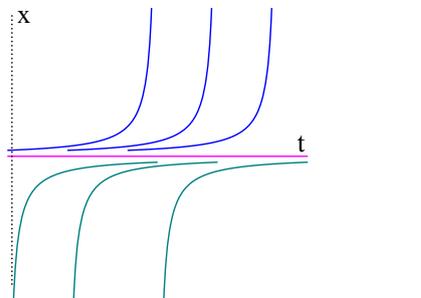
C'est aussi l'ensemble des valeurs prises par une solution maximale de (*) passant par le point m (à un instant quelconque).

Proposition 7.12 Les orbites de X constituent une partition de l'ouvert U . C'est le portrait de phase de X .

Preuve Il résulte en effet de la proposition 7.6 que la relation “être dans la même orbite que” est une relation d'équivalence sur U . □

Exemple 7.13 Soit l'équation différentielle scalaire $x' = x^2$, associée au champ de vecteurs autonome $X : x \in \mathbb{R} \rightarrow x^2 \in \mathbb{R}$.

A gauche : les graphes des solutions maximales forment une partition de $J \times U$, ici $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (Cauchy-Lipschitz).



A droite : les orbites forment une partition de U , ici \mathbb{R} . C'est le portrait de phase.

C Les différents types d'orbites

Soient m un point de U et \mathcal{O}_m son orbite.

Lemme 7.14 Deux cas se présentent.

- Si le point m est stationnaire (ou singulier), c'est-à-dire si $X(m) = 0$, alors l'orbite $\mathcal{O}_m = \{m\}$ est réduite au seul point m .
- Si le point m n'est pas stationnaire (on dit aussi que le point est régulier), c'est-à-dire si $X(m) \neq 0$, alors son orbite \mathcal{O}_m ne contient aucun point stationnaire. Dans ce cas, \mathcal{O}_m est l'image d'un intervalle par une application $t \in I_m \subset \mathbb{R} \rightarrow \varphi_t(m) \in U$ de classe C^1 dont la dérivée ne s'annule pas (une immersion) : on dit que \mathcal{O}_m est une "courbe paramétrée régulière".

Preuve Immédiate, X satisfaisant les hypothèses de Cauchy-Lipschitz. \square

Il suit qu'un petit morceau d'une orbite non stationnaire s'envoie, par un difféomorphisme local bien choisi, sur un segment de droite (cf. le rappel ci-dessous). Nous verrons au théorème 9.2 que l'on peut même redresser localement tout le portrait de phase (toutes les orbites) au voisinage d'un point régulier.

Rappel 7.15 Courbes paramétrées régulières

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et $\gamma : I \rightarrow U$ de classe C^1 telle que pour tout $t \in I$ on ait $\gamma'(t) \neq 0$.

Alors, pour tout $t_0 \in I$, il existe un sous-intervalle $V \subset I$ contenant t_0 dont l'image $\gamma(V) \subset U$ soit une sous-variété de dimension 1 de $U \subset \mathbb{R}^n$.

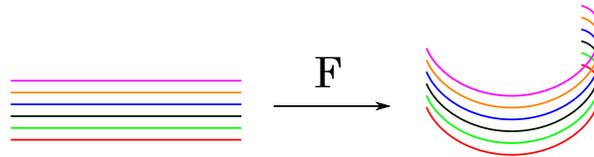
Par contre, l'image $\gamma(I)$ entière peut ne pas être une sous-variété. On peut en effet obtenir une courbe avec un point double, ou injective mais avec un point limite dans cette courbe, ou encore d'image non localement fermée (par exemple une droite de pente irrationnelle sur un tore) : voir les dessins ci-dessous. Les deux premiers cas ne se produiront pas pour une orbite de champ de vecteurs.



Preuve du rappel 7.15 On peut supposer $t_0 = 0$ et $\gamma'(0) = e_1$ (premier vecteur de base). On prolonge alors $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ en l'application

$$F : \begin{array}{l} I \times \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t; s_2, \dots, s_n) \longrightarrow \gamma(t) + (0; s_2, \dots, s_n) \end{array}$$

(voir le dessin lorsque $n = 2$). L'application F est de classe C^1 , et $D_0F = \text{Id}$. Il suit que F est un difféomorphisme local au voisinage de l'origine. Par construction, l'application réciproque F^{-1} redresse l'image $\gamma(V)$ d'un petit intervalle $V \subset \mathbb{R}$ contenant 0 en un petit bout de droite $V \times \{0\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. \square



En noir la courbe initiale γ . En couleurs la construction de son prolongement F .

Continuons l'étude des orbites non stationnaires.

Lemme 7.16 *On suppose que le point $m \in U$ n'est pas stationnaire. Deux cas se présentent à nouveau :*

Orbite périodique. Soit il existe $t_0, t_1 \in I_m$ avec $t_0 < t_1$ et $\varphi_{t_0}(m) = \varphi_{t_1}(m)$. Dans ce cas, la solution $t \in I_m \rightarrow \varphi_t(m)$ est définie sur \mathbb{R} et périodique, et l'orbite \mathcal{O}_m est homéomorphe à un cercle.

Orbite non périodique. Soit $t \in I_m \rightarrow \varphi_t(m) \in U$ est injective. Il peut alors se passer des choses diverses lorsque $t \rightarrow \inf I_m$ ou $t \rightarrow \sup I_m$... Rappelons cependant que si l'orbite converge dans le futur ou le passé vers un point de U , le point limite est un point stationnaire (proposition 4.8).

Preuve Dans le premier cas, le théorème de Cauchy-Lipschitz (unicité de la solution maximale de condition initiale $(0, \varphi_{t_0}(m))$) assure que les intervalles $I_{\varphi_{t_0}(m)} = I_m - t_0$ et $I_{\varphi_{t_1}(m)} = I_m - t_1$ sont égaux, et donc que $I_m = \mathbb{R}$. De plus, $\varphi_{t_1-t_0}(m) = m$.

On introduit alors $T = \inf\{u > 0 \mid \varphi_u(m) = m\}$. Comme $t \rightarrow \varphi_t(m)$ est localement injective, on a $T > 0$. L'application $t \rightarrow \varphi_t(m)$ est T -périodique, et injective sur $[0, T[$. Il suit que l'orbite \mathcal{O}_m est homéomorphe à un cercle comme image de $e^{2i\pi u} \in \mathbb{S}^1 \rightarrow \varphi(uT, m) \in U$ \square .

Exemple 7.17 Prenons l'exemple du système différentiel

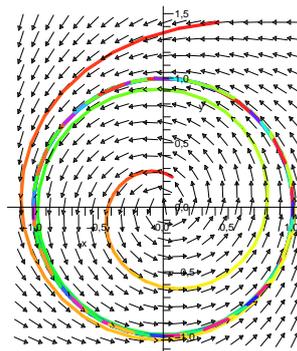
$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) + (1 - x^2(t) - y^2(t)) x(t) \\ y'(t) = x(t) + (1 - x^2(t) - y^2(t)) y(t) \end{cases},$$

que le lecteur est invité à étudier en passant en coordonnées polaires (paragraphe 3.E). L'origine est un point stationnaire. Le cercle unité constitue une orbite périodique.

L'orbite d'un point m appartenant au disque unité ouvert pointé converge vers l'origine dans le passé et admet le cercle unité \mathbb{S} comme ensemble limite dans le futur (voir 10.1 pour la notion d'ensemble limite) :

$$\mathbb{S} = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\{\varphi_t(m) \mid t \geq T\}}.$$

L'orbite d'un point m hors du disque unité fermé part à l'infini dans le passé et admet le cercle unité comme ensemble limite dans le futur.



8. Etude qualitative des champs autonomes

Dans ce chapitre ainsi que le suivant (qui sera consacré à l'étude d'un champ de vecteurs au voisinage de ses points stationnaires) on va développer des outils pour l'étude qualitative des équations différentielles autonomes. Pour l'essentiel, l'objectif est de tracer leur portrait de phase. Mais on pourra également s'intéresser à la façon dont les orbites sont parcourues (en temps fini, ou pas).

A En dimension 2

Nous commençons par ce qui est spécifique à la dimension 2, qui se prête bien à faire des dessins.

Dans ce paragraphe, $X = (f, g) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un champ de vecteurs de classe C^1 (ou au moins localement lipschitzien) défini sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 , associé au système différentiel autonome

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases} .$$

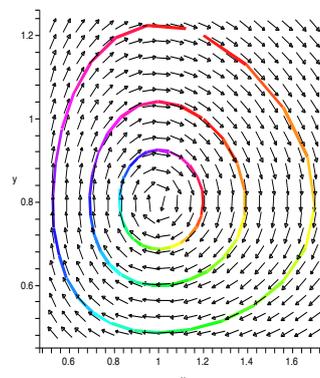
L'orbite d'un point $m \in U$ non stationnaire est une courbe paramétrée régulière γ (lemme 7.14) admettant en chaque point $p \in \gamma$ une tangente dirigée par le vecteur $X(p)$, de pente $g(p)/f(p) \in \mathbb{R} \cup \infty$. En d'autres termes, les orbites de X admettent pour tangente, en chaque point non singulier, l'élément de contact qui est la droite affine passant par m dirigée par $X(m)$.

Exemple 8.1 Lotka-Volterra

On a dessiné ci-contre les éléments de contact ainsi que trois orbites pour le système proie-prédateurs de Lotka-Volterra (voir aussi 8.5 et 8.11)

$$X(x, y) = (x(y - 1), y(1 - x))$$

dans le quart de plan $\{x > 0, y > 0\}$.



Régionnement

Si on travaille à la main, on ne va pas s'amuser à dessiner tous ces éléments de contact ! On va se contenter (dans le même esprit que pour les équations scalaires du chapitre 6) d'établir un régionnement du domaine U . Pour une équation scalaire $x' = f(t, x)$, il s'agissait d'un régionnement selon le signe de f . Pour le champ de vecteurs $X = (f, g)$, nous établirons un régionnement selon les signes des deux composantes f et g du champ.

Définition 8.2 Pour $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, l'isocline \mathcal{I}_α du champ est le lieu des points $m \in U$ tels que

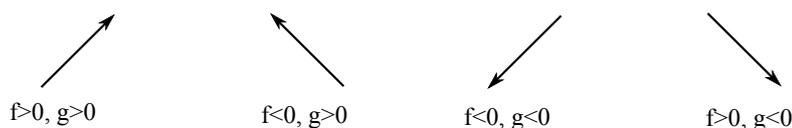
- la droite portée par le vecteur $X(m) \neq 0$ fait un angle avec l'horizontale dont la tangente est égale à α ; de façon équivalente, m n'est pas un point stationnaire et la tangente en m à l'orbite \mathcal{O}_m a pour pente α
- ou bien $X(m) = 0$, c'est-à-dire que le point m est un point stationnaire.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\mathcal{I}_\alpha = \{m \in U \mid g(m) = \alpha f(m)\}$. En particulier, on a $\mathcal{I}_0 = \{m \mid g(m) = 0\}$, tandis que $\mathcal{I}_\infty = \{m \mid f(m) = 0\}$.

L'ensemble $\mathcal{S} = \{m \in U \mid X(m) = 0\}$ des points singuliers du champ vérifie

$$\mathcal{S} = \mathcal{I}_0 \cap \mathcal{I}_\infty = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}} \mathcal{I}_\alpha.$$

La première étape de l'étude qualitative consistera le plus souvent à tracer les isoclines \mathcal{I}_0 et \mathcal{I}_∞ , et à indiquer le sens du champ (selon les signes de f et de g) dans les régions que ces isoclines délimitent, c'est-à-dire sur chaque composante connexe de $U \setminus (\mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}_\infty)$. Les flèches suivantes signifieront que, dans la région considérée, on a



Il faudra ensuite (entre autres et selon les cas) se demander si le champ admet des symétries (voir notamment les exercices 8.3 et 8.4), identifier des orbites “remarquables” (voir l'exemple 8.5), rechercher des intégrales premières, se demander si il y a des orbites périodiques (section E), étudier le champ au voisinage des points stationnaires (chapitre 9)...

Exercice 8.3 Symétries Soient $n \geq 1$, $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continu et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application affine d'application linéaire associée \vec{f} .

1. On suppose que pour tout $m \in \mathbb{R}^n$ on a $X(f(m)) = \vec{f}(X(m))$. Montrer que si $t \rightarrow m(t)$ est solution de l'équation $m' = X(m)$, alors $\tilde{m} : t \rightarrow f(m(t))$ est également solution.

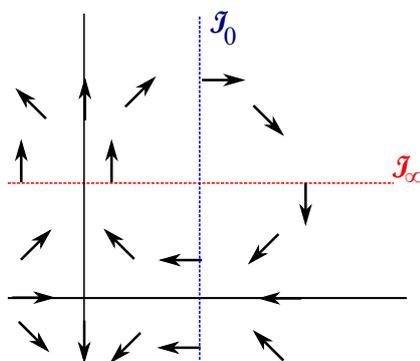
2. Que dire si maintenant, pour tout $m \in \mathbb{R}^n$, on a $X(f(m)) = -\vec{f}(X(m))$?

Exercice 8.4 Symétries

On considère le système différentiel (E) $\begin{cases} x' &= (x-y)^2 - 1 \\ y' &= 1 - (x+y)^2 \end{cases}$.

1. Faire un croquis indiquant les isoclines \mathcal{I}_0 et \mathcal{I}_∞ , les points stationnaires ainsi que le régionnement (sens du champ).
2. Montrer que la symétrie $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ de centre l'origine préserve le portrait de phase de (E). Cette symétrie respecte-t-elle le sens de parcours des orbites ?

Exemple 8.5 Revenons sur le système différentiel de Lotka-Volterra, dont l'étude sera détaillée dans l'exercice 8.11 ci-après, et qui est associé au champ défini sur \mathbb{R}^2 par $X(x, y) = (x(y-1), y(1-x))$.



Régionnement pour Lotka-Volterra

Dans cet exemple, les axes sont réunions d'orbites : trouver les solutions de condition initiale $(x_0, 0)$ et $(0, y_0)$, ou bien utiliser le corollaire 8.20.

Il découle alors du théorème de Cauchy-Lipschitz que le quart de plan $\mathcal{Q} = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ est stable par le flot.

Comme pour les équations scalaires (paragraphe 6.A), le régionnement donne déjà une première idée du comportement potentiel des orbites ; il reste alors à valider ou à infirmer ces intuitions. Dans cet exemple, on peut montrer en utilisant un argument d'intégrale première (section B) que toutes les orbites incluses dans \mathcal{Q} sont périodiques (mais cette propriété ne peut se déduire du seul régionnement !).

B Intégrales premières

On revient à la dimension quelconque, avec un champ $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 (ou au moins localement lipschitzien) et l'équation autonome associée

$$m'(t) = X(m(t)) \quad (*)$$

d'inconnue $t \in I \rightarrow m(t) \in U$.

Soit $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Pour savoir comment la fonction h évolue le long des orbites $t \rightarrow m(t) = \varphi_t(m)$ de X , on dérive :

$$\frac{d}{dt}h(m(t)) = D_{m(t)}h(m'(t)) = D_{m(t)}h(X(m(t))).$$

Définition 8.6 La fonction $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 est une intégrale première pour X si et seulement si h est constante sur chaque orbite de X ou, de façon équivalente, si on a $D_m h(X(m)) = 0$ pour tout $m \in U$.

La fonction h peut par exemple représenter l'énergie du système. Si h est une intégrale première, cela signifie que l'énergie h est conservée dans le temps. (Lorsque la fonction h décroît le long des orbites, on parle de fonction de Lyapunov, voir le chapitre 10).

Remarque 8.7 Une fonction constante est une intégrale première pour n'importe quel champ de vecteurs (et elle est sans intérêt).

Soit h une intégrale première pour X . Pour toute fonction $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , la composée $H \circ h$ est une autre intégrale première pour X (et elle n'apporte rien de plus que h).

Observer que, pour vérifier si la fonction h est une intégrale première, on n'a pas besoin de connaître les orbites du champ.

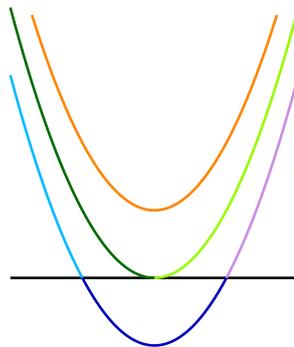
La connaissance de suffisamment d'intégrales premières (en dimension n , il faudra $n - 1$ intégrales premières "indépendantes") permet de déterminer les orbites. On se limitera à la dimension 2 pour simplifier. Commençons par un exemple.

Exemple 8.8 La fonction $h(x, y) = x^2 - y$ est une intégrale première pour le champ $X(x, y) = (y, 2xy)$ sur \mathbb{R}^2 .

L'orbite de $m_0 = (x_0, y_0)$ est donc incluse dans la parabole d'équation $h(x, y) = c_0$, où $c_0 = h(x_0, y_0)$.

Plus précisément, puisqu'une orbite ne peut converger que vers un point singulier (proposition 4.8), les orbites de X sont

- les points singuliers $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$
- les portions de paraboles $x^2 - y = cste$ délimitées par les points singuliers (intersection avec l'axe des abscisses).



On démontrerait de même le résultat général suivant, dont nous omettons la preuve.

Théorème 8.9 Soit $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs de classe C^1 . Soit $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ une intégrale première de X .

On suppose que, pour un certain réel $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble de niveau $\mathcal{E}_a = \{m \in U \mid h(m) = a\}$ est une sous-variété de dimension 1 de U .

C'est le cas notamment si, pour tout $m \in \mathcal{E}_a$, la différentielle $D_m h \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ est non nulle (ou, de façon équivalente, est surjective).

Alors \mathcal{E}_a est réunion d'orbites de X (autrement dit \mathcal{E}_a est stable par le flot). Les orbites de X incluses dans \mathcal{E}_a sont les points stationnaires $m \in \mathcal{E}_a$, ainsi que les composantes connexes de $\mathcal{E}_a \setminus \mathcal{S}$, où \mathcal{S} désigne l'ensemble des points stationnaires de X .

Il en suit un critère pour l'existence d'orbites périodiques pour X .

Corollaire 8.10 Soit $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs de classe C^1 . Soit $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ une intégrale première de X .

On suppose que, pour un certain réel $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble de niveau $\mathcal{E}_a = \{m \in U \mid h(m) = a\}$ est une sous-variété compacte connexe de dimension 1 de U qui ne contient pas de points stationnaires.

Alors \mathcal{E}_a (qui est alors homéomorphe à un cercle) constitue une orbite périodique de X .

Exercice 8.11 Proies et prédateurs ; équations de Lotka-Volterra (1920).

On étudie le système différentiel associé au champ de vecteurs défini sur le quart de plan $\mathcal{Q} = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ par

$$X(x, y) = (x(y - 1), y(1 - x)).$$

Ce système modélise le comportement d'un système écologique sommaire à deux espèces pour lequel x et y mesurent respectivement la population des prédateurs, et des proies.

1. Déterminer les points siguliers du champ associé.
2. Montrer que le système admet pour intégrale première la fonction définie par $h : (x, y) \in \mathcal{Q} \rightarrow (\ln x - x) + (\ln y - y) \in \mathbb{R}$.
3. En déduire que les solutions du système sont périodiques, et dessiner l'allure des orbites.

C Zones piège

On se donne dans ce paragraphe des outils pour montrer qu'une orbite reste confinée, dans le futur ou bien dans le passé, dans

un domaine donné. Les énoncés ne couvrent pas tous les cas que vous pourrez rencontrer, et sont plutôt destinés à vous donner des méthodes pour aborder la question.

Définition 8.12 Zone piège Soient $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ autonome de classe C^1 (ou localement lipschitzien), et $\Omega \subset U$ un ouvert.

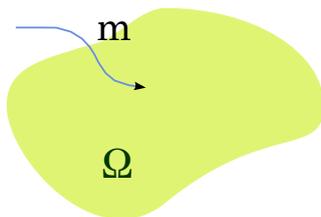
On dit que Ω est une zone piège dans le futur lorsque toute orbite issue d'un point $m \in \Omega$ reste dans Ω dans le futur, c'est-à-dire lorsque pour tout $t \in I_m$ avec $t \geq 0$ on a encore $\varphi_t(m) \in \Omega$.

On définirait de même la notion de zone piège dans le passé.

Pour montrer qu'un ouvert $\Omega \subset U$ est une zone piège, il pourra être utile de dégager la notion de champ rentrant.

Définition 8.13 Champ rentrant

Soient $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs autonome, $\Omega \subset U$ un ouvert et $m \in \partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \Omega$ un point du bord de Ω . On dit que le champ X est rentrant dans Ω en m lorsque pour $t > 0$ petit on a $\varphi_t(m) \in \Omega$, tandis que pour $t < 0$ petit on a $\varphi_t(m) \notin \overline{\Omega}$.



Trajectoire pour un champ rentrant en m dans Ω

Lorsque l'ouvert $\Omega \subset U$ est défini par une inégalité, le lemme suivant fournit une condition sous laquelle le champ X est rentrant dans Ω .

Lemme 8.14 Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et l'ouvert $\Omega = \{f > 0\}$. Soit $m \in U$ avec $f(m) = 0$ et $D_m f(X(m)) > 0$. Alors $m \in \partial\Omega$, et le champ est rentrant dans Ω en m .

Preuve Immédiate. □

Remarque 8.15 Si l'on a affaire à un ouvert défini par plusieurs inégalités (penser par exemple au quart de plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$), on pourra mener des raisonnements similaires (à adapter selon le point du bord où l'on cherche à étudier le champ).

Remarquer que la condition $D_m f(X(m)) \neq 0$ assure que le lieu $\{f = 0\}$ est, au voisinage de m , une hypersurface régulière.

Proposition 8.16 Critère pour une zone piège

Soient $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ localement lipschitzien et $\Omega \subset U$ un ouvert. On suppose que, pour chaque point $m \in \partial\Omega$:

- soit toute l'orbite \mathcal{O}_m est incluse dans le complémentaire ${}^c\Omega$;
(c'est le cas notamment si $X(m) = 0$, i.e. m est un point stationnaire)
- soit le champ X est rentrant dans Ω en m .

Alors l'orbite de tout point $p \in \Omega$ reste, dans le futur, piégée dans le domaine Ω c'est-à-dire qu'on a $\varphi_t(p) \in \Omega$ pour tout $t \geq 0$ avec $t \in I_p$.

Remarque 8.17 On a un énoncé semblable avec un champ sortant, et donc une zone piège dans le passé.

Preuve On procède par l'absurde. Soit $p \in \Omega$ et supposons que

$$A = \{t \in I_p \mid t \geq 0, \varphi_t(p) \in {}^c\Omega\} \neq \emptyset.$$

On introduit alors $T = \inf A$ et on observe que $T > 0$ puisque Ω est ouvert et que l'application $t \rightarrow \varphi_t(p)$ est continue. De plus, on a $m := \varphi_T(p) \in \partial\Omega$.

L'orbite de m contient p , donc n'est pas incluse dans $\partial\Omega$. Par hypothèse, le champ est donc rentrant dans Ω en m . C'est une contradiction, car alors $\varphi_{-ε}(m) = \varphi_{T-ε}(p) \notin \Omega$ lorsque $ε > 0$ est petit. \square

Exemple 8.18 Le quart de plan $\Omega = \{x > 0, y > 0\}$ est une zone piège dans le futur pour le champ défini sur \mathbb{R}^2 par $X(x, y) = (x + y, xy)$. En effet :

- l'origine est un point stationnaire
- le champ est rentrant en tout point du demi-axe des ordonnées
- le demi-axe des abscisses positives constitue une orbite, puisque l'application $t \in \mathbb{R} \rightarrow (e^t, 0) \in \mathbb{R}^2$ est une solution maximale. Cette orbite ne rencontre pas l'ouvert Ω .



D Reconnaître une orbite

Dans ce paragraphe, nous apprenons à vérifier qu'une courbe est une orbite (ou une réunion d'orbites), sans avoir à déterminer explicitement les solutions correspondantes. Dans la pratique, il s'agira de courbes gentilles (portions de droites, de paraboles...)

Soit $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs C^1 , ou localement lipschitzien. L'orbite d'un point non stationnaire $m_0 \in U$ est une courbe paramétrée régulière γ , image de l'application $t \in I_{m_0} \rightarrow \varphi_t(m_0) \in \mathbb{R}^n$ de classe C^1 dont la dérivée ne s'annule jamais (lemme 7.14). En tout point $p \in \gamma$, le vecteur $X(p)$ est tangent à γ .

A l'inverse, soit $\gamma \subset U$ une courbe paramétrée régulière telle que, en chaque point $p \in \gamma$, le vecteur $X(p)$ soit tangent à γ . Est-ce que γ est une orbite de X ?

On va voir que c'est essentiellement le cas... Cependant, il se peut que γ soit réunion d'orbites de X , ou encore que γ ne soit qu'un morceau d'orbite. L'énoncé correct est donné au corollaire 8.20. Commençons par un énoncé local.

Lemme 8.19 *Soit $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs autonome de classe C^1 (ou localement lipschitzien), et (φ_t) son flot. Soit $\gamma : I \rightarrow U$ une courbe paramétrée régulière telle que, en chaque point $p \in \gamma$, le vecteur $X(p)$ soit tangent à γ .*

Soit $m \in \gamma$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que le morceau d'orbite $\{\varphi_t(m) \mid |t| < \varepsilon\}$ soit inclus dans γ .

Preuve On peut supposer que $m = \gamma(0)$. Puisque la courbe γ est régulière, on a $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. On peut donc écrire $X(\gamma(t)) = a(t)\gamma'(t)$ ($t \in I$), où la fonction $t \in I \rightarrow a(t) \in \mathbb{R}$ est continue.

Il s'agit maintenant de reparamétriser localement γ au voisinage de m pour obtenir une solution de (*).

Autrement dit, on cherche $\varepsilon > 0$ et une fonction $h :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow I$ de classe C^1 avec $h(0) = 0$ et tels que la fonction $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \gamma(h(t)) \in U$ soit une solution de (*).

La condition $\frac{d}{dt}(\gamma(h(t))) = X(\gamma(h(t)))$ (qui exprime que $t \rightarrow \gamma \circ h$ est solution de (*)) s'écrit

$$h'(t)\gamma'(h(t)) = a(h(t))\gamma'(h(t)).$$

Prendre h solution de l'équation différentielle à variables séparées $h' = a(h)$, de condition initiale $h(0) = 0$. \square

On en déduit un énoncé global.

Corollaire 8.20 *Soit $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs autonome localement lipschitzien. Soit $\gamma : I \rightarrow U$ une courbe paramétrée régulière. On suppose que l'image $\gamma(I) \subset U$ est une partie fermée de U et que, en chaque point de γ , le champ X est tangent à γ (il peut en particulier s'annuler). Alors γ est réunion d'orbites de X .*

De plus, les orbites non stationnaires de X incluses dans γ sont les portions de γ comprises entre deux zéros consécutifs du champ.

Preuve Soit $m \in \gamma$. On veut montrer que son orbite \mathcal{O}_m est incluse dans γ autrement dit que, pour tout $t \in I_m$, on a $\varphi_t(m) \in \gamma$.

Il résulte du lemme précédent que l'ensemble $A := \{t \in I_m \mid \varphi_t(m) \in \gamma\}$ est ouvert dans I_m . Il est non vide car il contient 0.

L'image de la courbe γ étant fermée dans U , la partie A est fermée dans I_m . Comme l'intervalle I_m est connexe, il suit que $A = I_m$.

La description des orbites incluses dans γ est conséquence de ce qu'une orbite ne peut converger vers un point de U , dans le futur ou le passé, que si ce point est stationnaire (proposition 4.8). \square

La démonstration précédente donne également le résultat suivant, que nous utiliserons en 9.20 lors de l'étude des cols.

Corollaire 8.21 *Si $\gamma \subset U$ est une courbe paramétrée régulière ne contenant pas de point singulier, et telle que le champ soit tangent à γ en tout point de γ , alors γ est incluse dans une orbite.*

Revenons sur l'exemple 8.8, que nous avons alors traité en utilisant une intégrale première.

Exemple 8.22 Le champ $X(x, y) = (y, 2xy)$ est tangent à chaque parabole image de $\gamma_c : t \in \mathbb{R} \rightarrow (t, t^2 + c) \in \mathbb{R}^2$ ($c \in \mathbb{R}$).

On retrouve donc avec le corollaire 8.20 le fait que chacune de ces paraboles est réunion d'orbites (telles que décrites en 8.8).

Exercice 8.23 Soit $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs de classe C^1 . Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que la droite d'équation $y = a$ est incluse dans l'isocline \mathcal{I}_0 . Montrer que cette droite est réunion d'orbites de X .
2. Exemple : la droite d'équation $y = 1$ est réunion d'orbites du champ de vecteurs $X(x, y) = ((y - 1)(x^2 + 1), y(1 - x^2))$. Déterminer ces orbites.

Exercice 8.24 On étudie le champ de vecteurs défini sur \mathbb{R}^2 par

$$X(x, y) = (-(1 - x^2)(x + y), x(1 + y^2)).$$

1. Faire un croquis en indiquant les isoclines \mathcal{I}_0 et \mathcal{I}_∞ , ainsi que le sens du champ (régionnement).
2. Déterminer l'ensemble des points stationnaires de X .
3. Montrer que chacune des droites d'équation $x = 1$ et $x = -1$ est réunion d'orbites de X . Déterminer ces orbites.
4. Montrer que l'ouvert $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$ est stable par le flot de X : c'est une zone piège, dans le futur et dans le passé.

E Orbites périodiques

Pour montrer l'existence d'orbites périodiques on peut utiliser, selon le contexte, divers outils : arguments de symétrie, intégrale première, théorème de point fixe... Voir les exercices.

Pour au contraire exclure l'existence d'orbites périodiques, on pourra parfois utiliser le résultat suivant (ou alors utiliser une fonction de Lyapunov, comme en 10.20).

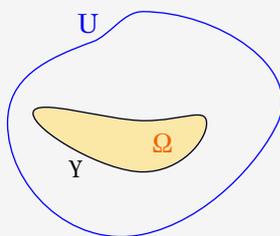
Ce paragraphe peut être omis en première lecture.

Proposition 8.25 Soit $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs de classe C^1 . On suppose que l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ est connexe et simplement connexe ("il n'y a pas de trou dedans", voir le cours de Fonctions Holomorphes par exemple) et que la divergence

$$\operatorname{div} X := \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

du champ X ne s'annule pas (donc garde un signe constant). Alors X n'a pas d'orbite périodique non stationnaire.

Preuve On procède par l'absurde. Soit γ une orbite périodique non triviale. Puisque l'ouvert U est simplement connexe, γ borde un domaine $\Omega \subset U$.



On introduit alors l'intégrale le long de γ

$$\int_{\gamma} f dy - g dx = \int_{\gamma} f g(\gamma(t)) - g f(\gamma(t)) dt = 0$$

qui est nulle. La formule de Green-Riemann donne quant à elle (avec un signe \pm à préciser selon le sens de parcours de γ) :

$$\int_{\gamma} f dy - g dx = \pm \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} dx dy = \pm \int_{\Omega} \operatorname{div} X dx dy,$$

qui est non nul par hypothèse : une contradiction. \square

9. Points réguliers, points singuliers

Dans ce chapitre et le suivant, $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sera un champ de vecteurs autonome **de classe C^1** . L'étude qualitative de ce champ de vecteurs, ou de l'équation différentielle autonome associée $m'(t) = X(m(t))$, comporte deux volets :

- l'étude locale : à quoi ressemble, au voisinage d'un point m_0 donné, le portrait de phase de X ?
- l'étude globale : comment les orbites se comportent-elles “sur le long terme” : y a-t-il des orbites périodiques, les orbites partent-elles à l'infini, description des ensembles limites etc... ?

Dans les prochains chapitres, on se consacre essentiellement à l'étude locale. Il faudra bien entendu distinguer selon que le point m_0 est, ou non, un point stationnaire.

A Au voisinage d'un point régulier

Définition 9.1 Points singuliers, ou stationnaires ; points réguliers

Soit $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de classe C^1 . Un point $m_0 \in U$ est dit singulier (ou stationnaire) lorsque $X(m_0) = 0$. Dans ce cas son orbite est un singleton.

On dit que le point m_0 est régulier (ou non stationnaire) lorsque $X(m_0) \neq 0$.

Au voisinage d'un point régulier, le portrait de phase est “trivial” : c'est, à difféomorphisme près, le portrait de phase d'un champ constant non nul.

Théorème 9.2 Portrait de phase au voisinage d'un point régulier

Soit $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de classe C^1 . On suppose que le point $m_0 \in U$ est un point régulier.

Il existe alors un C^1 difféomorphisme $h : V \rightarrow W$ d'un voisinage V de m_0 dans U sur son image W qui envoie le portrait de phase de X sur le portrait de phase d'un champ constant Y non nul.

Plus précisément, si on note (φ_t) le flot de X et (ψ_t) celui de Y , le difféomorphisme h conjuguera ces flots :

$$h \circ \varphi_t = \psi_t \circ h.$$



Redressement du champ de vecteurs au voisinage d'un point régulier :
à difféomorphisme près, le portrait de phase est trivial

Nous avons démontré que le domaine Ω de définition du flot est ouvert, et que le flot est continu (dépendance des solutions par rapport à la condition initiale, proposition 7.5). Nous admettrons que le flot est de classe C^1 .

Théorème 9.3 *Le flot $\varphi : (t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ de X est de classe C^1 .*

Noter alors qu'il suit immédiatement de la définition du flot que, pour tout $m \in U$, on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, m) = X(\varphi_t(m)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial m}(0, m) = \text{Id}.$$

Preuve du théorème 9.2 Nous allons plutôt construire l'inverse g du difféomorphisme h . Choisissons un repère affine dont le point m_0 soit l'origine, et pour lequel $X(m_0) = e_1$ (premier vecteur de la base canonique (e_1, \dots, e_n)). Notons Y le champ constant égal à e_1 . Le flot (ψ_t) de Y satisfait

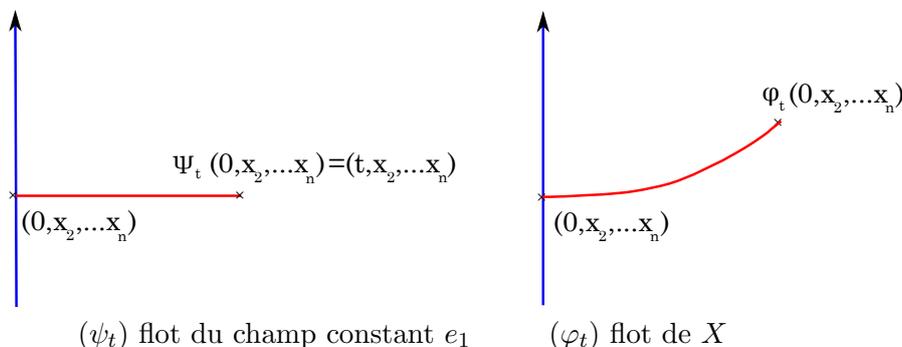
$$\psi_t(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + t, x_2, \dots, x_n).$$

On définit d'abord g sur une transversale au champ Y en l'origine en imposant

$$g(0, x_2, \dots, x_n) = (0, x_2, \dots, x_n).$$

Puisqu'on veut satisfaire la relation $g \circ \psi_t = \varphi_t \circ g$, on doit avoir, lorsque c'est défini c'est-à-dire pour (t, x_2, \dots, x_n) proche de l'origine,

$$g(t, x_2, \dots, x_n) = g(\psi_t(0, x_2, \dots, x_n)) = \varphi_t(g(0, x_2, \dots, x_n)) = \varphi_t(0, x_2, \dots, x_n).$$



Le flot φ étant de classe C^1 , l'application g définie au voisinage de l'origine par

$$g(t, x_2, \dots, x_n) := \varphi_t(0, x_2, \dots, x_n)$$

est de classe C^1 comme composée. On vérifie que $D_0g = \text{Id}$. Le théorème d'inversion locale assure que g réalise un C^1 difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de $m_0 = 0$. Lorsque c'est défini, on a par construction

$$g(\psi_t(x_1, x_2, \dots, x_n)) = g(x_1 + t, x_2, \dots, x_n) = \varphi_{x_1+t}(0, x_2, \dots, x_n)$$

soit finalement

$$g(\psi_t(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \varphi_t \varphi_{x_1}(0, x_2, \dots, x_n) = \varphi_t g(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

ou encore $g \circ \psi_t = \varphi_t \circ g$: ce qu'on voulait. \square

B Au voisinage d'un point singulier : linéarisation

Soit toujours $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de classe C^1 . On suppose maintenant que le point m_0 est un point stationnaire de X , c'est-à-dire que $X(m_0) = 0$. On introduit $A = D_{m_0}X \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ la différentielle de X au point m_0 .

On supposera pour simplifier l'écriture que le point stationnaire m_0 est l'origine. On se ramène à ce cas en changeant de repère. Au voisinage de $m_0 = 0$ on a donc

$$X(m) = D_0X.m + o(m) = Am + o(m).$$

Définition 9.4 *Le champ linéarisé du champ X au point singulier $m_0 = 0$ est le champ linéaire autonome*

$$Y(m) = Am$$

où $A = D_{m_0}X$.

L'intérêt d'introduire le champ linéarisé Y est que le flot de l'équation linéaire autonome associée

$$m'(t) = Am(t),$$

et donc son portrait de phase, sont (au moins en théorie) facilement accessibles (voir le chapitre 2). Il "suffit" en effet de savoir calculer $t \rightarrow e^{tA}$.

Pour m proche de $m_0 = 0$, le champ X et son linéarisé Y sont proches. On peut donc *a priori* espérer que les portraits de phase de X et du champ linéaire Y se ressemblent au voisinage de l'origine. Malheureusement, ce ne sera pas toujours le cas. Notamment :

- Si A n'est pas inversible (caricaturalement lorsque $A = 0$) : dans l'expression

$$X(m) = Am + o(m)$$

le terme d'erreur $o(m)$ n'est pas négligeable devant Am !

- Un problème plus subtil : pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, de valeurs propres imaginaires pures $\pm i$, le champ linéaire $Y(m) = Am$ est un centre, dont toutes les orbites sont périodiques. Cette propriété de périodicité est très fragile, et ne se conserve pas par perturbation : un "petit vent de côté" $o(m)$ empêchera les orbites de se refermer.

Exercice 9.5 Résoudre le système différentiel $(\mathcal{E}_\varepsilon)$

$$\begin{cases} x'(t) &= y(t) + \varepsilon(x^2(t) + y^2(t)) x(t) \\ y'(t) &= -x(t) + \varepsilon(x^2(t) + y^2(t)) y(t) \end{cases} .$$

Montrer que toutes les orbites de (\mathcal{E}_0) sont périodiques. Qu'en est-il des orbites de $(\mathcal{E}_\varepsilon)$? On passera, bien entendu, en coordonnées polaires.

Ceci nous amène à introduire la notion de point singulier hyperbolique.

Définition 9.6 Point singulier hyperbolique

Soit $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de classe C^1 . On dit que le point singulier m_0 est hyperbolique lorsque la matrice

$$A := D_{m_0}X \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

a toutes ses valeurs propres de partie réelle non nulle.

Remarque 9.7 Un point singulier hyperbolique (ou plus généralement pour lequel $A = D_{m_0}X \in GL_n\mathbb{R}$ est inversible) est un point singulier isolé.

Conformément à notre intuition, le portrait de phase d'un champ X au voisinage d'un point singulier hyperbolique ressemble à celui de son linéarisé. C'est ce que nous dit le théorème de Hartman.

Théorème 9.8 Théorème de Hartman

Soit $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de classe C^1 . Soit m_0 un point singulier hyperbolique du champ X . Il existe un homéomorphisme d'un voisinage de m_0 sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n qui envoie le portrait de phase de X sur le portrait de phase de son champ linéarisé Y . Mieux, on peut trouver un tel homéomorphisme qui conjugue les flots de X et de Y (c'est-à-dire qui envoie orbite sur orbite en préservant la paramétrisation).

Nous ne démontrerons pas le théorème de Hartman dans toute sa généralité et toute sa précision, et nous nous contenterons des deux résultats suivants (théorèmes 9.10 et 9.13), dont la démonstration est plus aisée.

Définition 9.9 Sources et puits

Soit $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

On dit que A est un puits lorsque toutes ses valeurs propres sont de partie réelle strictement négative.

On dit que A est une source lorsque toutes ses valeurs propres sont de partie réelle strictement positive.

Dans le chapitre suivant, on montrera dans un premier temps (théorème 10.12) que, lorsque A est un puits, toutes les orbites du champ linéaire $Y(m) = Am$ convergent vers l'origine dans le futur. A l'inverse, quand A est une source, toutes les orbites du champ linéaire Y convergent vers l'origine dans le passé.

On s'intéressera ensuite à un champ non linéaire X , toujours de classe C^1 . Si m_0 est un point singulier hyperbolique de X , on comparera les flots de X (au voisinage de m_0) et de son linéarisé $Y(m) = Am$ (au voisinage de l'origine) pour obtenir le théorème suivant (démontré au chapitre 10).

Théorème 9.10 Le linéarisé est une source ou un puits

Soit $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de classe C^1 , et m_0 un point singulier de X . On note $A = D_{m_0}X \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

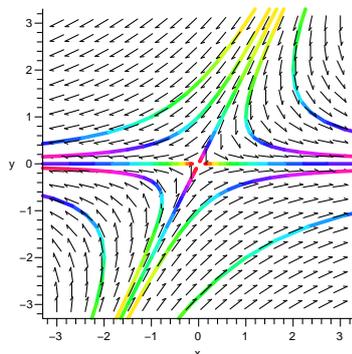
- Si A est un puits, une orbite de X démarrant près de m_0 converge vers m_0 dans le futur.
- Si A est une source, une orbite de X démarrant près de m_0 converge vers m_0 dans le passé.

Remarque 9.11 La seconde assertion découle de la première en remplaçant le champ X par le champ opposé $-X$.

Nous limiterons l'étude des points singuliers hyperboliques qui ne sont ni des puits ni des sources à la dimension 2.

Définition 9.12 Cols en dimension 2

Soit $A \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. On dit que c'est un col lorsque A possède deux valeurs propres réelles $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ de signes opposés.



Un exemple de portrait de phase d'un champ linéaire $X(m) = Am$ associé à un col

Théorème 9.13 Le linéarisé est un col

Soient $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de classe C^1 , et m_0 un point singulier de X . On suppose que $A = D_{m_0}X \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ est un col. Alors, au voisinage de m_0 :

- il existe exactement deux orbites de X qui convergent vers m_0 dans le futur; elles arrivent en m_0 avec des demi-tangentes portées par les deux demi-espaces propres correspondant à la valeur propre $\lambda_1 < 0$.
- il existe exactement deux orbites de X qui convergent vers m_0 dans le passé; elles arrivent en m_0 avec des demi-tangentes portées par les deux demi-espaces propres correspondant à la valeur propre $\lambda_2 > 0$.

Ces quatre orbites exceptionnelles sont appelées les séparatrices (les deux premières sont les séparatrices attractives, les deux dernières les séparatrices répulsives).

Remarque 9.14 Soit σ l'une des séparatrices, correspondant à la solution maximale $t \in I_m \rightarrow \varphi_t(m) \in U$ de l'équation différentielle. Supposons, pour fixer les idées, que σ soit attractive. Dire que σ arrive en m_0 avec une demi-tangente portée par l'un des demi-espaces propres pour la valeur propre λ_1 signifie qu'il existe un temps $T \in I_m$, un vecteur \vec{v} propre (non nul, comme tout vecteur propre qui se respecte) de A pour λ_1 , et une application $c : [0, 1] \rightarrow U$ de classe C^1 telle que $c(0) = m_0$ et $c'(0) = \vec{v}$, et pour lesquels on a

$$\{\varphi_t(m) \mid T \leq t < \sup I_m\} = c([0, 1]).$$

On donnera une description plus précise du portrait de phase de X au voisinage de m_0 dans le paragraphe suivant (corollaire 9.16), où ce théorème est démontré. Retenons qu'il ressemble fort à celui de son linéarisé.

C Etude des cols en dimension 2

Dans ce paragraphe, on précise et on démontre le théorème 9.13. Soit $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs de classe C^1 . Soit $m_0 \in U$ un point

singulier, dont le linéarisé est un col : l'endomorphisme $A = D_{m_0}X$ a deux valeurs propres $\mu < 0 < \lambda$ de signes opposés.

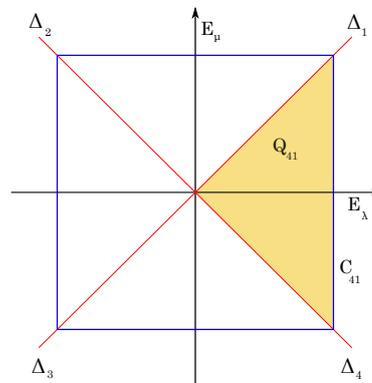
Régionnement

On se place dans un système de coordonnées affines pour lesquelles le point singulier m_0 est l'origine, l'espace propre E_λ associé à la valeur propre positive λ est engendré par le premier vecteur de base et l'espace propre E_μ associé à la valeur propre négative μ est engendré par le second vecteur de base. On note Δ_i les demi-diagonales ($i = 1 \dots 4$).

Pour $a > 0$, le carré

$$C(a) = \{(x, y) \mid |x| < a, |y| < a\}$$

est divisé en quadrants (Q), et bordé par des segments verticaux ou horizontaux (C). On choisira a assez petit, de sorte que m_0 soit le seul point singulier dans $C(a) \subset U$ (remarque 9.7).



Description des orbites dans un petit quadrant

Pour chaque orbite γ rencontrant l'un des quadrants $Q := Q_{i,j}(a)$, on étudiera séparément chaque composante connexe c de $\gamma \cap Q$. Pour fixer les idées, on étudie ce qui se passe dans $Q_{4,1} = \{(x, y) \mid 0 < x < a, |y| < x\}$. On a $C_{4,1} = \{(a, y) \mid |y| < a\}$.

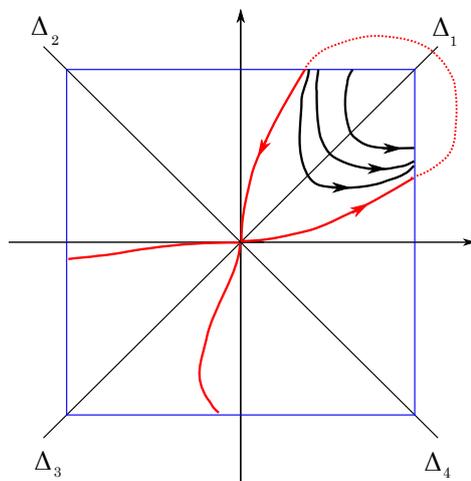
Proposition 9.15 *Lorsque a est assez petit :*

- chacun de ces morceaux d'orbites c inclus dans $Q_{4,1}$ est un graphe $\{(x, y(x))\}$ au-dessus d'un intervalle $]\alpha_c, a[$ avec $\alpha_c \geq 0$, parcouru dans le sens des x croissants ; il sort de $Q_{41}(a)$ dans le futur par $C_{41}(a)$
- pour un seul d'entre eux, on a $\alpha_c = 0$; cette orbite contient m_0 dans son adhérence et elle y admet une demi-tangente horizontale
- tous les autres morceaux d'orbites sortent de $Q_{41}(a)$ dans le passé par l'une des demi-diagonales Δ_4 ou Δ_1 .

En recollant les informations dont on dispose dans chaque quadrant, on en déduira immédiatement la description du portrait de phase de X au voisinage de l'origine.

Corollaire 9.16 Lorsque a est assez petit, les traces des orbites dans le carré $C(a)$ sont, outre l'orbite stationnaire m_0 :

- les quatre orbites exceptionnelles qui contiennent le point stationnaire m_0 dans leur adhérence, une pour chaque quadrant ; ce sont les séparatrices
 - * il y a deux séparatrices répulsives, qui sont tangentes en m_0 à E_λ : les orbites correspondantes convergent vers m_0 dans le passé
 - * et deux séparatrices attractives, qui sont tangentes en m_0 à E_μ : les orbites correspondantes convergent vers m_0 dans le futur
- les autres orbites coupent une seule fois l'une des diagonales, et sortent du carré par un deux des côtés la jouxtant.



Les quatre séparatrices, et trois autres morceaux d'orbites

Cette description locale ne préjuge en rien de ce qui se passe hors du carré. Par exemple, deux séparatrices peuvent faire partie de la même orbite, comme sur le dessin ci-dessus.

Passons à la démonstration de la proposition 9.15. Le point crucial de la preuve est le lemme 9.20, où l'on ramène l'étude de l'équation différentielle autonome $m' = X(m)$ (*) dans \mathbb{R}^2 à l'étude d'une équation différentielle scalaire non autonome (E). On pourra alors appliquer à (E) les théorèmes de comparaison développés dans le chapitre 6 (lemme 9.21).

Lemme 9.17 Notons $X = (P, Q)$ les composantes du champ de vecteurs X . On a, au voisinage du point $m_0 = 0$:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \lambda x + o(x, y), & \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= o(1), \\ Q(x, y) &= \mu y + o(x, y), & \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) &= \mu + o(1). \end{aligned}$$

Preuve Les composantes P et Q sont différentiables, avec en $m_0 = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(m_0) &= \lambda, & \frac{\partial P}{\partial y}(m_0) &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(m_0) &= 0, & \frac{\partial Q}{\partial y}(m_0) &= \mu. \end{aligned}$$

Ceci donne les développements limités à l'ordre 1 de P et Q en l'origine, i.e. la première colonne. La continuité des dérivées partielles de P et Q en l'origine donne la seconde colonne. \square

Lemme 9.18 *Pour a petit et $(x, y) \in Q_{41}(a)$, on a*

$$P(x, y) > 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial y} P - Q \frac{\partial P}{\partial y} \right)(x, y) < 0.$$

Preuve On vient de dire que $P(x, y) = \lambda x + o(x, y)$. Lorsque $(x, y) \in Q_{41}(a)$, on a $|y| < x$ et donc dans ce cas $P(x, y) = \lambda x + o(x)$. Puisque $\lambda > 0$, il suit que $P(x, y) > 0$ lorsque $(x, y) \in Q_{41}(a)$ avec a petit.

Le lemme précédent montre également que

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial y} P - Q \frac{\partial P}{\partial y} \right)(x, y) = \lambda \mu x + o(x, y).$$

On raisonne alors comme ci-dessus pour conclure. \square

Lemme 9.19 *Lorsque a est petit, un morceau d'orbite c inclus dans $Q_{41}(a)$ est le graphe $\{(x, h(x))\}$ d'une fonction $h : x \rightarrow h(x)$ de classe C^1 .*

Preuve Le morceau d'orbite c est l'image d'une application de classe C^1 $t \in I \rightarrow m(t) = (x(t), y(t)) \in Q_{41}(a)$ qui est solution du système différentiel $m' = X(m)$. En particulier, lorsque a est assez petit, le lemme 9.18 assure que $x'(t) = P(x(t), y(t)) > 0$. L'application $\sigma : t \in I \rightarrow x(t) \in J$ est donc un C^1 difféomorphisme (croissant) de I sur son image J . Il suffit alors pour conclure de reparamétriser c par l'abscisse $x \in J$, c'est-à-dire d'écrire que

$$c = \{(x(t), y(t)) \mid t \in I\} = \{(x, y(\sigma^{-1}(x))) \mid x \in J\}.$$

On pose bien sûr $h := y \circ \sigma^{-1}$. \square

Lemme 9.20 *Le graphe $c = \{(x, h(x))\}$, tracé dans $Q_{41}(a)$, d'une application $h : x \rightarrow h(x)$ de classe C^1 est un morceau d'orbite de X si et seulement la fonction h est solution de l'équation différentielle scalaire non autonome*

$$h'(x) = \frac{Q(x, h(x))}{P(x, h(x))}. \quad (E)$$

Preuve Ce graphe est une courbe paramétrée régulière. Ce sera un morceau d'orbite si et seulement si le champ de vecteurs $X = (P, Q)$ est tangent au graphe en chaque point (corollaire 8.21), d'où la condition. Rappelons que P ne s'annule pas dans le quadrant $Q_{41}(a)$ (lemme 9.18). \square

Lemme 9.21 *Pour $a > 0$ petit, le couple de fonctions*

$$\begin{aligned} u &: x \in]0, a[\rightarrow x \in \mathbb{R} \\ v &: x \in]0, a[\rightarrow -x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

constitue un entonnoir resserré dans le passé et contractant pour (E) .

Preuve Il suit du lemme 9.17 que, pour $a > 0$ assez petit, la fonction u est une sur-solution de (E) sur $]0, a[$ car alors

$$\frac{Q(x, u(x))}{P(x, u(x))} = \frac{\mu x + o(x)}{\lambda x + o(x)} = \frac{\mu}{\lambda} + o(1) < 0$$

tandis que $u' \equiv 1$. De même pour montrer que v est une sous-solution.

Soit $f = Q/P$. Pour voir que l'entonnoir délimité par u et v est contractant, il suffit de montrer que $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$ sur $Q_{41}(a)$ (théorème 6.19). Cette expression a même signe que

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial y} P - Q \frac{\partial P}{\partial y} \right)(x, y)$$

qui est négatif sur $Q_{41}(a)$ pour a petit (lemme 9.17 de nouveau). \square

Il ne nous reste plus qu'à faire le bilan.

Preuve de la proposition 9.15

Le lemme 9.21 assure qu'il existe une unique solution h_0 de (E) définie sur tout l'intervalle $]0, a[$, et dont le graphe est tracé dans l'entonnoir délimité par u et v . Ce graphe est une orbite du champ de vecteurs X (lemme 9.20). Il contient l'origine dans son adhérence; c'est donc notre séparatrice. Les graphes des autres solutions de (E) , c'est-à-dire les autres orbites, sortent de l'entonnoir par l'une des demi-diagonales – graphes de u et de v .

Reste à voir que h_0 admet une dérivée à droite nulle en 0, et donc que la séparatrice tracée dans $Q_{4,1}$ admet en m_0 une demi-tangente horizontale. Cela résulte du fait que, pour tout $\varepsilon > 0$, le couple de fonctions $u_\varepsilon = \varepsilon x$, $v_\varepsilon(x) = -\varepsilon x$ ($0 < x < a_\varepsilon$, a_ε petit) constitue encore un entonnoir resserré dans le passé et contractant pour (E) . On aura donc, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in]0, a_\varepsilon[$,

$$\left| \frac{h_0(x)}{x} \right| < \varepsilon$$

d'où le résultat. \square

10. Le théorème de Lyapunov

Nous commençons par dégager la notion d'ensemble limite futur et passé d'un point (ou d'une orbite). Nous introduisons ensuite les fonctions de Lyapunov, et prouvons le théorème 9.10 (qui décrit le portrait de phase au voisinage d'un point stationnaire dont le linéarisé est un puits ou une source).

A Ensembles limites futurs et passés

Soit $m \in U$. Rappelons que, si l'on suppose $\sup I_m < \infty$, le lemme des bouts 4.3 assure que $\varphi_t(m)$ sort définitivement de tout compact de U lorsque $t \rightarrow \sup I_m$. L'orbite de m ne pourra donc s'accumuler sur un point de U dans le futur. Même chose dans le passé.

Nous nous intéresserons ici au contraire à des solutions qui sont globales dans le futur, ou bien dans le passé.

Définition 10.1 Ensemble limite d'un point dans le futur

Soit $m \in U$. On suppose que $\sup I_m = +\infty$. L'ensemble limite de m dans le futur est

$$\omega(m) = \{y \in U \mid \exists t_n \rightarrow +\infty, y = \lim \varphi_{t_n}(m)\} = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\{\varphi_t(m) \mid t \geq s\}},$$

l'adhérence étant prise dans U . C'est donc un fermé de U .

Définition 10.2 Ensemble limite d'un point dans le passé

Soit $m \in U$. On suppose que $\inf I_m = -\infty$. L'ensemble limite de m dans le passé est

$$\alpha(m) = \{y \in U \mid \exists t_n \rightarrow -\infty, y = \lim \varphi_{t_n}(m)\} = \bigcap_{s \leq 0} \overline{\{\varphi_t(m) \mid t \leq s\}},$$

l'adhérence étant prise dans U . C'est donc un fermé de U .

Remarque 10.3 Les lettres α et ω sont respectivement la première et la dernière lettre de l'alphabet grec : le commencement et la fin.

Notons que, même lorsque le champ de vecteurs est supposé complet, l'ensemble limite d'une orbite peut être vide. Considérer par exemple un champ de vecteur constant, non nul, dans $U = \mathbb{R}^n$.

Exemple 10.4 Prenons l'exemple du système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) + (1 - x^2(t) - y^2(t))x(t) \\ y'(t) = x(t) + (1 - x^2(t) - y^2(t))y(t) \end{cases},$$

que le lecteur étudiera en passant en coordonnées polaires.

- Le seul point stationnaire est l'origine.
- Soit m dans le disque unité ouvert pointé. L'orbite de m converge vers l'origine dans le passé, et admet le cercle unité \mathbb{S}^1 comme ensemble limite dans le futur :

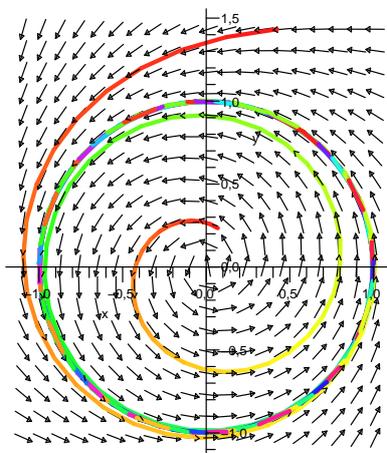
$$\alpha(m) = \{0\}, \quad \omega(m) = \mathbb{S}^1.$$

- Le cercle unité constitue une orbite périodique. On a donc, pour $p \in \mathbb{S}^1$,

$$\alpha(p) = \omega(p) = \mathbb{S}^1.$$

- L'orbite d'un point q pris hors du disque unité fermé part à l'infini en temps fini dans le passé (l'ensemble limite dans le passé n'est donc pas défini) et admet également le cercle unité comme ensemble limite dans le futur :

$$\omega(q) = \mathbb{S}^1.$$



Proposition 10.5 Soit $m \in U$ tel que $\sup I_m = +\infty$. Alors :

- on a $\omega(m) = \omega(\varphi_s(m))$ pour tout $s \in I_m$;
- on a $\varphi_s(p) \in \omega(m)$ pour tout $p \in \omega(m)$ et tout $s \in I_p$.

La première propriété nous dit que l'ensemble limite est celui de l'orbite \mathcal{O}_m plutôt que celle de m . La seconde nous dit que l'ensemble limite $\omega(m)$ d'un point m est invariant par le flot.

On laisse au lecteur le soin d'énoncer le résultat correspondant pour l'ensemble limite dans le passé.

Preuve La première propriété suit de ce que $\varphi_{t_n}(\varphi_s(m)) = \varphi_{t_n+s}(m)$, lorsque ces expressions ont un sens (proposition 7.6).

Passons à la seconde propriété. Soit $s \in I_p$. On choisit une suite d'instantants $t_n \in \mathbb{R}$ avec $t_n \rightarrow +\infty$ et $\varphi_{t_n}(m) \rightarrow p$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Par continuité du flot (et plus précisément par continuité de l'application φ_s , bien définie au voisinage de p), il suit que

$$\varphi_s(p) = \varphi_s\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n}(m)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_s(\varphi_{t_n}(m)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n+s}(m),$$

et donc $\varphi_s(p) \in \omega(m)$. \square

Proposition 10.6 *Soit $m \in U$. On suppose qu'il existe un compact $K \subset U$ dans lequel l'orbite de m reste piégée dans le futur, c'est-à-dire tel qu'on ait $\varphi_t(m) \in K$ pour tout $t \in I_m$ avec $t \geq 0$. Alors :*

1. $\sup I_m = +\infty$;
2. l'ensemble limite $\omega(m) \subset U$ est un compact connexe non vide ;
3. pour tout $p \in \omega(m)$, on a $I_p = \mathbb{R}$;
4. l'orbite de m converge vers un point $m_0 \in K$ dans le futur si et seulement si l'ensemble limite $\omega(m)$ est égal au singleton $\{m_0\}$.

Preuve 1. C'est le lemme des bouts 4.3.

2. L'ensemble limite $\omega(m) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\{\varphi_t(m) \mid t \geq s\}}$ est compact connexe non vide comme intersection décroissante de compacts connexes non vides.

3. Pour $t \in I_p$, on a $\varphi_t(p) \in \omega(m) \subset K$ (proposition 10.5), donc le lemme des bouts assure que $I_p = \mathbb{R}$ puisque K est compact.

4. Si $\varphi_t(m) \rightarrow m_0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, on a bien $\omega(m) = \{m_0\}$. Démontrons la réciproque. On vient de voir en 2. que $\omega(m)$ est non vide. Soit $m_0 \in \omega(m)$, et supposons que $\varphi_t(m)$ ne converge pas vers m_0 lorsque $t \rightarrow +\infty$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ et une suite d'instantants $t_n \rightarrow +\infty$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\varphi_{t_n}(m) \in K \setminus B(m_0, \varepsilon)$. Puisque $K \setminus B(m_0, \varepsilon)$ est compact (fermé du compact K , la suite $(\varphi_{t_n}(m))$ possède une sous-suite convergente, de limite $p \in K \setminus B(m_0, \varepsilon)$. Donc $p \in \omega(m)$ avec $p \neq m_0$. \square

Remarque 10.7 La propriété 4. généralise à une famille à un paramètre continu le résultat suivant vu au cours de topologie : une suite à valeurs dans un compact est convergente si et seulement si elle a une seule valeur d'adhérence.

B Stabilité d'un point singulier

B.1 Stabilité

Soient $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs autonome de classe C^1 et m_0 un point singulier (ou point d'équilibre), c'est-à-dire tel que $X(m_0) = 0$. On munit \mathbb{R}^n d'une norme.

Définition 10.8 Point d'équilibre stable

Le point d'équilibre m_0 est stable dans le futur lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout point $m \in U$ tel que $\|m_0 - m\| < \delta$, on ait $\|m_0 - \varphi_t(m)\| < \varepsilon$ pour tout $t \in I_m$ avec $t \geq 0$.

Autrement dit, l'orbite d'un point m suffisamment proche de m_0 reste confinée, dans le futur, dans un voisinage arbitraire de m_0 . Si $\varepsilon > 0$ est choisi assez petit de sorte que le compact $\overline{B}(m_0, \varepsilon) \subset U$ soit inclus dans U , le lemme de sortie des compacts (théorème 4.3) assure alors que $\sup I_m = +\infty$, c'est-à-dire que la solution correspondante est globale dans le futur.

Remarque 10.9 – On définit de même une notion de stabilité dans le passé.

– Le point m_0 est stable dans le futur pour le champ X si et seulement si il est stable dans le passé pour le champ $-X$.

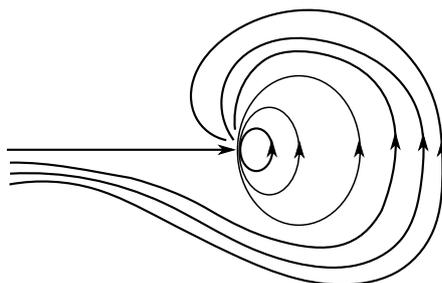
Définition 10.10 Point d'équilibre asymptotiquement stable

Le point d'équilibre m_0 est asymptotiquement stable dans le futur si

- il est stable
- il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset U$ de m_0 tel que l'orbite de tout point $m \in \mathcal{V}$ converge vers m_0 dans le futur.

On définit de même la stabilité asymptotique dans le passé.

Remarque 10.11 La seconde condition dans la définition 10.10 n'entraîne pas la première. Nous esquissons en effet ci-dessous le portrait de phase d'un champ autonome dans le plan dont toutes les orbites convergent dans le futur vers un point d'équilibre m_0 . L'orbite de certains points très proches de m_0 (notamment sur la verticale en-dessous de m_0) s'éloigne beaucoup de m_0 avant de revenir converger vers ce point.

**B.2 Stabilité pour un champ linéaire**

Commençons par étudier la stabilité de l'origine pour un champ linéaire.

Théorème 10.12 Stabilité en linéaire

Soient $A \in M_n \mathbb{R}$ et $m' = Am$ l'équation différentielle linéaire autonome associée. L'origine est

- asymptotiquement stable dans le futur si et seulement si A est un puits, c'est-à-dire si toutes ses valeurs propres sont de partie réelle strictement négative
- asymptotiquement stable dans le passé si et seulement si A est une source, c'est-à-dire si toutes ses valeurs propres sont de partie réelle strictement positive.

Noter que le second cas se déduit du premier en remplaçant la matrice A par son opposée $-A$.

Preuve Ce résultat est une conséquence immédiate des deux lemmes suivants 10.13 et 10.15. \square

Lemme 10.13 *L'origine est asymptotiquement stable dans le futur, pour l'équation différentielle linéaire $m' = Am$, si et seulement si $e^{tA} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.*

Preuve Conséquence de l'expression explicite des solutions de $m' = Am$ (proposition 2.7). \square

Rappel 10.14 Décomposition de Jordan-Dunford

Soit $A \in M_n\mathbb{R}$. Il existe un unique couple de matrices $D, N \in M_n\mathbb{R}$, avec D diagonalisable sur \mathbb{C} et N nilpotente, qui commutent (c'est-à-dire avec $ND = DN$) et telles que $A = D + N$. De plus, les valeurs propres de D (comptées avec multiplicité) sont celles de A .

Lemme 10.15 *Soit $A \in M_n\mathbb{R}$. On a $e^{tA} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ si et seulement si A est un puits.*

Preuve Supposons que $e^{tA} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Soient alors une valeur propre λ de A et $v \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé. On a donc $\|e^{tA}(v)\| = \|e^{t\lambda}v\| = |e^{t\lambda}|\|v\| = e^{t\operatorname{Re}\lambda}\|v\| \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Il suit donc bien que $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

Pour la réciproque, on utilise la décomposition de Jordan-Dunford 10.14 $A = D + N$ de A . Puisque D et N commutent, on a $e^{t(D+N)} = e^{tD}e^{tN}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (proposition 2.6). Munissons $M_n\mathbb{C}$ d'une norme d'algèbre.

Puisque N est nilpotente, il suit que l'application $t \in \mathbb{R} \rightarrow e^{tN} \in M_n\mathbb{C}$ est polynomiale, de degré au plus n . Il existe donc une constante $c_1 > 0$ telle que $\|e^{tN}\| \leq c_1(1 + |t|)^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

La matrice D est diagonalisable et ses valeurs propres (λ_i) vérifient $\operatorname{Re}\lambda_i \leq -a < 0$ pour tout i . Il existe donc une matrice inversible P telle que $D = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$. Il suit de la proposition 2.6 que, pour tout réel t , on a $e^{tD} = P \operatorname{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}) P^{-1}$. Puisque $|e^\alpha| = e^{\operatorname{Re}\alpha}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, il existe une constante $c_2 > 0$ telle que $\|e^{tD}\| \leq c_2 e^{-ta}$ pour tout $t \geq 0$.

On a donc $\|e^{tA}\| \leq \|e^{tD}\| \|e^{tN}\| \leq c_1 c_2 (1 + |t|)^n e^{-ta} \leq e^{-ta/2}$ pour tout $t \geq 0$ assez grand. Le résultat suit. \square

Exercice 10.16 Déterminer à quelle condition, portant sur l'endomorphisme $A \in M_n \mathbb{R}$, l'origine est un point d'équilibre stable dans le futur (resp. dans le passé) pour l'équation différentielle $m' = Am$.

C Fonctions de Lyapunov

Soient $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs autonome de classe C^1 et m_0 un point d'équilibre.

Définition 10.17 Fonction de Lyapunov

Une fonction de Lyapunov pour X en m_0 est une fonction scalaire continue $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un voisinage $\mathcal{V} \subset U$ de m_0 et telle que

- (1) L admet un minimum strict en m_0
- (2) L décroît le long des portions d'orbites, distinctes de l'orbite stationnaire $\{m_0\}$, qui sont incluses dans \mathcal{V} .

Définition 10.18 Fonction de Lyapunov stricte

Une fonction de Lyapunov pour X en m_0 est une fonction de Lyapunov stricte si elle vérifie de plus la condition

- (2S) L décroît strictement le long des portions d'orbites, distinctes de l'orbite stationnaire $\{m_0\}$, qui sont incluses dans \mathcal{V} .

Dire que L décroît le long de la portion d'orbite $\{\varphi_s(m) \mid s \in [t_0, t_1]\} \subset \mathcal{V}$ incluse dans \mathcal{V} signifie que, pour tous $t_0 \leq s_0 \leq s_1 \leq t_1$, on a l'inégalité large $L(\varphi_{s_1}(m)) \leq L(\varphi_{s_0}(m))$. Elle décroît strictement si $L(\varphi_{s_1}(m)) < L(\varphi_{s_0}(m))$ lorsque $s_0 < s_1$.

Convention Nous normaliserons nos fonctions de Lyapunov de sorte que $L(m_0) = 0$. Il faut alors penser que $L(m)$ "mesure" la proximité de m au point m_0 (condition (1)). La condition (2) ou (2S) exprime alors que les orbites "se rapprochent" de m_0 au cours du temps.

Remarque 10.19 – Si X admet une fonction de Lyapunov stricte L en m_0 , le point m_0 est un zéro isolé du champ. En effet, il n'y a pas d'autre point stationnaire que m_0 dans l'ouvert de définition de L .

– On cherchera souvent (mais pas exclusivement) des fonctions de Lyapunov sous la forme $L(m) = \|m - m_0\|^2$, où $\| \cdot \|$ sera une norme euclidienne bien adaptée au champ de vecteurs X . Voir par exemple la proposition 10.22.

Exercice 10.20 Soit $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs C^1 et m_0 un point stationnaire de X . On suppose qu'il existe une fonction de Lyapunov stricte $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ pour X en m_0 . Montrer que le champ X n'admet pas d'orbite périodique.

Remarque Soit $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Si $t \rightarrow \varphi_t(m)$ est une solution de $m' = X(m)$ tracé dans \mathcal{V} , l'évolution de la fonction L le long de cette orbite est régie par

$$\frac{d}{dt}L(\varphi_t(m)) = D_{\varphi_t(m)}L.X(\varphi_t(m)).$$

Lorsque L est de classe C^1 , il suffira donc de vérifier que

$$\text{pour tout } m \in \mathcal{V}, \text{ on a } D_mL.X(m) \leq 0$$

pour assurer la condition (2), et que

$$\text{pour tout } m \in \mathcal{V} \text{ avec } m \neq m_0, \text{ on a } D_mL.X(m) < 0$$

pour assurer la condition (2S).

Dans la pratique, cette dernière condition (suffisante mais non nécessaire) sera souvent trop restrictive pour nous permettre d'exhiber aisément des fonctions de Lyapunov. Il suffira d'assurer que $D_mL.X(m) \leq 0$ et que la dérivée $\frac{d}{dt}L(\varphi_t(m))$ ne s'annule qu'en des instants isolés le long de chaque orbite $t \rightarrow \varphi_t(m)$. Voir notamment l'exemple du pendule amorti.

Théorème 10.21 de Lyapunov Soient $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs autonome de classe C^1 , et m_0 un point d'équilibre.

- On suppose qu'il existe une fonction de Lyapunov $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ pour X en m_0 . Alors m_0 est un point d'équilibre stable dans le futur.
- On suppose qu'il existe une fonction de Lyapunov stricte $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ pour X en m_0 . Alors m_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable dans le futur.

Preuve • Dans un premier temps, on suppose que L est une fonction de Lyapunov, et on montre que m_0 est un point d'équilibre stable. Rappelons que nous avons normalisé L de sorte que $L(m_0) = 0$. Fixons $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B}(m_0, \varepsilon) \subset \mathcal{V}$, et notons

$$\alpha := \inf\{L(m) \mid \|m - m_0\| = \varepsilon\}.$$

Puisque L est continue et admet en m_0 un minimum strict, il suit que $\alpha > 0$. La continuité de L assure également qu'il existe $0 < \delta < \varepsilon$ tel que $L \leq \alpha/2$ sur la boule $B(m_0, \delta)$. Le théorème des valeurs intermédiaires montre alors qu'une orbite démarrant en un point $m \in B(m_0, \delta)$ reste confinée dans $B(m_0, \varepsilon)$ dans le futur, puisqu'elle ne peut passer par la sphère $S(m_0, \varepsilon)$. C'est la stabilité.

Rappelons qu'il suit alors du lemme des bouts 4.3 que $\sup I_m = +\infty$.

- On suppose maintenant que L est une fonction de Lyapunov stricte. On vient de démontrer que le point d'équilibre m_0 est stable dans le futur.

Montrons la convergence des orbites vers m_0 . Soit m un point de $B(m_0, \delta)$. Le choix de δ assure que l'orbite de m reste confinée dans le futur dans le compact $\overline{B}(m_0, \varepsilon) \subset \mathcal{V} \subset U$. La proposition 10.6 s'applique donc à m . Pour montrer que l'orbite de m converge vers m_0 dans le futur, il suffit donc de montrer que l'ensemble limite $\omega(m)$, qui est non vide, est égal à $\{m_0\}$.

Soit donc $p \in \omega(m)$. Puisque la fonction L est continue et décroissante le long des orbites, on a

$$L(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} L(\varphi_t(m)) = \inf\{L(\varphi_t(m)) \mid t \geq 0\}.$$

Soit $s > 0$. Puisque l'ensemble limite est invariant par le flot, on a également $q = \varphi_s(p) \in \omega(m)$, et donc $L(q) = \inf\{L(\varphi_t(m)) \mid t \geq 0\}$. Puisque L est une fonction de Lyapunov stricte, l'égalité $L(q) = L(\varphi_s(p)) = L(p)$ impose finalement que $p = m_0$. \square

D Puits et sources

Soit $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de classe C^1 . On suppose que l'origine est un point stationnaire et que $A := D_0X$ est un puits, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative.

On veut montrer que l'origine est alors asymptotiquement stable dans le futur (ce qui démontrera le théorème 9.10). Pour cela, on va chercher à exhiber une fonction de Lyapunov pour X en l'origine.

Notons $Y(m) = Am$ le champ linéarisé de X en l'origine. On a déjà vu que l'origine est asymptotiquement stable dans le futur pour le champ linéarisé Y (théorème 10.12).

Nous allons en un premier temps exhiber une fonction de Lyapunov L pour le champ linéarisé Y en l'origine. Nous montrerons ensuite que cette fonction L est également une fonction de Lyapunov pour le champ initial X en l'origine. On conclura avec le théorème de Lyapunov 10.21.

Proposition 10.22 Fonction de Lyapunov stricte pour un puits

Soient $A \in M_n\mathbb{R}$ un puits et $Y(m) = Am$ le champ linéaire associé sur \mathbb{R}^n . Soit $\|\cdot\|$ une norme euclidienne sur \mathbb{R}^n . On pose, pour $m \in \mathbb{R}^n$,

$$L(m) = \int_0^\infty \|e^{sA}m\|^2 ds.$$

Alors L bien définie. C'est une forme quadratique définie positive sur \mathbb{R}^n . Et L est une fonction de Lyapunov stricte pour le champ Y en l'origine.

Preuve Puisque A est un puits, il suit de la décomposition de Dunford 10.14 qu'il existe deux constantes $\alpha, c > 0$ telles qu'on ait $\|e^{sA}\| \leq ce^{-\alpha s}$ pour tout $s > 0$ (voir la démonstration du lemme 10.15).

On en déduit que la fonction L est bien définie, et que c'est une forme quadratique de forme polaire

$$B(x, y) = \int_0^\infty (e^{sA}x, e^{sA}y) ds$$

où $(,)$ désigne le produit scalaire sur \mathbb{R}^n . Il est immédiat que L est définie positive ; elle admet donc un minimum strict en l'origine.

Désignons par $\psi : t \rightarrow \psi_t$ le flot du champ linéaire Y . On observe pour conclure que, pour tout point $m \neq 0$ distinct de l'origine et tout instant $t > 0$, on a

$$L(\psi_t(m)) = L(e^{tA}m) = \int_0^\infty \|e^{sA}e^{tA}m\|^2 ds = \int_t^\infty \|e^{sA}m\|^2 ds < L(m)$$

et donc que L est donc strictement décroissante le long des orbites distinctes de l'origine. Notons plus précisément (ce sera utile ci-dessous) que

$$D_m L.Y(m) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} L(\psi_t(m)) = -\|m\|^2 \quad (10.1)$$

(on dérive une intégrale fonction de sa borne). □

Corollaire 10.23 Fonction de Lyapunov stricte pour un champ dont le linéarisé est un puits

Soit $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de classe C^1 . On suppose que le point $m_0 \in U$ est un point stationnaire de X et que $A = D_{m_0}X$ est un puits. La fonction

$$L(m) = \int_0^\infty \|e^{sA}(m - m_0)\|^2 ds$$

est une fonction de Lyapunov stricte pour le champ X en m_0 .

En particulier, le point m_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable dans le futur pour X .

Preuve On se ramène par translation (ou changement de repère) au cas où le point m_0 est l'origine.

On veut montrer que L décroît strictement le long des orbites de X . Pour cela, il suffit de montrer que, pour tout point m proche de l'origine avec $m \neq 0$, on a $D_m L.X(m) < 0$. On écrit

$$X(m) = Am + R(m) = Y(m) + R(m),$$

où le reste $R(m)$ vérifie $R(m) = o(\|m\|)$. Il suit de l'identité (10.1) que

$$D_m L.X(m) = D_m L.Y(m) + D_m L.R(m) = -\|m\|^2 + D_m L.R(m).$$

Notons B la forme polaire de L . C'est une forme bilinéaire, en dimension finie. Il existe donc une constante $c > 0$ avec $|B(u, v)| \leq c\|u\| \|v\|$ pour tous

vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$. De plus $D_m L.v = 2B(m, v)$ pour tout point m et tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$. On conclut car alors

$$D_m L.X(m) = -\|m\|^2 + 2B(m, R(m)) = -\|m\|^2 + o(\|m\|^2) < 0$$

pour m proche de 0. □

E Bassin d'attraction d'un point singulier

Définition 10.24 Soient $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de classe C^1 et $m_0 \in U$. Le bassin d'attraction de m_0 dans le futur est l'ensemble

$$\Omega_+(m_0) := \{p \in U \mid \varphi_t(p) \xrightarrow{t \rightarrow \sup I_p} m_0\}$$

des points dont l'orbite converge vers m_0 dans le futur.

Remarque 10.25 – Pour que le bassin d'attraction $\Omega_+(m_0)$ soit non vide, il est nécessaire que m_0 soit un point singulier (proposition 4.8).

– Il se peut que le bassin d'attraction d'un point singulier m_0 soit réduit à ce seul point.

– Noter que $p \in \Omega_+(m_0)$ implique $\sup I_p = +\infty$ (lemme des bouts).

– On définit de même le bassin d'attraction d'un point dans le passé.

Exercice 10.26 Déterminer le bassin d'attraction de l'origine en dimension 2 pour un soleil répulsif, un col, ou un noeud attractif.

Lemme 10.27 Le bassin d'attraction $\Omega_+(m_0)$ est stable par le flot. C'est donc une réunion d'orbites.

Preuve Immédiate. □

Lemme 10.28 On suppose que le point m_0 est asymptotiquement stable dans le futur. Alors son bassin d'attraction $\Omega_+(m_0)$ est un ouvert de U .

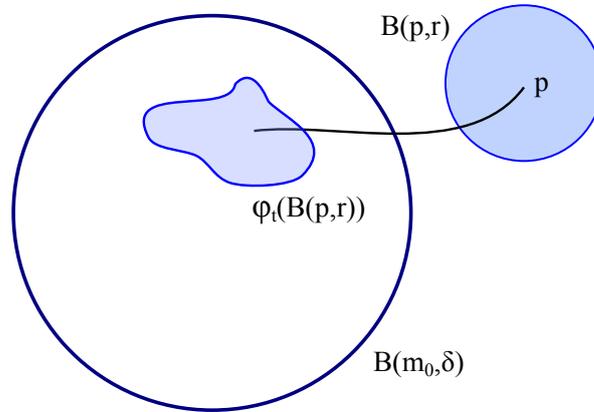
Preuve Par hypothèse, le bassin contient une boule centrée en m_0 , soit

$$B(m_0, \delta) \subset \Omega_+(m_0).$$

Soit $p \in \Omega_+(m_0)$. Il existe alors $t \in \mathbb{R}$ pour lequel $\varphi_t(p) \in B(m_0, \delta)$.

Le domaine de définition du flot étant ouvert dans $\mathbb{R} \times U$ et le flot étant continu, l'application φ_t est définie et continue sur un voisinage de p .

Il existe donc une boule $B(p, r) \subset U$ sur laquelle φ_t est définie, avec $\varphi(B(p, r)) \subset B(m_0, \delta) \subset \Omega_+(m_0)$. On conclut avec le lemme précédent. □



Le bassin d'attraction est ouvert

Pour préciser le bassin d'attraction $\Omega_+(m)$ d'un point stationnaire, on pourra utiliser la proposition suivante.

Proposition 10.29 Soient $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de classe C^1 et $m_0 \in U$. On suppose que le champ admet une fonction de Lyapunov stricte en m_0 , soit $L : \mathcal{V} \rightarrow [0, \infty[$ définie sur un voisinage $\mathcal{V} \subset U$ de m_0 , et qu'on supposera normalisée de sorte que $L(m_0) = 0$.

Soit $a > 0$ tel que $K_a = \{p \in \mathcal{V} \mid L(p) \leq a\}$ soit une partie compacte de \mathcal{V} . Alors $K_a \subset \Omega_+(m_0)$.

Preuve L'orbite d'un point $p \in K_a$ reste piégée dans K_a dans le futur. Conclure comme dans la preuve du théorème de Lyapunov 10.21 en utilisant la proposition 10.6. \square

Rappel 10.30 Une fonction continue $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ est propre si l'image réciproque $L^{-1}(C)$ de tout compact $C \subset \mathbb{R}$ est une partie compacte de U .

L'énoncé suivant est une conséquence immédiate de la proposition 10.29.

Corollaire 10.31 On suppose que le champ $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ admet une fonction de Lyapunov stricte $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ en m_0 définie sur U tout entier. Si de plus la fonction L est propre, alors $U = \Omega_+(m_0)$: toutes les orbites de X convergent vers m_0 dans le futur.

Un petit sujet de réflexion pour conclure.

Remarque 10.32 Il ne suffit pas qu'il existe une fonction de Lyapunov stricte $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ pour X en m_0 définie sur tout U pour que l'on ait $U = \Omega_+(m_0)$. Autrement dit, l'hypothèse L propre ci-dessus est indispensable. Voir les exercices.

11. La méthode d'Euler

Nous proposons dans ce chapitre une seconde preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz, cette fois-ci par la méthode d'Euler.

Cette méthode consiste à approcher la solution au problème de Cauchy que l'on cherche à construire par des fonctions affines par morceaux qui seront des "solutions approchées".

Sauf mention du contraire, la donnée f sera seulement supposée continue. Nous terminerons ce chapitre par une preuve du théorème d'existence de Cauchy-Péano-Arzela.

A Solution approchée

Soient $f : J \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue et l'équation différentielle associée $x' = f(t, x)$ (*).

Définition 11.1 Soit $\varepsilon > 0$. Une solution ε -approchée de (*) est une application $y : A \subset J \rightarrow U$ définie sur un intervalle A , qui est continue et de classe C^1 par morceaux et telle que, en chaque instant $t \in I$ où elle est dérivable, on ait

$$\|y'(t) - f(t, y(t))\| \leq \varepsilon.$$

Il va être facile de construire des solutions approchées qui seront affines par morceaux (d'où l'intérêt de ne pas leur imposer d'être de classe C^1 !)

Soient $(t_0, x_0) \in J \times U$ et $\mathcal{C} = [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \times \overline{B}(x_0, R) \subset J \times U$ un cylindre de sécurité centré en ce point. Rappelons que, sur ce cylindre, on a $\|f\| \leq M$ avec $\varepsilon_0 \leq R/M$ (définition 3.7).

Définition 11.2 Une application continue

$$y_\sigma : [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

est associée à la subdivision

$$\sigma = [t_0 - \varepsilon_0 = t_{-p} < \cdots < t_0 < \cdots < t_q = t_0 + \varepsilon_0]$$

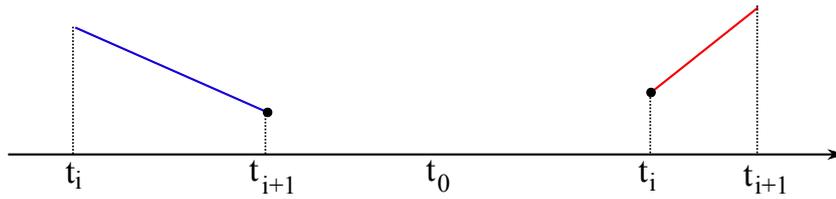
de l'intervalle $[t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0]$ lorsque sa restriction à chacun des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ ($-p \leq i \leq q-1$) est affine.

Lemme 11.3 Soit $\sigma = [t_0 - \varepsilon_0 = t_{-p} < \dots < t_0 < \dots < t_q = t_0 + \varepsilon_0]$ une subdivision de $[t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0]$. Il existe une unique application

$$y_\sigma : [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \longrightarrow \overline{B}(x_0, R)$$

associée à cette subdivision telle que $y_\sigma(t_0) = x_0$, et avec

$$\begin{aligned} \text{si } 0 \leq i < q : (y_\sigma)' \Big|_{]t_i, t_{i+1}[} &= f(t_i, y_\sigma(t_i)) \\ \text{si } -p \leq i < 0 : (y_\sigma)' \Big|_{]t_i, t_{i+1}[} &= f(t_{i+1}, y_\sigma(t_{i+1})). \end{aligned}$$



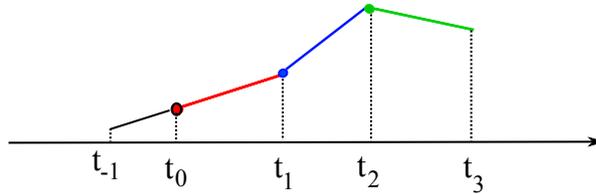
Preuve Dans le futur de t_0 . On construit récursivement y_σ sur chacun des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ ($0 \leq i < q - 1$) en posant, pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$:

$$y_\sigma(t) = y_\sigma(t_i) + (t - t_i) f(t_i, y_\sigma(t_i)).$$

Il faut vérifier que y_σ est à valeurs dans $\overline{B}(x_0, R)$ ce qui permet de calculer $f(t_{i+1}, y_\sigma(t_{i+1}))$ et de continuer la construction :

$$t \in [t_i, t_{i+1}] : \|y_\sigma(t) - x_0\| \leq \sum_{j=0}^i (t_{i+1} - t_j) M \leq \varepsilon_0 M \leq R.$$

On reprend le même principe pour construire y_σ dans le passé de t_0 . \square



Proposition 11.4 Existence de solutions approchées

Soit $\varepsilon > 0$. Si le pas

$$h := \sup_{i=-p}^{q-1} |t_{i+1} - t_i|$$

de la subdivision σ est assez petit, l'application y_σ du lemme 11.3 est une solution ε -approchée de $x' = f(t, x)$.

Preuve Soit $t \in [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0]$ un point où y_σ est dérivable. L'instant t appartient à l'un des intervalles $]t_i, t_{i+1}[$. Supposons par exemple $i \geq 0$. Par construction,

$$\|y_\sigma'(t) - f(t, y_\sigma(t))\| = \|f(t_i, y_\sigma(t_i)) - f(t, y_\sigma(t))\|$$

avec $|t - t_i| \leq h$ et $\|y_\sigma(t) - y_\sigma(t_i)\| \leq |t - t_i| \|f(t_i, y_\sigma(t_i))\| \leq Mh$. On conclut par uniforme continuité de f sur le compact \mathcal{C} . \square

Proposition 11.5 Limite d'une suite de solutions approchées

Soit $C = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(x_0, R) \subset J \times U$ un cylindre. Soient $I \subset [t_0 - a, t_0 + a]$ un intervalle contenant t_0 , et $y_n : I \rightarrow \overline{B}(x_0, R)$ une suite de solutions ε_n -approchées de (*). On suppose que :

- $\varepsilon_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$;
- y_n converge uniformément sur I vers $y : I \rightarrow \overline{B}(x_0, R)$.

Alors la limite y est de classe C^1 et solution de (*).

Preuve Puisque chaque fonction y_n est continue et de classe C^1 par morceaux, on a pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I$,

$$y_n(t) = y_n(t_0) + \int_{t_0}^t y_n'(s) ds.$$

Puisque y_n est une solution ε_n approchée de (*), il suit que

$$\|y_n(t) - y_n(t_0) - \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds\| \leq a \varepsilon_n.$$

La fonction f est continue, donc uniformément continue sur le cylindre compact C . Ceci permet de passer à la limite sous l'intégrale lorsque $n \rightarrow \infty$. On obtient alors, pour tout $t \in I$,

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds,$$

donc y est bien de classe C^1 et solution de (*). □

B Deuxième preuve de Cauchy-Lipschitz (local)

On suppose dans ce paragraphe uniquement que la donnée f satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz 3.11.

Dans tout ce paragraphe, $C = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(x_0, R) \subset J \times U$ désignera un cylindre. En restriction à ce cylindre, f est donc k -lipschitzienne par rapport à la variable d'espace x pour une certaine constante $k > 0$.

Lemme 11.6 Soient $I \subset [t_0 - a, t_0 + a]$ un intervalle contenant t_0 , et $y_1, y_2 : I \rightarrow \overline{B}(x_0, R)$ deux solutions respectivement ε_1 et ε_2 approchées de (*). Alors, on a pour tout $t \in I$,

$$\|y_1(t) - y_2(t)\| \leq \|y_1(t_0) - y_2(t_0)\| e^{k|t-t_0|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}.$$

Preuve On introduit la fonction $z := y_1 - y_2$. Elle est continue et de classe C^1 par morceaux. En chaque instant où elle est dérivable,

$$\begin{aligned} \|z'(t)\| &= \|y_1'(t) - y_2'(t)\| \leq \|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\| + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ &\leq k \|z(t)\| + \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \end{aligned}$$

On conclut avec le lemme de Gronwall (on laisse au lecteur le soin de vérifier qu'il est encore vrai sous ces hypothèses de régularité). \square

Corollaire 11.7 Unicité locale dans Cauchy-Lipschitz

On suppose que f satisfait les hypothèses de Cauchy-Lipschitz. Soit $I \subset [t_0 - a, t_0 + a]$ un intervalle ouvert contenant t_0 . Soient $x_1, x_2 : I \rightarrow \overline{B}(x_0, R)$ deux solutions exactes de (*) de même condition initiale $x_1(t_0) = x_2(t_0)$. Alors $x_1 \equiv x_2$.

Preuve L'estimation précédente s'applique aux solutions x_1 et x_2 . La conclusion suit de ce qu'ici $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ et $x_1(t_0) = x_2(t_0)$. \square

Corollaire 11.8 Suite de solutions approchées

On suppose que la donnée f satisfait les hypothèses de Cauchy-Lipschitz. Soit $I \subset [t_0 - a, t_0 + a]$ un intervalle contenant t_0 . Soit $y_n : I \rightarrow \overline{B}(x_0, R)$ une suite de solutions ε_n -approchées. On suppose que

- les y_n ont toutes la même condition initiale $y_n(t_0) = x_0$;
- $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

Alors la suite y_n converge uniformément sur I . Sa limite y est de classe C^1 et est une solution de condition initiale $y(t_0) = x_0$.

Preuve Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on estime de nouveau avec le lemme 11.6

$$\|y_p(t) - y_q(t)\| \leq (\varepsilon_p + \varepsilon_q) \frac{e^{ka} - 1}{k}.$$

La suite (y_p) est donc uniformément de Cauchy sur I . Le résultat suit alors de la proposition 11.5. \square

On en déduit une seconde preuve de l'existence locale dans Cauchy-Lipschitz.

Théorème 11.9 Existence locale dans Cauchy-Lipschitz

Preuve Soient $(t_0, x_0) \in J \times U$ et $\mathcal{C} = [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \times \overline{B}(x_0, R) \subset J \times U$ un cylindre de sécurité centré en ce point.

La méthode d'Euler fournit une suite $y_n : [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \rightarrow \overline{B}(x_0, R)$ de solutions ε_n -approchées, avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$, et de même condition initiale $y_n(t_0) = x_0$. Sur le cylindre \mathcal{C} , la fonction f est k -lipschitzienne par rapport à x . La suite y_n converge donc uniformément sur l'intervalle $[t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0]$ (corollaire 11.8) et sa limite $x :]t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0[\rightarrow U$ est solution de $x' = f(t, x)$ de condition initiale $x(t_0) = x_0$ (proposition 11.5). \square

C Le théorème de Cauchy-Péano-Arzéla

Dans ce paragraphe, nous démontrons le théorème d'existence au problème de Cauchy pour une équation différentielle dont la donnée f est seulement supposée continue. On a vu que, dans ce cas, il n'y a plus unicité en général (paragraphe 3.B).

Rappelons sans démonstration le théorème d'Ascoli.

Rappel 11.10 Théorème d'Ascoli

Soient $[t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact, et $y_n : [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \rightarrow \overline{B}(x_0, R)$ une suite d'applications continues et uniformément bornées.

On suppose la suite (y_n) équicontinue ; c'est le cas par exemple lorsque les y_n sont toutes M -lipschitziennes.

Alors, on peut extraire de (y_n) une suite uniformément convergente sur l'intervalle $[t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0]$.

Théorème 11.11 de Cauchy-Péano-Arzéla

Soient $f : J \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et $(t_0, x_0) \in J \times U$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une solution $x :]t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0[\rightarrow U$ de l'équation $x' = f(t, x)$ de condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Preuve Soit $\mathcal{C} = [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \times \overline{B}(x_0, R) \subset J \times U$ un cylindre de sécurité.

La méthode d'Euler fournit une suite $y_n : [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \rightarrow \overline{B}(x_0, R)$ de solutions ε_n -approchées, de condition initiale $y_n(t_0) = x_0$ et avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Ces fonctions y_n sont uniformément bornées sur $[t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0]$.

Par construction, les y_n sont affines par morceaux, et les pentes de ces fonctions affines sont données par les valeurs de f en des points $(t_i, y_n(t_i)) \in \mathcal{C}$, donc sont uniformément bornées par M : nos applications y_n sont donc toutes M -lipschitziennes donc forment donc une famille équicontinue.

Le théorème d'Ascoli permet d'extraire de la suite (y_n) une sous-suite uniformément convergente. On a vu (proposition 11.5) que la limite est solution exacte de $x' = f(t, x)$, pour la condition initiale (t_0, x_0) . \square

12. Equations linéaires non autonomes

Nous avons déjà consacré un chapitre aux équations différentielles linéaires autonomes. Dans ce cas, on disposait de l'expression explicite des solutions. Nous étudions ici les équations différentielles linéaires non autonomes. Les théorèmes généraux restent valables (structure de l'espace des solutions). Mais il y a une différence de taille : on ne saura en général pas les résoudre explicitement, à l'exception notable des équations scalaires d'ordre 1.

A Existence, unicité et temps de vie

On se donne $A : J \subset \mathbb{R} \rightarrow M_n \mathbb{R}$ et $B : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux applications continues définies sur un intervalle ouvert $J \subset \mathbb{R}$, et on s'intéresse à l'équation différentielle linéaire non homogène

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad (*_A^B)$$

ainsi qu'à l'équation différentielle linéaire homogène associée

$$X'(t) = A(t)X(t) \quad (*_A),$$

toutes deux d'inconnue $X : I \subset J \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Proposition 12.1 *Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique aux équations $(*_A^B)$ et $(*_A)$. Leurs solutions maximales sont globales.*

*Les solutions maximales de l'équation homogène $(*_A)$ forment un sous-espace vectoriel \mathcal{S} de dimension n de $C^1(J, \mathbb{R}^n)$. Pour tout $t \in J$, l'application d'évaluation en t , soit*

$$\varepsilon_t : X \in \mathcal{S} \rightarrow X(t) \in \mathbb{R}^n,$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

*Les solutions maximales de l'équation non homogène $(*_A^B)$ forment un sous-espace affine \mathcal{S}^B de $C^1(J, \mathbb{R}^n)$ dirigé par \mathcal{S} .*

Preuve On a déjà vu que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique aux équations différentielles $(*_A)$ et $(*_A^B)$ et que leurs solutions maximales sont globales (corollaire 5.6). Pour le reste, tout se passe comme dans le cas autonome (corollaires 2.8 et 2.12). \square

B Méthode de variation de la constante

B.1 Résolution (ou pas) de l'équation homogène

On ne saura résoudre explicitement l'équation homogène $(*_A)$ que dans des cas très particuliers. Rappelons en effet que la différentielle de l'application exponentielle matricielle ne vérifie l'égalité

$$D_M \exp(H) = H e^M = e^M H$$

“que” lorsque les matrices M et H commutent (proposition 2.4).

Proposition 12.2 *Soit $t \in J \rightarrow A(t) \in M_n \mathbb{R}$ une application continue. Supposons qu'on ait, pour tous $s, t \in J$,*

$$A(s) A(t) = A(t) A(s).$$

*Alors, la solution maximale de $(*_A)$ de condition initiale (t_0, X_0) est définie pour tout $t \in J$ par*

$$X(t) = \exp\left[\int_{t_0}^t A(s) ds\right] X_0.$$

Preuve Pour chaque $t \in J$, la matrice $A(t)$ commute à $\int_{t_0}^t A(s) ds$. Donc

$$D_{\left(\int_{t_0}^t A(s) ds\right) \exp} \cdot A(t) = A(t) \exp\left(\int_{t_0}^t A(s) ds\right),$$

et les applications indiquées sont bien solutions. \square

Remarque 12.3 Ceci s'applique en particulier à toute équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1

$$x'(t) = a(t) x(t) \quad (*_a)$$

de donnée $t \in J \rightarrow a(t) \in \mathbb{R}$ continue, d'inconnue $t \in J \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}$.

B.2 Variation de la constante

On revient à une application continue quelconque $t \in J \rightarrow A(t) \in M_n \mathbb{R}$ (sans hypothèse de commutation). On se donne également une application continue $t \in J \rightarrow B(t) \in \mathbb{R}^n$.

En supposant connue (par miracle!) une base (X_1, \dots, X_n) de l'espace vectoriel \mathcal{S} des solutions de $(*_A)$, on va voir que la méthode de variation de la constante permet, tout comme dans le cas autonome, de résoudre l'équation non homogène $(*_A^B)$.

En chaque instant $t \in J$, l'application d'évaluation $\varepsilon_t : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme d'espace vectoriels, donc $(X_1(t), \dots, X_n(t))$ constitue une base de \mathbb{R}^n . Comme dans le cas homogène, on peut donc chercher les solutions X de $(*_A^B)$ sous la forme $X(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) X_i(t)$, où les $c_i : J \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe C^1 . Matriciellement, cela consiste à introduire la matrice

$$M(t) := \begin{pmatrix} X_1(t) & | & \cdots & | & X_n(t) \\ \hline & & & & \end{pmatrix}$$

qui est inversible pour tout $t \in J$ et à chercher les applications de classe C^1 $t \in J \rightarrow C(t) \in \mathbb{R}^n$ pour lesquelles $t \in J \rightarrow X(t) = M(t)C(t)$ est solution de $(*_A^B)$. On notera que, puisque $t \in J \rightarrow M(t) \in \text{Gl}_n \mathbb{R}$ est de classe C^1 , $X = MC$ est de classe C^1 si et seulement si C l'est.

Chaque colonne X_i étant solution de $(*_A)$, on a pour tout $t \in J$ l'égalité $M'(t) = A(t)M(t)$, d'où

$$\frac{d}{dt} (M(t)C(t)) = A(t)M(t)C(t) + M(t)C'(t).$$

Il suit que

$$\frac{d}{dt} (M(t)C(t)) = A(t)X(t) + B(t)$$

si et seulement si $C'(t) = M(t)^{-1}B(t)$. On a donc ramené, une fois une base (X_1, \dots, X_n) de solutions de l'équation homogène connue, la recherche des solutions de l'équation avec second membre à la recherche d'une primitive pour l'application $t \in J \rightarrow M(t)^{-1}B(t) \in \mathbb{R}^n$.

B.3 Equations linéaires d'ordre supérieur

On a déjà dit au paragraphe 2.E.3 (équations linéaires autonomes) que la méthode de variation de la constante s'applique également aux équations différentielles linéaires d'ordre k . Il en va de même pour les équations linéaires non autonomes. Intéressons nous pour simplifier l'écriture à une équation scalaire, de la forme

$$x^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)x^{(k-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) = b(t) \quad (*_a^b)$$

où les données $a_i : J \rightarrow \mathbb{R}$ ($0 \leq i \leq k-1$) et $b : J \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, et d'inconnue $t \in J \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}$ de classe C^k .

Comme nous l'avons expliqué dans le lemme 1.17, l'introduction de la nouvelle fonction inconnue de classe C^1

$$t \in J \rightarrow X(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ \vdots \\ x^{(k-1)}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$$

ramène l'étude de l'équation différentielle linéaire d'ordre k $(*_a^b)$ à celle de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad (*_A^B)$$

$$\text{où } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & \cdots & -a_{k-1}(t) \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Réinterprétons maintenant la méthode de la variation de la constante pour l'équation d'ordre 1 $(*_A^B)$ en termes de l'équation d'ordre k $(*_a^b)$. On suppose connue (x_1, \dots, x_k) une base de l'espace vectoriel des solutions de $(*_a)$. La famille (X_1, \dots, X_k) constitue donc une base de l'espace vectoriel des solutions de $(*_A)$. On cherche une solution X de $(*_A^B)$ sous la forme $X(t) = \sum_{i=1}^k c_i(t) X_i(t)$ où les fonctions inconnues $t \in J \rightarrow c_i(t) \in \mathbb{R}$ sont de classe C^1 . Cela revient à chercher une solution x de $(*_a^b)$ de sorte que

$$x^{(j)}(t) = \sum_{i=1}^k c_i(t) x_i^{(j)}(t) \text{ pour } 0 \leq j \leq k-1.$$

Les fonctions (c_1, \dots, c_k) conviennent si et seulement si leurs dérivées vérifient pour tout $t \in J$ le système de k équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^k c_i'(t) x_i(t) = 0 \\ \sum_{i=1}^k c_i'(t) x_i'(t) = 0 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^k c_i'(t) x_i^{(k-2)}(t) = 0 \\ \sum_{i=1}^k c_i'(t) x_i^{(k-1)}(t) = b(t). \end{array} \right.$$

autrement dit si et seulement si $M(t)C'(t) = B(t)$ pour tout $t \in J$, avec

$$M(t) = \left(\begin{array}{c|c|c} X_1(t) & \cdots & X_n(t) \end{array} \right) = \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_k(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(k-1)}(t) & \cdots & x_k^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Une fois inversées les matrices $M(t)$, résoudre l'équation avec second membre revient à trouver une primitive de l'application $t \in J \rightarrow (M(t))^{-1}B(t) \in \mathbb{R}^n$.

C Résolvante

On introduit la résolvante d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Cette résolvante encode toutes les solutions de cette équation différentielle. On réexprime alors la méthode de variation de la constante en termes de résolvante. Il n'y a fondamentalement rien de nouveau par rapport au paragraphe précédent, seul l'habillage change (un peu).

C.1 Définitions et propriétés de la résolvante

Revenons à l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$X'(t) = A(t) X(t) \text{ d'inconnue } t \in J \rightarrow X(t) \in \mathbb{R}^n. \quad (*_A)$$

On lui associe l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$M'(t) = A(t) \circ M(t) \text{ d'inconnue } t \in J \rightarrow M(t) \in M_n\mathbb{R}, \quad (\mathcal{E}_A)$$

où $A(t) \circ M(t)$ désigne le produit de ces deux matrices. On observe que l'application à valeurs matricielles

$$t \in J \rightarrow M(t) = \left(\begin{array}{c|c|c} X_1(t) & \cdots & X_n(t) \\ \hline & & \\ \hline & & \end{array} \right) \in M_n\mathbb{R}$$

est solution de l'équation différentielle (\mathcal{E}_A) si et seulement si ses vecteurs colonnes $t \in J \rightarrow X_i(t) \in \mathbb{R}^n$ ($1 \leq i \leq n$) sont tous solutions de l'équation de départ $(*_A)$.

Définition 12.4 Résolvante

Pour $t_0 \in J$, on note $t \in J \rightarrow R_{t_0}^t \in M_n\mathbb{R}$ la solution maximale de (\mathcal{E}_A) de condition initiale (t_0, Id) . La résolvante de $(*_A)$ est la collection de ces applications $(t \in J \rightarrow R_{t_0}^t \in M_n\mathbb{R} \mid t_0 \in J)$.

Remarque 12.5 Les vecteurs colonnes $t \rightarrow X_i(t)$ de $R_{t_0}^t$ sont les solutions maximales de $(*_A)$ de conditions initiales $X_i(t_0) = e_i$, où (e_i) désigne la base canonique de \mathbb{R}^n .

Lorsque $A(t) \equiv A$ est constante (équation autonome), on a $R_{t_0}^t = e^{(t-t_0)A}$.

Une fois connue la résolvante de $(*_A)$, on connaît toutes les solutions de $(*_A)$ et de (\mathcal{E}_A) .

Lemme 12.6 *La solution maximale de $(*_A)$ de condition initiale $(t_0, X_0) \in J \times \mathbb{R}^n$ est $t \in J \rightarrow R_{t_0}^t X_0 \in \mathbb{R}^n$.*

La solution maximale de (\mathcal{E}_A) de condition initiale $(t_0, M_0) \in J \times M_n \mathbb{R}$ est $t \in J \rightarrow R_{t_0}^t \circ M_0 \in M_n \mathbb{R}$.

Preuve Vérification immédiate, laissée au lecteur. □

Rappelons que, pour $t \in J$, $\varepsilon_t : X \in \mathcal{S} \rightarrow X(t) \in \mathbb{R}^n$ désigne l'application d'évaluation d'une solution X de $(*_A)$ à l'instant t .

Lemme 12.7 Définition alternative de la résolvante

Soient $t_0, t \in J$.

(1) La résolvante $R_{t_0}^t \in M_n \mathbb{R}$ est la matrice de l'application linéaire $\varepsilon_t \circ (\varepsilon_{t_0})^{-1}$ dans la base canonique de \mathbb{R}^n . Ceci fournit une définition alternative de la résolvante.

(2) On a, pour tous instants $s, t, u \in J$, les relations

$$R_t^t = \text{Id}, \quad R_t^s = (R_s^t)^{-1} \quad \text{et} \quad R_t^u = R_s^u \circ R_t^s.$$

Preuve Le premier point suit du lemme 12.6. Le second s'en déduit. \square

C.2 La variation de la constante avec la résolvante

Revenons à l'équation différentielle non homogène $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ ($*_A^B$). On suppose connue la résolvante de ($*_A$).

Fixons $t_0 \in J$. Les solutions maximales de ($*_A$) de condition initiale $X_i(t_0) = e_i$ sont les $X_i(t) = R_{t_0}^t e_i$. Cette famille $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ forme une base de l'espace \mathcal{S} des solutions de ($*_A$). On reprend alors ce qui a été fait dans le paragraphe B avec cette fois-ci $M(t) = R_{t_0}^t$: au lieu de travailler avec une base quelconque de \mathcal{S} , on travaille avec une base de solutions qui est normalisée (égale à la base canonique de \mathbb{R}^n) à l'instant t_0 .

La méthode de variation de la constante nous apprend que les solutions de ($*_A^B$) sont les applications

$$t \in J \longrightarrow X(t) = R_{t_0}^t C(t) \in \mathbb{R}^n$$

où la fonction inconnue $t \in J \rightarrow C(t) \in \mathbb{R}^n$ de classe C^1 vérifie

$$C'(t) = (R_{t_0}^t)^{-1} B(t) = R_t^{t_0} B(t)$$

(la dernière égalité provenant du lemme 12.7). On obtient finalement que la solution maximale de ($*_A^B$) de condition initiale (t_0, X_0) est définie pour tout $t \in J$ par

$$X(t) = R_{t_0}^t \left(X_0 + \int_{t_0}^t R_s^{t_0} B(s) ds \right)$$

ou encore, par linéarité de l'intégrale,

$$X(t) = R_{t_0}^t X_0 + \int_{t_0}^t R_s^t B(s) ds$$

puisque $R_{t_0}^t \circ R_s^{t_0} = R_s^t$ (lemme 12.7 de nouveau).

D Le Wronskien

Dans tout ce paragraphe, on se donne une application continue $t \in J \rightarrow A(t) \in M_n \mathbb{R}$ et l'on s'intéresse à l'équation différentielle linéaire homogène

$$X'(t) = A(t) X(t) \text{ d'inconnue } t \in J \rightarrow X(t) \in \mathbb{R}^n \quad (*_A).$$

On désigne par *can* la base canonique de \mathbb{R}^n .

Définition 12.8 Soit (Y_1, \dots, Y_n) une famille de solutions de l'équation différentielle $(*_A)$. Le wronskien de cette famille est la fonction scalaire

$$t \in J \rightarrow w(t) = \det_{can}(Y_1(t), \dots, Y_n(t)) \in \mathbb{R}.$$

Exemple 12.9 Lorsque $A(t) \equiv A$ est constante, on a

$$w(t) = \det e^{(t-t_0)A} w(t_0) = e^{(t-t_0)\text{tr} A} w(t_0).$$

Lemme 12.10 Le wronskien est de classe C^1 et est solution de l'équation différentielle linéaire scalaire

$$w'(t) = \text{Trace}(A(t)) w(t).$$

On a donc

$$w(t) = \exp\left[\int_{t_0}^t \text{Trace}(A(s)) ds\right] w(t_0).$$

En particulier,

$$\det R_{t_0}^t = \exp\left[\int_{t_0}^t \text{Trace}(A(s)) ds\right].$$

Remarque 12.11 En particulier, si le wronskien s'annule en un instant $t \in J$, il est identiquement nul. Ceci est cohérent avec le fait que la famille de solutions (Y_i) est linéairement indépendante si et seulement si les vecteurs $(Y_i(t))$ sont indépendants en un instant $t \in J$, ou encore si et seulement si les vecteurs $(Y_i(t))$ sont indépendants en chaque instant $t \in J$.

Rappel 12.12 L'application déterminant $\det : M_n \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 (polynomiale). Sa différentielle au point $M \in M_n \mathbb{R}$ est

$$D_M \det \cdot H = \text{Trace}(\tilde{M}H) = \text{Trace}(H\tilde{M})$$

où \tilde{M} désigne la matrice transposée des cofacteurs, qui vérifie

$$\tilde{M}M = (\det M) \text{Id}.$$

Preuve du lemme On introduit la matrice $M(t) := (Y_1(t), \dots, Y_n(t)) \in M_n \mathbb{R}$, où les vecteurs $Y_i(t)$ sont exprimés dans la base canonique. On a donc $w(t) = \det M(t)$. Puisque $t \rightarrow M(t)$ est solution de $M'(t) = A(t) \circ M(t)$, il vient

$$\begin{aligned} w'(t) &= D_{M(t)} \det \cdot M'(t) = \text{Trace} \left(M'(t) \widetilde{M}(t) \right) \\ &= \text{Trace} \left(A(t) M(t) \widetilde{M}(t) \right), \end{aligned}$$

soit finalement $w'(t) = \text{Trace} (A(t)) \det M(t) = \text{Trace} (A(t)) w(t)$. \square

Une petite illustration géométrique pour conclure, même si nous n'avons formellement introduit le flot que pour des équations autonomes...

Corollaire 12.13 Théorème de Liouville

Le "flot" de l'équation linéaire

$$X'(t) = A(t) X(t)$$

préserve le volume si et seulement si chaque matrice $A(t)$ est de trace nulle.

Preuve Considérons une partie mesurable $V \subset \mathbb{R}^n$, et laissons évoluer le système entre l'instant t_0 et l'instant t . La partie V a été envoyée sur $R_{t_0}^t(V)$ qui est de mesure

$$m(R_{t_0}^t(V)) = \det R_{t_0}^t m(V).$$

On conclut alors avec le lemme 12.10. \square

Index

- anti-entonnoir, 65
- autonome (équation), 11

- Cauchy (problème de), 8
- centre, 30, 88
- champ rentrant, 80
- champ sortant, 81
- changement de repère, 26, 27
- col, 29, 67, 89
- complet (champ de vecteurs), 71
- condition de Cauchy, 8
- condition initiale, 8
- conjugaison, 26, 27
- contractante (application), 38
- coordonnées polaires, 43, 88, 96
- courbe intégrale, 12, 71
- courbe paramétrée régulière, 72, 81, 94
- croissance sous-linéaire, 51, 52
- cylindre, 32
- cylindre de sécurité, 35, 107

- dépendance des solutions..., 54
- demi-tangente, 90

- élément de contact, 7, 57, 75
- ensemble limite, 74, 95
- entonnoir, 64, 94
- équation avec second membre, 20
- équation d'ordre supérieur, 13, 16, 23
- équation homogène, 20
- équation homogène, 20
- équation linéaire autonome, 16

- exponentielle matricielle, 18, 99

- flot, 85
- flot d'un champ de vecteurs, 70
- fonction de Lyapunov, 100, 102
- fonction de Lyapunov stricte, 100
- foyer, 30

- graphe, 52
- groupe à un paramètre, 71

- intégrale première, 78
- isocline, 7, 58, 76

- Jordan-Dunford (décomposition de), 20, 99

- lemme de Gronwall, 49–51, 55, 110
- lemme de sortie des compacts, 46
- lemme des bouts, 46, 55, 95, 101
- linéarisation, 87
- localement lipschitzienne (application), 33
- Lotka-Volterra, 77, 79

- matrice compagnon, 17
- méthode d'Euler, 107, 111

- noeud, 29
- noeud dégénéré, 30

- orbite, 12, 71
- orbite périodique, 73, 79, 84

- point d'équilibre
 - asymptotiquement stable, 98
- point d'équilibre stable, 98
- point régulier, 85
- point régulier, 72
- point singulier, 48, 72, 76, 85
- point singulier hyperbolique, 88
- point stationnaire, 48, 72, 85
- portrait de phase, 12, 71, 85, 88
- propre (application), 105
- puits, 89, 98, 102

- redressement d'un champ de vecteurs, 86
- régionnement, 57, 76
- relèvement de l'argument, 41
- renverser le sens du temps, 26, 49, 63, 65, 67
- résolvante, 116
- rotation, 43

- séparatrice attractive, 90, 92
- séparatrice répulsive, 90, 92
- soleil, 29
- solution approchée, 107
- solution globale, 10
- solution maximale, 9

- source, 89, 98
- sous-solution (large ou stricte), 59
- sur-solution (large ou stricte), 59
- symétries d'une équation
 - différentielle, 41, 43, 76, 77

- théorème d'Ascoli, 111
- théorème de Cauchy-Lipschitz, 33, 42, 110, 112
- théorème de
 - Cauchy-Péano-Arzéla, 8, 111
- théorème de Hartman, 88
- théorème de Liouville, 120
- théorème de Lyapunov, 101
- théorème de Picard, 38
- trajectoire, 12, 71
- tube, 52

- unicité au problème de Cauchy, 9

- variation de la constante, 22, 23, 49, 50, 113

- wronskien, 119

- zone piège, 80