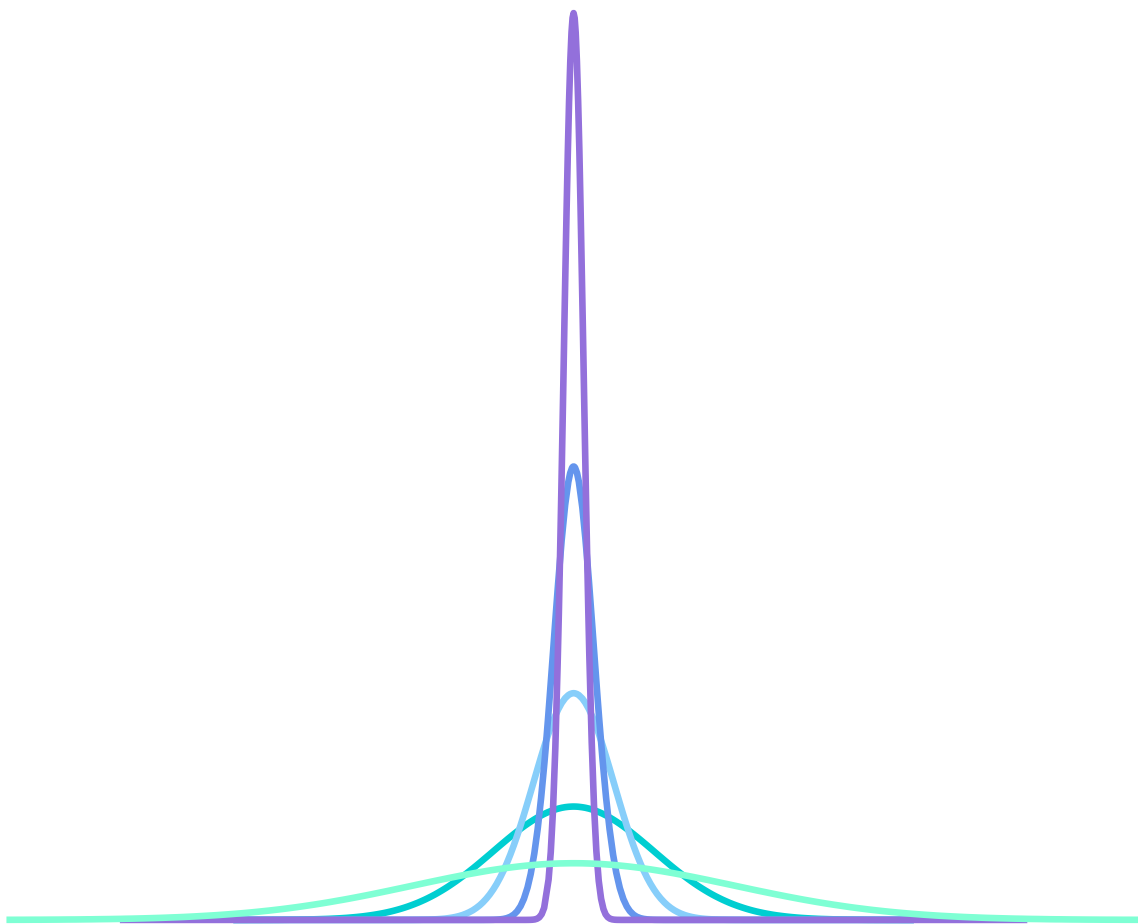


Intégration



MDD 302
Licence Double Diplôme (LDD3)
Université Paris-Saclay

D. Hulin 2022-23

Table des matières

Introduction	4
1 Rappels	7
A Le corps des réels	8
A.1 Rappels de topologie	8
A.2 Propriétés de $\mathbb{R}$	8
A.3 Majorant, borne supérieure	9
A.4 Compacité	11
A.5 Complétude	11
A.6 Des démonstrations !	12
B Fonctions : convergence, continuité	13
B.1 Convergence simple et uniforme	13
B.2 Continuité	16
C Dénombrabilité	18
2 Intégrale de Lebesgue : fonctions positives	20
A A propos de la mesurabilité	21
B Arithmétique dans $[0, +\infty]$	22
C Intégration des fonctions positives	22
D Conséquences du théorème de Beppo Levi	25
3 Intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$	30
A Fonctions intégrables à valeurs réelles	31
B Fonctions intégrables à valeurs complexes	34
C Intégrer une fonction continue sur un segment	36
D Intégrer sur un intervalle ouvert	38
E Lebesgue versus Riemann	41
F Propriétés d'invariance	42
G Points de repère et tours de main	43
H Petit rappel sur les séries réelles et complexes	48
4 Les théorèmes de Lebesgue	51
A Le théorème de convergence dominée	52
B Parties négligeables	55
C Intégrales dépendant d'un paramètre	60

5	Intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$	65
A	Intégration dans $\mathbb{R}^n$	66
A.1	Fonctions positives	66
A.2	Fonctions à valeurs réelles ou complexes	66
A.3	Parties négligeables dans $\mathbb{R}^n$	68
B	Les théorèmes de Fubini	69
C	Le théorème du changement de variable	72
C.1	Rappels de calcul différentiel	73
C.2	Déterminant et volume	74
C.3	Changement de variable dans l'intégrale	75
6	Transformée de Fourier	78
A	Définition et premières propriétés	78
B	Transformée de Fourier d'une gaussienne	82
C	L'espace de Schwartz	83
D	La transformée de Fourier sur l'espace $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$	87
7	Application à une équation aux dérivées partielles	88
A	Convolution	88
B	Approximation de l'unité	90
C	L'équation de la chaleur	92
C.1	Heuristique	92
C.2	Solution explicite pour l'équation de la chaleur	94
8	Les espaces L^p	95
A	L'espace L^1	95
B	Les espaces L^p , pour $1 \leq p \leq \infty$	99
9	Construction de l'intégrale de Lebesgue	101
A	Intégration via une mesure	101
B	Mesures et tribus	102
C	Fonctions mesurables, intégrale des fonctions étagées	108
D	Intégrale des fonctions positives	111
E	Séries et intégrales	116
10	Appendice : Espaces de Hilbert	118
A	L'espace $\mathbb{R}^n$ euclidien	118
B	Espaces hermitiens, espaces de Hilbert	119
C	L'espace de Hilbert L^2	123
D	Théorème de la projection dans un Hilbert	125
11	Appendice : Séries de Fourier	130
A	Les espaces fonctionnels $C_{2\pi}^0$, $L_{2\pi}^1$ et $L_{2\pi}^2$	131
B	Densité des polynômes trigonométriques	133
C	La théorie L^2 des séries de Fourier	138
D	La théorie ponctuelle des séries de Fourier	147

10	Appendice : Intégrale de Riemann	152
A	Continuité uniforme	152
B	Fonctions en escalier	153
C	Intégrale de Riemann des fonctions en escalier	155
D	Intégrale de Riemann des fonctions réglées	157
E	Les insuffisances de l'intégrale de Riemann	164
F	Intégrales de Riemann impropres (fonctions positives)	165
G	Intégrales de Riemann semi-convergentes	166
H	Sommes de Riemann	167
I	Fonctions Riemann-intégrables	170

Bibliographie succincte

Les textes suivants vont largement au-delà de ce polycopié. Ce sont néanmoins d'excellentes références pour la théorie de l'intégration, la transformation (et les séries) de Fourier (ainsi que les probabilités).

Faraut Calcul intégral

Briane, Pages Théorie de l'intégration

Le Gall Intégration, probabilités et processus aléatoires, partie I

Polycopié disponible à l'adresse

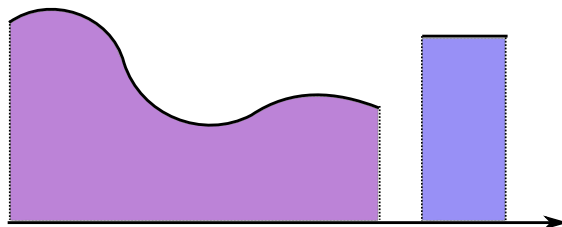
<https://www.math.u-psud.fr/~jflgall/IPPA2.pdf>

Peyrière Convolution, séries et intégrales de Fourier

Rudin Analyse réelle et complexe

Introduction

La notion d'intégrale est intimement liée aux notions d'aire et de longueur. Pour une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ positive définie sur un intervalle borné, l'intégrale de f sur ce segment doit représenter l'aire (ou la surface) de la portion du plan comprise entre l'axe des abscisses et le graphe de f (zone grisée sur le dessin).



Notamment, si la fonction f est constante et égale à $c \geq 0$ sur l'intervalle $[a, b]$ et nulle en dehors de cet intervalle, son intégrale doit être égale à l'aire d'un rectangle de côtés $b - a$ et c , soit $\int f = c(b - a)$.

Dans ce cours nous allons présenter la "théorie de l'intégration de Lebesgue".

Qu'est-ce qu'une théorie de l'intégration ? C'est un procédé qui, à toute fonction "raisonnable", en particulier assez "régulière" en un sens à préciser, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ensemble X associera son intégrale $I(f) = \int_X f$. Dans ce cours, nous travaillerons dans un premier temps sur $X = \mathbb{R}$ puis nous généraliserons par la suite à $X = \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), pour la mesure de Lebesgue.

Revenons à la notion d'intégrale que nous cherchons à définir. On lui demandera de satisfaire les propriétés de bon goût suivantes :

1. I est linéaire : pour toutes fonctions $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ "raisonnables" et tous réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_X (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_X f + \beta \int_X g$$

2. I est positive, et donc croissante : pour $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ "raisonnables" :

$$\text{si } f \geq 0 \text{ on a } \int_X f \geq 0 \dots$$

$$\text{et donc si } f \geq g, \text{ on a } \int_X f \geq \int_X g.$$

On souhaiterait de plus que l'affirmation suivante :

3. si la suite (f_n) converge vers f , alors la suite des intégrales $I(f_n)$ converge vers $I(f)$

soit vraie sous des hypothèses (portant sur la suite (f_n) et sur la notion de convergence $f_n \rightarrow f$) les plus générales possible.

Vous avez déjà défini l'intégrale de Riemann. L'intégrale de Riemann permet notamment d'intégrer une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un segment, et elle satisfait les propriétés 1. et 2. ci-dessus. Malheureusement, l'intégrale de Riemann n'est pas satisfaisante en ce qui concerne la condition 3. Par exemple, la fonction $h := \mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ n'est pas intégrable au sens de Riemann. Cette fonction n'a pourtant rien d'effrayant : elle est bornée, et peut s'obtenir comme limite croissante d'une suite de fonctions f_n en escaliers (valant chacune 0 partout sauf en un nombre fini de rationnels, et donc d'intégrales nulles). On aimerait donc bien que h soit intégrable, et d'intégrale nulle !

Cette constatation nous amène à introduire l'intégrale de Lebesgue, qui est une extension de l'intégrale de Riemann au sens où une fonction Riemann intégrable est également intégrable au sens de Lebesgue, et les intégrales de Riemann et de Lebesgue de cette fonction coïncident (voir le corollaire 3.15).

Ce qu'on y gagne, c'est que l'intégrale de Lebesgue se comporte particulièrement bien en ce qui concerne les propriétés de convergence : les théorèmes de convergence monotone 2.4 et de convergence dominée 4.25 sont, dans la pratique, très faciles à utiliser. Bien sûr il reste des hypothèses à vérifier mais, sans elles, la convergence des intégrales peut être en défaut ! Le prix à payer est que la construction de l'intégrale de Lebesgue est plus délicate ; elle sera donc reportée à la fin du cours.

La construction que nous proposons de l'intégrale de Lebesgue, et qui est la plus classique, repose sur la théorie de la mesure. Une fois bien comprises la construction et les propriétés de l'intégrale de Lebesgue, il est aisé de les généraliser à des espaces mesurés (X, m) plus généraux que les espaces $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$ munis de leur mesure de Lebesgue, auxquels nous nous restreindrons dans ce cours. Ce cadre plus général sera notamment incontournable en théorie des Probabilités.

Nous concluons ce cours en introduisant la transformée de Fourier, qui constitue un précieux outil pour l'étude d'équations aux dérivées partielles.

Plus prosaïquement, la transformée de Fourier nous fournira l'occasion mettre en situation les théorèmes majeurs de la théorie de Lebesgue. Nous l'illustrerons par l'étude élémentaire de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$.

Enfin, vous trouverez en Appendice une introduction aux espaces de Hilbert et aux séries de Fourier.

Comment travailler ce cours ?

En tête de chaque chapitre, on a indiqué :

- les définitions que vous devez connaître,
- les résultats que vous devez savoir énoncer, et appliquer correctement sur des exemples simples,
- les démonstrations que vous devez pouvoir restituer.

Lorsqu'une démonstration doit être connue, cela sera indiqué explicitement.

Ces résultats pourront être utilisés, sans être redémontrés, lors des examens. Il faudra alors les énoncer clairement, puis vérifier soigneusement que les hypothèses sont bien satisfaites dans votre situation.

Les démonstrations qui auront été faites en cours mais que l'on ne vous demande pas de savoir restituer doivent néanmoins être travaillées et bien comprises.

Comme tout texte mathématique, ce polycopié ne doit pas être lu de façon passive, mais crayon à la main. Il faut d'abord comprendre l'organisation générale des idées (en première lecture), puis passer aux détails.

En particulier, certains éléments de preuve très élémentaires ont délibérément été laissés au lecteur (c'est signalé dans le texte). Vous devez vous astreindre à les rédiger. Cela vous permet de vérifier que vous comprenez bien ce dont il s'agit, et que vous êtes capables d'écrire la preuve dans ses moindres détails.

L'objectif est de savoir traiter des exemples, en justifiant soigneusement la méthode suivie. Il est donc essentiel de réfléchir par soi-même aux exercices proposés dans les feuilles de TD, si possible avant la séance de travaux dirigés.

La meilleure façon de comprendre un théorème (ou de réaliser qu'on ne le maîtrise pas encore...), c'est de chercher à l'appliquer sur un exemple concret !

Certains paragraphes apparaissent sur fond gris.
Ce sont des remarques ou compléments qui ne sont pas au programme.

1. Rappels

On commence par des rappels concernant le corps des réels, la notion de densité, la dénombrabilité, la continuité d'une fonction, ainsi que la convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions. Toutes ces notions doivent être parfaitement maîtrisées, car elles seront utilisées de façon cruciale dans ce cours.

Vous êtes invités à reprendre votre cours et à refaire les exercices de l'année dernière si le besoin s'en fait sentir.

- La définition 1.9 de la borne supérieure.
- La notion de compacité 1.18.
- Les propositions 1.5 et 1.7 : propriétés de $\mathbb{R}$.
- Les notions de convergence simple et uniforme (1.26 et 1.34).
- La proposition 1.30 et sa preuve.
- La notion de continuité 1.42, le critère séquentiel de continuité 1.43 et la proposition 1.44 avec sa démonstration.
- Les corollaires 1.48 et 1.49, et leurs démonstrations.
- La notion de densité et la proposition 1.5.
- La notion de dénombrabilité, et les exemples.

Les notions de suite de Cauchy et de complétude seront introduites plus tard dans le cours (chapitre 8). Vous pouvez donc omettre la lecture du paragraphe A.5 (et a fortiori de A.6) pour l'instant, et vous y référer ultérieurement. Il n'en reste pas moins que la complétude de $\mathbb{R}$ est l'une de ses propriétés fondamentales !

A Le corps des réels

A.1 Rappels de topologie

Commençons par rappeler quelques notions de topologie dans un espace métrique.

Définition 1.1 Suite convergente. Soient (X, d) un espace métrique, et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X . On dit que cette suite est convergente s'il existe un point $\ell \in X$ tel que $d(x_n, \ell) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ (la distance du point x_n à ℓ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$).

Dans ce cas, le point $\ell \in X$ est unique : c'est la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Remarque 1.2 La convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers ℓ s'exprime comme suit :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N = N(\varepsilon)$ tel que $d(x_n, \ell) < \varepsilon$ dès que $n \geq N$.

L'unicité de la limite est une conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire $d(\ell, \ell') \leq d(\ell, x_n) + d(x_n, \ell')$.

Définition 1.3 Partie dense. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $A \subset X$ une partie de X . On dit que A est dense dans X si, pour tout $x \in X$, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers x , i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$.

La partie A est donc dense dans X si tout élément de X est limite d'une suite d'éléments de A . Si vous n'êtes pas trop familier avec les espaces métriques abstraits, vous pouvez vous contenter de penser dans la définition précédente que $X = \mathbb{R}$, ou bien une partie $X \subset \mathbb{R}$, ou encore que $X = \mathbb{R}^n$.

A.2 Propriétés de $\mathbb{R}$

Le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, bien sympathique, présente néanmoins quelques lacunes. Par exemple, l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$... mais elle y admet cependant des solutions approchées. On s'empresse donc de plonger $\mathbb{Q}$ dans un corps plus gros, le corps $\mathbb{R}$ des réels.

Nous n'évoquerons pas ici de construction de $\mathbb{R}$. Rappelons qu'il s'agit d'un corps muni d'une relation d'ordre total, et de la topologie associée. La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ résultera immédiatement de la construction. Voir également le paragraphe grisé ci-dessous.

Lemme 1.4 Densité dans $\mathbb{R}$. Soit $A \subset \mathbb{R}$. La partie A est dense dans $\mathbb{R}$ (i.e. tout réel est limite d'une suite d'éléments de A)

1. si et seulement si A rencontre tout intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point
2. si et seulement si A rencontre tout intervalle ouvert non vide.

Preuve Observons que tout intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point contient un intervalle ouvert non vide. Les conditions 1 et 2 sont donc équivalentes.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie dense. Soit I un intervalle ouvert non vide. On choisit $x \in I$, puis un réel $\varepsilon > 0$ de sorte que $J =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset I$. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A convergeant vers x . Pour n assez grand (mettons $n \geq N$) on aura $|x - a_n| < \varepsilon$, et donc $a_n \in J \cap A \subset I \cap A$.

Supposons réciproquement que A rencontre tout intervalle ouvert non vide. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$, on peut donc choisir un point $a_n \in]x - 1/n, x + 1/n[\cap A$. Par construction, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x . $\square$

Proposition 1.5 *L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est dense dans $\mathbb{R}$.*

Exercice 1.6 Montrer qu'une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) est dense dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si elle rencontre toute boule ouverte.

Déduire de la proposition 1.5 que $\mathbb{Q}^n$ (ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont rationnelles) est dense dans $\mathbb{R}^n$.

Les propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$ que vous devrez retenir sont les suivantes.

Proposition 1.7 *Le corps $\mathbb{R}$ des réels satisfait les propriétés suivantes.*

1. **Borne supérieure.** *Toute partie non vide majorée $A \subset \mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*
2. **Bolzano-Weierstrass.** *De toute suite bornée de réels, on peut extraire une sous-suite convergente.*
3. **Complétude.** *Toute suite de Cauchy de nombres réels est convergente.*

Ces propriétés découlent de la construction de $\mathbb{R}$ à partir des rationnels.

Lorsque, partant de $\mathbb{Q}$, on construit $\mathbb{R}$ par les coupures de Dedekind, il suit «par construction» que $\mathbb{R}$ satisfait la propriété de la borne supérieure. Les autres propriétés s'en déduisent.

Lorsque $\mathbb{R}$ est construit à partir des suites de Cauchy de rationnels, on obtient «par construction» le fait que $\mathbb{R}$ est complet. Les autres propriétés suivent.

Pour quelques démonstrations vous pouvez, si vous le souhaitez, vous reporter au paragraphe A.6.

Notre propos n'étant pas de construire le corps des réels, nous nous contenterons ci-dessous de revenir sur les notions intervenant dans l'énoncé de la proposition 1.7.

A.3 Majorant, borne supérieure

Définition 1.8 Majorant. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie. On dit que la partie $A \subset \mathbb{R}$ est majorée s'il existe un réel $M \in \mathbb{R}$ tel que $a \leq M$ pour tout $a \in A$. Un tel réel M est un majorant de A .*

Proposition 1.9 Borne supérieure. *Soit une partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide et majorée. Alors cette partie admet un plus petit majorant qu'on appelle la borne supérieure de A et qu'on note $\sup A$.*

Si M est un majorant de A , tout réel $M_1 \geq M$ majore également A . Par contre, la borne supérieure est unique.

Lorsque A possède un plus grand élément $\alpha \in A$, on a $\sup A = \alpha$.

Lorsque la partie A n'est pas majorée, on note $\sup A = +\infty$.

On conviendra que $\sup \emptyset = -\infty$. Cette convention assure, pour toutes parties (vides, ou non) de $\mathbb{R}$, l'égalité $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

Exercice 1.10 Montrer que $\sup A = +\infty$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un élément $a_n \in A$ tel que $a_n \geq n$.

Proposition 1.11 Soient $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée, et $M \in \mathbb{R}$. Montrer que $M = \sup A$ si et seulement si :

1. on a l'inégalité $a \leq M$ pour tout $a \in A$ (autrement dit, M est un majorant de A) ;
2. et l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :
 - (a) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ avec $a > M - \varepsilon$
 - (b) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ avec $a \geq M - \varepsilon$
 - (c) il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $a_n \rightarrow M$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

On remarquera que, lorsque la condition 1. est satisfaite, les conditions (a), (b) et (c) sont équivalentes.

Preuve Laissée au lecteur (elle sera donnée en cours). □

Exercice 1.12 Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de $\mathbb{R}$. Montrer l'égalité

$$\sup(\cup_{i \in I} A_i) = \sup\{\sup A_i \mid i \in I\}.$$

De façon symétrique, on introduit bien sûr la notion de minorant et de borne inférieure.

Définition 1.13 Minorant. Soit $A \subset \mathbb{R}$. La partie A est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $a \geq m$ pour tout $a \in A$.

Proposition 1.14 Borne inférieure. Une partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure $m \in \mathbb{R}$, qui est le plus grand de ses minorants.

Lorsque la partie $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas minorée, on note $\inf A = -\infty$. Lorsque la partie est vide, on convient que $\inf \emptyset = +\infty$.

Exercice 1.15 Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie minorée.

1. On note $-A = \{-a \mid a \in A\}$. Montrer que $-A$ est majorée, et qu'on a l'égalité $-\inf A = \sup(-A)$.
2. En s'inspirant de la proposition 1.11, donner alors une caractérisation de $\inf A$.

Exemple 1.16 Soit $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$. On a $\sup A = \sqrt{2}$ et $\inf A = -\sqrt{2}$. Noter que ni $\sup A$, ni $\inf A$, n'appartiennent ici à A .

Exercice 1.17 Soit $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$. On a $\sup B = \sqrt{2}$ et $\inf B = -\sqrt{2}$.

A.4 Compacité

Rappelons qu'un segment est un intervalle fermé borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (où $a \leq b$).

Définition 1.18 Compacité. Une partie $X \subset \mathbb{R}$ (ou un espace métrique (X, d)) est compacte si elle vérifie la propriété suivante : de toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X , on peut extraire une sous-suite qui converge vers un point $\alpha \in X$.

Proposition 1.19 Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est compact.

Cela signifie que, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels tels que $a \leq x_n \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel $a \leq \alpha \leq b$ et une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $x_{\varphi(n)} \rightarrow \alpha$ lorsque $n \rightarrow \infty$. De toute suite bornée de réels, on peut donc extraire une sous-suite convergente.

Exercice 1.20 Les intervalles $]0, 1]$ et $[0, \infty[$ sont-ils compacts ?

A.5 Complétude

Ce paragraphe peut être omis en première lecture. Il ne sera en effet pas utilisé avant le chapitre 8.

Définition 1.21 Suites convergentes, suites de Cauchy.

Soient (X, d) un espace métrique $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X .

Rappelons que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, de limite $\ell \in X$, lorsque $d(x_n, \ell) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N = N(\varepsilon) \geq 0$ tel que $d(x_n, x_p) \leq \varepsilon$ dès que $n, p \geq N$.

Lemme 1.22 Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans un espace métrique (X, d) .

Si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors elle est de Cauchy.

Preuve Supposons que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, \ell) < \varepsilon/2$ lorsque $n \geq N$. L'inégalité triangulaire assure alors que $d(x_n, x_p) \leq \varepsilon$ dès que $n, p \geq N$. Notre suite est donc de Cauchy. $\square$

Toute suite convergente est donc de Cauchy. A l'inverse, lorsque toute suite de Cauchy est convergente, on parle d'espace métrique complet.

Définition 1.23 Espace complet. On dit que l'espace métrique (X, d) est complet lorsque toute suite de Cauchy de (X, d) est convergente.

Proposition 1.24 L'espace métrique $\mathbb{R}$ est complet. Ceci signifie que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de réels, alors cette suite est convergente.

La proposition précédente affirme que $\mathbb{R}$ est complet pour la distance définie, pour $x, y \in \mathbb{R}$, par $d(x, y) = |x - y|$. Dans $\mathbb{R}$, une suite est donc de Cauchy si et seulement si elle est convergente.

Exemple 1.25 1. Soit $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}$ muni de la distance définie par $d(1/n, 1/p) = |1/n - 1/p|$ ($n, p \geq 1$). Alors (A, d) n'est pas complet : la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ de terme général $x_n = 1/n$ est de Cauchy, mais elle ne converge pas (dans l'espace A).

2. L'espace métrique $\mathbb{Q}$ (ensemble des rationnels) n'est pas complet.

Ecrivons en effet le développement décimal de $\sqrt{2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}$, avec $a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et soit $x_n = \sum_{k=0}^n a_k 10^{-k}$ (pour $n \in \mathbb{N}$). La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy (on le vérifie facilement ou bien on invoque le fait que, vue comme une suite de nombres réels, elle converge vers $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$). Par contre, puisque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, cette suite n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}$.

Quel est l'intérêt de cette notion de suite de Cauchy ? Supposons qu'on veuille montrer qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels converge. Si l'on revient à la définition, il faut déjà disposer de la limite ℓ , et montrer que $x_n - \ell \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Si l'on ne connaît pas cette limite ℓ – ce qui est le cas en général – on est bien embarrassés ! Par contre, il est plus facile de montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, puisque cela revient à estimer les différences $|x_n - x_p|$ lorsque n et p sont grands. Et, puisque $\mathbb{R}$ est complet, une fois qu'on a montré que la suite est de Cauchy, on sait qu'elle est convergente.

A.6 Des démonstrations !

Démontrons les assertions évoquées dans la remarque grisée de la page 9. Tous les arguments sont donnés, mais vous devrez prendre le crayon pour rédiger les détails : excellent exercice... N'hésitez pas à faire des dessins !

• Supposons avoir montré que $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure. Montrons que $\mathbb{R}$ est complet.

La propriété de la borne supérieure assure qu'une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et majorée converge vers $\alpha = \sup\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. On veut montrer que cette suite converge. Pour cela, on va se ramener à une suite croissante. On commence par remarquer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. En effet (avec $\varepsilon = 1$), il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_N - x_n| \leq 1$ lorsque $n \geq N$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = \inf\{x_p \mid p \geq n\}$ (propriété de la borne inf...). La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui est croissante et majorée, converge vers $\alpha = \sup\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Reste à montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers α . Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - x_p| \leq \varepsilon$ lorsque $n, p \geq N_1$ (suite de Cauchy). Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|y_n - \alpha| \leq \varepsilon$ lorsque $n \geq N_2$ (convergence de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$). Soit enfin $N = \sup(N_1, N_2)$. Pour $n, p \geq N$, on aura $x_p \geq x_n - \varepsilon$ et donc $x_n - \varepsilon \leq y_n \leq x_n$, d'où $|x_n - \alpha| \leq |x_n - y_n| + |y_n - \alpha| \leq 2\varepsilon$.

• Supposons avoir montré que $\mathbb{R}$ est complet. Montrons qu'un segment est compact.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui prend ses valeurs dans le segment $I_0 = [a, b]$. On souhaite construire une suite $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$, extraite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et qui soit convergente. Puisque l'on sait que $\mathbb{R}$ est complet, il suffit que la suite $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$ soit de Cauchy, elle convergera alors.

On procède par "dichotomie" (du grec "division en deux parties") et l'on construit récursivement une suite d'intervalles emboîtés $I_p \subset I_{p-1} \subset \dots \subset I_0$, où $I_0 = [a, b]$ est de longueur $\ell = b - a$, et I_p de longueur $\ell/2^p$, de sorte que chaque I_p contienne une infinité de termes de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On peut alors construire récursivement une suite $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$, avec $y_0 = x_0$, et telle que $y_p \in I_p$ et $y_p = x_{n(p)}$ où $n(p) > n(p-1)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. La condition $y_p \in I_p$ assure que la suite $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, puisque les intervalles I_p sont emboîtés de longueur tendant vers 0. La condition $n(p) > n(p-1)$ assure que la suite $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est extraite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

• Supposons avoir montré qu'un segment est compact. Montrons que $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de la borne supérieure.

Soit $A \subset]-\infty, M]$ une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. On va construire une suite décroissante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de majorants de A , qui convergera vers $\sup A$.

On choisit $a \in A$. On pose $x_0 = M$, $y_0 = a$ et on note $\delta = x_0 - y_0$. On peut supposer $\delta > 0$, sinon $a = \max A = \sup A$... et c'est fini !

— Si $(x_0 + y_0)/2$ majore A , on pose $y_1 = a$ et $x_1 = (x_0 + y_0)/2$.

— Sinon, on pose $y_1 = (x_0 + y_0)/2$ et $x_1 = M$.

En itérant ce procédé, on construit récursivement deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de sorte que x_n majore A , y_n ne majore pas A , et avec $0 < x_n - y_n = \delta/2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Puisque les segments sont compacts, cette suite admet une sous-suite convergente, de limite $\alpha \in \mathbb{R}$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant décroissante, elle converge elle-même vers α . Chaque x_n majorant A , α est un majorant de A . C'est le plus petit puisqu'il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un élément $a_n \in A$ tel que $a_n \geq y_n = x_n - \delta/2^n \geq \alpha - \delta/2^n$.

B Fonctions : convergence, continuité

B.1 Convergence simple et uniforme

Définition 1.26 Convergence simple.

Soient X un ensemble, et $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) des fonctions. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ lorsque

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(x, \varepsilon) \text{ tel que } \forall n \geq N \text{ on a } |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Autrement dit, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f si, pour chaque point $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ des valeurs prises par les fonctions en ce point converge vers $f(x)$.

Nous serons fréquemment amenés par la suite à manipuler des fonctions indicatrices (d'intervalles, pour l'intégrale de Riemann, ou de parties plus baroques – parties mesurables – dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue). Il est donc indispensable d'être à l'aise avec cette notion.

Notation 1.27 Nous désignerons par $\mathbb{1}_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction indicatrice de la partie $A \subset X$, définie par $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ sinon.

Exercice 1.28 Soient X un ensemble, et $A, B \subset X$ deux parties. Montrer qu'on a l'inclusion $A \subset B$ si et seulement si on a l'inégalité $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$.

Exercice 1.29 Montrer que les suites de fonctions définies par $f_n = \mathbb{1}_{[1/n, 1]}$ et $g_n = \mathbb{1}_{]1/n, 1]}$ convergent simplement, et déterminer leurs limites.

Les deux exemples de l'exercice précédent relèvent du même résultat général, que nous énonçons ci-dessous.

Proposition 1.30 Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de parties de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire telles que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Alors la suite de fonctions indicatrices $(\mathbb{1}_{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Preuve Si $x \notin A$, on a a fortiori $x \notin A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite des valeurs $(\mathbb{1}_{A_n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc stationnaire, égale à 0.

Si $x \in A$, il existe un entier n_0 tel que $x \in A_{n_0}$. La suite de parties étant croissante, on a donc $x \in A_n$ pour tout $n \geq n_0$ et la suite des valeurs $(\mathbb{1}_{A_n}(x))_{n \geq n_0}$ est donc stationnaire, égale à 1. Le résultat est prouvé. $\square$

Exercice 1.31 Dédurre de la proposition 1.30 la propriété suivante (ou bien la démontrer directement). Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire telles que $B_{n+1} \subset B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $B = \cap_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

Alors la suite de fonctions indicatrices $(\mathbb{1}_{B_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction indicatrice $\mathbb{1}_B$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Il faut aussi savoir gérer des suites de fonctions indicatrices, pour des suites de parties qui ne sont ni croissantes ni décroissantes.

Exercice 1.32 Montrer que les suites de fonctions définies par $f_n = \mathbb{1}_{[-1/n, 1+1/n]}$, $g_n = \mathbb{1}_{[-1/n, 1-1/n]}$ et $h_n = \mathbb{1}_{[1/n, 1+1/n]}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) convergent simplement, et déterminer leur limites. On commencera par esquisser les graphes de ces fonctions.

Exercice 1.33 Soient $a < b$ deux réels. On se donne deux suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $a < a_n \leq b_n < b$ et on suppose que $a_n \rightarrow a$ et $b_n \rightarrow b$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Montrer que les suites de fonctions définies par $u_n = \mathbb{1}_{[a_n, b_n]}$ et $v_n = \mathbb{1}_{]a_n, b_n]}$ convergent simplement lorsque $n \rightarrow \infty$, et déterminer leurs limites.

Définition 1.34 Convergence uniforme.

Soient X un ensemble, et $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) des fonctions. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \text{ tel que } \forall x \in X, \forall n \geq N \text{ on a } |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Remarque 1.35 Disons-le avec des mots !

Convergence simple : En chaque point $x \in X$, la valeur $f_n(x)$ en ce point est arbitrairement proche de $f(x)$ pourvu que n soit assez grand (cet «assez grand» dépendant à la fois de x et de la marge d'erreur ε).

Convergence uniforme : En tous les points $x \in X$, la valeur $f_n(x)$ est arbitrairement proche de $f(x)$ pourvu que n soit assez grand (cet «assez grand» dépendant uniquement de la marge d'erreur ε , et non plus de x comme dans la convergence simple).

Exercice 1.36 Démontrer que, lorsqu'une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , elle converge a fortiori simplement vers f .

Exercice 1.37 Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = x/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$). Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle $f \equiv 0$. Montrer que la convergence est uniforme sur $[0, 1]$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.38 Soient les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies pour $n \geq 1$ par

$$f_n = \mathbb{1}_{[n, \infty[}, g_n = \mathbb{1}_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}, h_n = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}, k_n = (-1)^n \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}, \ell_n = \frac{(-1)^n}{n} \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}.$$

Les suites de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent-elles simplement sur $\mathbb{R}$? uniformément sur $\mathbb{R}$? uniformément sur $[0, 1]$? Déterminer, le cas échéant, leur limite.

Remarque 1.39 On définirait de même la convergence simple ou uniforme d'une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}^n$, ou bien dans n'importe quel espace métrique Y .

Notation 1.40 Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On pose

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in X\} \in [0, +\infty].$$

La fonction f est donc bornée si et seulement si $\|f\|_\infty \in [0, +\infty[$.

Cette notation permet de ré-exprimer la convergence uniforme de façon concise, comme suit.

Propriété 1.41 Soient X un ensemble, et $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) une suite de fonctions. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ lorsque les différences $(f_n - f)$ sont bornées dès que n est assez grand, et si $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Preuve Laissée en exercice. □

B.2 Continuité

Nous allons voir que la convergence uniforme conserve la continuité. On introduit ici un espace métrique abstrait X . Vous pouvez penser que $X = \mathbb{R}$, ou que X est un intervalle de $\mathbb{R}$, ou bien que $X = \mathbb{R}^n$.

Définition 1.42 Continuité.

Une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un espace métrique X est continue si

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \eta(x, \varepsilon) > 0 \text{ tel que} \\ \text{si } y \in X \text{ vérifie } d(x, y) < \eta \text{ alors } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Rappelons le critère bien utile suivant, qui nous servira par exemple dans la démonstration de la continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

Proposition 1.43 Critère séquentiel de continuité.

Une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un espace métrique X est continue au point $x \in X$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X convergeant vers x , on a $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$.

Preuve $\Rightarrow$ Supposons que f soit continue au point $x \in X$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X convergeant vers x . Soit $\varepsilon > 0$. La continuité de f en x assure qu'il existe $\eta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dès que $|x - y| < \eta$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers x , il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - x| < \eta$ dès que $n \geq N$. On a donc $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$ dès que $n \geq N$. Autrement dit, la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

$\Leftarrow$ Démontrons la contraposée. On suppose que la fonction f n'est pas continue au point $x \in X$. Il existe donc un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\eta > 0$, il existe un point $y(\eta)$ avec $|y(\eta) - x| < \eta$ mais tel que $|f(y(\eta)) - f(x)| \geq \varepsilon$. Pour $\eta = 1/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), on pose $x_n = y(1/n)$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge bien vers x . Mais on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité $|f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon$. La suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge donc pas vers $f(x)$. $\square$

Proposition 1.44 Convergence uniforme et continuité.

Soit X un espace métrique. Soient $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) des fonctions continues. On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Alors la limite $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est également continue.

Preuve On doit montrer que f est continue en chaque point de X . Soit donc $x \in X$. Fixons un réel $\varepsilon > 0$: on veut montrer que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ pourvu que y soit assez proche de x .

La convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f assure qu'il existe un rang n_0 tel que, pour tout $y \in X$, on ait $|f_{n_0}(y) - f(y)| \leq \varepsilon/3$.

Ensuite, on exprime la continuité au point x de cette fonction particulière f_{n_0} . Il existe $\eta > 0$ tel que $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| \leq \varepsilon/3$ dès que $|x - y| \leq \eta$. L'inégalité triangulaire montre alors que, si $|x - y| \leq \eta$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \leq \varepsilon. \quad \square$$

Remarque 1.45 Par contraposée on obtient que, si une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues converge simplement vers une fonction discontinue f , alors la convergence n'est pas uniforme.

Exercice 1.46 Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = 0$ si $x \leq 0$, $f_n(x) = x^n$ lorsque $0 \leq x \leq 1$ et $f_n(x) = 1$ lorsque $x \geq 1$ ($n \geq 1$). Esquisser le graphe de f_n . Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on déterminera. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 1.47 Reprendre la preuve de la proposition 1.44 pour montrer que si les fonctions f_n sont seulement supposées continues en un point $x_0 \in X$, et si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , alors la limite f est encore continue au point x_0 .

Les propriétés suivantes sont conséquence de la compacité des segments.

Corollaire 1.48 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un segment. Alors f est bornée sur ce segment, autrement dit $\|f\|_\infty < \infty$.

Preuve Soit $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \in [0, +\infty]$. Il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points $x_n \in [a, b]$ telle que $|f(x_n)| \rightarrow M$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Quitte à passer à une suite extraite, la proposition 1.18 assure qu'il existe un point $\alpha \in [a, b]$ tel que $x_n \rightarrow \alpha$. Par continuité de f , il suit que $f(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ et donc $M = |f(\alpha)| < \infty$. $\square$

Nous utiliserons à plusieurs reprises la propriété suivante.

Corollaire 1.49 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f admet des limites finies en $\pm\infty$. Alors, la fonction f est bornée.

Preuve Notons $\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Il existe donc $A > 0$ tel que $|f(x)| \leq M_0 := \sup(|\alpha|, |\beta|) + 1$ dès que $|x| \geq A$.

Par ailleurs, le corollaire 1.48 assure que la fonction f est bornée sur le segment $[-A, A]$. Notons $M_1 := \sup_{|x| \leq A} |f(x)| < \infty$. On a alors la majoration $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \leq \sup(M_0, M_1) < \infty$ comme annoncé. $\square$

C Dénombrabilité

On ne vous demandera pas d'être des pros des questions de cardinalité, mais simplement de savoir ce qu'est un ensemble dénombrable et d'avoir en tête les exemples élémentaires : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables, mais $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Définition 1.50 *On dit que deux ensembles X et Y ont même cardinal lorsqu'il existe une bijection $j : X \rightarrow Y$.*

Lorsque X a le même cardinal que l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, on dit que X est dénombrable.

Proposition 1.51 *Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.*

En particulier, toute partie de $\mathbb{N}$ est finie, ou bien dénombrable (on dit aussi qu'une partie de $\mathbb{N}$ est au plus dénombrable).

Lemme 1.52 *Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.*

Preuve Soit $A \subset \mathbb{N}$ non vide, et choisissons $\alpha \in A$. On considère alors $B = \{a \in A \mid a \leq \alpha\}$. Comme partie non vide et finie de $\mathbb{N}$, B admet un plus petit élément $\beta := \min\{b \in B\}$. Par construction, $\beta = \min A \in A$ est le plus petit élément de A . $\square$

Preuve de la proposition 1.51. Soit $A \subset \mathbb{N}$ une partie infinie de $\mathbb{N}$. On construit une bijection $j : \mathbb{N} \rightarrow A$ récursivement comme suit. On pose $j(0) = \min A$ (ce qui est licite d'après le lemme précédent).

Supposons construits $(j(0), \dots, j(k))$ ($k \in \mathbb{N}$). On introduit la partie $A_{k+1} = A \setminus \{j(0), \dots, j(k)\}$ (non vide puisque A est infinie), et l'on pose $j(k+1) = \min A_{k+1}$.

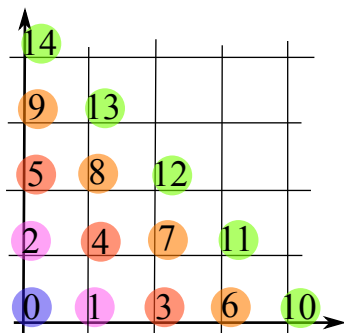
L'application $j : \mathbb{N} \rightarrow A$ est injective puisqu'on a, par construction, $j(k+1) \neq j(p)$ pour $p < k+1$. L'application $j : \mathbb{N} \rightarrow A$ est surjective puisque, lorsque $p \in A \subset \mathbb{N}$, on a $p \in j(\{0, \dots, p\})$. $\square$

Corollaire 1.53 *Soit X un ensemble dénombrable. Alors toute partie $A \subset X$ est finie ou dénombrable (i.e. au plus dénombrable).*

Exercice 1.54 Un ensemble X est fini ou dénombrable si et seulement si il existe une surjection $s : \mathbb{N} \rightarrow X$.

Proposition 1.55 *L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.*

Preuve Il s'agit de construire une bijection $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ou, en d'autres termes, de numérotter les éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Pour cela, on procède en suivant l'indication de la figure 1.1 les éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ correspondant aux noeuds du quadrillages (points de $\mathbb{R}^2$ à coordonnées dans $\mathbb{N}$). $\square$

FIGURE 1.1 – Enumération de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Corollaire 1.56 1. Les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

2. Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Proposition 1.57 L'intervalle $[0, 1[$ et donc le corps des réels ne sont pas dénombrables.

Preuve Utiliser le développement décimal d'un réel et le procédé diagonal de Cantor. Voir le cours. $\square$

2. Intégrale de Lebesgue : fonctions positives

Pour définir l'intégrale de Lebesgue, on doit commencer par définir l'intégrale des fonctions mesurables positives. Cette construction est un peu longue, et nécessite l'introduction des deux notions abstraites de tribu et de mesure. Nous la reportons donc au chapitre 9 pour pouvoir passer plus rapidement aux applications.

Nous supposons donc construite l'intégrale de Lebesgue des fonctions positives. Dans ce chapitre, nous énonçons ses principales propriétés 2.4, dont le théorème de convergence monotone qui sera démontré en 9.35.

- Règles de calcul et limites dans $[0, +\infty]$ (2.1, 2.2, 2.3).
- Propriétés de l'intégrale des fonctions mesurables positives :
l'énoncé de 2.4.
En particulier, le théorème de convergence monotone 2.4.(4).
- L'intégration sur une partie $B \subset \mathbb{R}$ (définition 2.8, remarque 2.9).
- Le corollaire 2.12 et sa démonstration.
- Séries de fonctions mesurables positives :
le corollaire 2.14 et sa démonstration.
- Le lemme de Fatou "simplifié" 2.17, sans démonstration.
- Les contre-exemples de l'exercice 2.18.

A A propos de la mesurabilité

Dans nos énoncés, il sera fréquemment question de “fonctions mesurables” ou de “parties mesurables”. Dans ce paragraphe, nous expliquons brièvement de quoi il retourne, et pourquoi on ne sera pas (au moins pour cette année) réellement préoccupés par les questions de mesurabilité.

Dans le chapitre 9, on verra que, pour pouvoir définir l’intégrale d’une fonction positive $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$, puis d’une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, il faut que cette fonction soit “un petit peu régulière” en un sens spécifique à cette théorie, c’est-à-dire que f soit mesurable (on dit également borélienne). Mais, pour produire une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ ou $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou, ce qui revient au même, une partie de $\mathbb{R}$) qui ne soit pas mesurable, il faut se donner beaucoup de mal (voir 9.21).

Ceci fait que, dans la pratique, les fonctions que vous rencontrerez seront toutes mesurables. Notamment une fonction continue, une fonction continue par morceaux, une somme, un produit, un sup ou un inf de deux fonctions mesurables, une fonction pour laquelle on dispose d’une expression explicite, ou encore la limite simple d’une suite de fonctions mesurables sont mesurables.

Il est cependant important de garder dans un coin de la tête ces questions de mesurabilité car cette notion devient pertinente lorsqu’on ne se contente plus d’intégrer pour la mesure de Lebesgue des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, et que l’on aborde par exemple l’étude des Probabilités non élémentaires.

Le mode d’emploi pour cette année est donc le suivant.

1. Je donne des énoncés justes... donc, dans mes hypothèses, je demande (par exemple) que les fonctions soient mesurables.
2. Dans les exercices, vous énoncez le théorème que vous voulez appliquer, en incluant les hypothèses de mesurabilité.
Puis vous vérifiez soigneusement que toutes les hypothèses sont satisfaites dans votre cas, SAUF la mesurabilité qui est admise comme “allant de soi”.

B Arithmétique dans $[0, +\infty]$

Dans ce chapitre, il va être question de fonctions et d'intégrales à valeurs positives éventuellement infinies, donc à valeurs dans $[0, +\infty]$. Commençons donc par définir les règles de calcul qui seront en vigueur.

Définition 2.1 Règles de calcul dans $[0, \infty]$.

On convient de poser

- $c + \infty = +\infty$ pour tout $c \in [0, +\infty]$;
- $c \cdot \infty = \infty$ pour tout $c \in]0, +\infty]$;
- $0 \cdot \infty = 0$.

Attention à la dernière convention.

Usuellement, l'expression $0 \cdot \infty$ est une forme indéterminée : penser aux limites en 0^+ des fonctions $x \rightarrow x \frac{1}{x}$ ou $x \rightarrow x \frac{1}{x^2}$, ou encore $x \rightarrow x^2 \frac{1}{x}$... et nous ne changeons pas d'avis sur ce point !

Dans le contexte qui nous occupe, on doit cependant convenir que $0 \cdot \infty = 0$, l'objectif étant que l'intégrale de la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ (aire d'un rectangle de hauteur nulle et de base infinie) soit égale à 0. De même, l'intégrale de la fonction $\infty \mathbb{1}_{\{x\}}$ (nulle partout sauf au point $x \in \mathbb{R}$) sera nulle.

Définition 2.2 Limites dans $[0, \infty]$.

Soit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0, +\infty]$.

- *On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$ si x_n est arbitrairement grand lorsque n est assez grand : pour tout réel M , il existe un rang N tel qu'on ait $x_n \in [M, \infty]$ pour tout $n \geq N$.*
- *La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in [0, \infty[$ lorsque la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est finie à partir d'un certain rang et converge vers ℓ au sens usuel.*

Nous utiliserons de façon répétée la remarque fondamentale suivante. C'est grâce à elle que nous sommes heureux de travailler dans $[0, +\infty]$ plutôt que dans $[0, +\infty[$!

Lemme 2.3 *Une suite croissante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0, +\infty]$ converge dans $[0, +\infty]$ vers $\alpha := \sup x_n \in [0, +\infty]$.*

C Intégration des fonctions positives

Nous démontrerons au tout dernier chapitre 9 le résultat suivant. Cet énoncé est la pierre angulaire de notre cours. En l'utilisant comme point de départ, nous allons en effet dérouler toute la théorie de l'intégration. Vous devez donc dès maintenant en connaître l'énoncé, et savoir l'utiliser.

Théorème 2.4 Intégrale de Lebesgue des fonctions positives, résumé.

Il existe une application qui, à une fonction mesurable $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ positive, associe son “intégrale de Lebesgue” notée $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda \in [0, +\infty]$.

Cette intégrale est :

1. **Normalisée** : pour tous réels $a \leq b$, la fonction $\mathbb{1}_{[a,b]}$ est mesurable et on a l'égalité $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[a,b]} d\lambda = b - a$.
2. **Croissante** : si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ sont mesurables positives et telles que $f \leq g$, on a $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} g d\lambda$.
3. **Positivement linéaire** : pour $f, g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ mesurables positives et $\alpha, \beta \in [0, \infty]$, la fonction $\alpha f + \beta g$ est mesurable et on a

$$\int_{\mathbb{R}} (\alpha f + \beta g) d\lambda = \alpha \int_{\mathbb{R}} f d\lambda + \beta \int_{\mathbb{R}} g d\lambda.$$

L'intégrale de Lebesgue satisfait également le

4. **Théorème de convergence monotone (ou de Beppo Levi)** :
si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante (c'est-à-dire avec $f_n \leq f_{n+1}$) de fonctions mesurables positives $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$, alors sa limite $f := \lim f_n = \sup f_n$ est mesurable positive et on peut échanger limite et intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda.$$

Remarque 2.5 Les trois premières propriétés sont requises de toute théorie de l'intégration (voir l'Introduction), et étaient déjà satisfaites par l'intégrale de Riemann.

La condition de normalisation (1.) est familière. La croissance (2.) découle de l'additivité dans (3.) et de la positivité de l'intégrale.

La condition (3.) préfigure la linéarité de l'intégrale (voir la proposition 3.6). Pour le moment, nous ne considérons que des fonctions (mesurables) positives, celles-ci ne forment donc pas un espace vectoriel et il n'y a donc pas lieu de parler de linéarité.

- Exercice 2.6**
1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{a\}} d\lambda$, $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[a, \infty[} d\lambda$ et $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1} d\lambda$, où $\mathbf{1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ désigne la fonction constante égale à 1.
 2. Soient $a < b$. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]a,b[} d\lambda = b - a$.
 3. Le théorème de convergence monotone s'applique-t-il à la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ définies pour $n \in \mathbb{N}$ par $f_n = \mathbb{1}_{[n, \infty[}$?

Remarque 2.7 Le théorème de convergence monotone est le premier des grands théorèmes de l'intégrale de Lebesgue. On en déduira le lemme de Fatou ainsi que le théorème de convergence dominée.

Dans le théorème de convergence monotone, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions positives ; cette suite de fonctions converge donc simplement vers une fonction f à valeurs dans $[0, +\infty]$.

Par croissance de l'intégrale (propriété 2.) la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des intégrales $I_n := \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda \in [0, +\infty]$ est alors une suite croissante de réels (étendus) positifs; elle converge donc vers un certain $J \in [0, +\infty]$. L'information que nous donne le théorème est que la limite J des intégrales des f_n est égale à l'intégrale de la limite des $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, soit $J = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda$.

On peut également souhaiter intégrer des fonctions sur une partie $B \subset \mathbb{R}$. La manip suivante permet de se ramener sans effort à l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Définition 2.8 Intégration sur une partie.

Soit $B \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable.

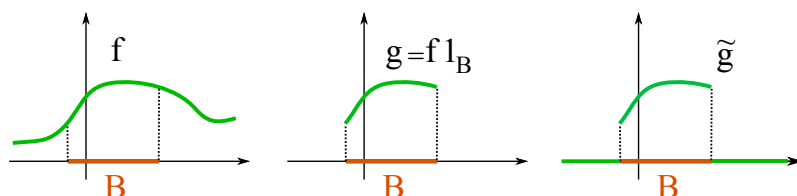
Si $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ est mesurable positive, on définit l'intégrale de f sur la partie B en introduisant la fonction tronquée $f \mathbb{1}_B$ (mesurable) et en posant

$$\int_B f d\lambda := \int_{\mathbb{R}} (f \mathbb{1}_B) d\lambda.$$

Si $g : B \rightarrow [0, +\infty]$ est une fonction mesurable positive définie sur la partie B , on introduit la fonction mesurable $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ obtenue en prolongeant g par 0 en dehors de B , et on pose

$$\int_B g d\lambda := \int_{\mathbb{R}} \tilde{g} d\lambda = \int_B \tilde{g} d\lambda.$$

Remarque 2.9 Il suit immédiatement des définitions que les propriétés (2, 3 et 4) du théorème 2.4 sont encore satisfaites par l'application $f \rightarrow \int_B f d\lambda$, en particulier le théorème de convergence monotone.



Exercice 2.10 Soient $a < b$ deux réels, et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. Montrer l'égalité des intégrales $\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_{]a,b[} f d\lambda$.

Remarque 2.11 Spoiler. Rassurez-vous, l'intégrale de Lebesgue n'est pas un objet si mystérieux. Soit $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue (que nous supposons positive pour l'instant car, à ce stade, ce sont les seules fonctions dont nous avons défini l'intégrale) définie sur un segment. Nous démontrerons en 3.15 l'égalité

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(t) dt$$

de ses intégrales de Lebesgue (à gauche) et de Riemann (à droite).

D Conséquences du théorème de Beppo Levi

Voici une première conséquence du théorème de convergence monotone. Voir également la variante 2.13, et plus tard la proposition 3.19 pour des fonctions à valeurs complexes. Ceci nous permettra de ramener le calcul de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle non compact au calcul d'intégrales sur des segments, ce qui est particulièrement intéressant à la lumière du Spoiler 2.11 : on renvoie à l'exemple 3.22 pour voir comment ça fonctionne.

Corollaire 2.12 *Soient $]a, b[\subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert (borné, ou non borné) et $f :]a, b[\rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels avec $a < a_n < b_n < b$, et telles que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroisse vers a et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croisse vers b . Alors on a l'égalité*

$$\int_{]a, b[} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a_n, b_n]} f d\lambda.$$

Preuve La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant décroissante et la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante, les intervalles $[a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ ($n \in \mathbb{N}$) sont emboîtés. La fonction f étant supposée positive, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions mesurables définies sur $]a, b[$ par $f_n := f \mathbb{1}_{[a_n, b_n]}$ est donc croissante. Ces fonctions sont positives.

Puisque $a_n \rightarrow a$ et $b_n \rightarrow b$, on a convergence simple $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{[a_n, b_n]} = \mathbb{1}_{]a, b[}$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc simplement vers f sur son intervalle de définition $]a, b[$. Le théorème de convergence monotone s'applique alors pour donner le résultat (voir en effet la remarque 2.9). $\square$

Exemple 2.13 Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. La preuve du corollaire 2.12 et l'exercice 2.10 donnent les égalités

$$\int_{[0, \infty[} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, n]} f d\lambda \quad \text{et} \quad \int_{[0, 1]} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[1/n, 1]} f d\lambda.$$

Le théorème de convergence monotone permet aussi de calculer l'intégrale d'une fonction définie comme somme d'une série de fonctions positives.

Corollaire 2.14 Séries de fonctions positives.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives $u_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$. Alors la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge simplement vers une fonction mesurable $u : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$, et on peut échanger somme et intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}} u d\lambda := \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \right) d\lambda = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{R}} u_n d\lambda \right).$$

Preuve On applique le théorème de convergence monotone à la suite des sommes partielles $f_p := \sum_{n=0}^p u_n$. En effet, $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante

de fonctions mesurables positives qui converge vers la somme $u := \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$. Le résultat annoncé découle alors de la propriété 3. du théorème 2.4, puisque

$$\sum_{n=0}^p \int_{\mathbb{R}} u_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f_p d\lambda \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{\text{convergence monotone}} \int_{\mathbb{R}} u d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \right) d\lambda. \quad \square$$

Remarque 2.15 L'additivité de l'intégrale (théorème 2.4.(3)) permet a priori seulement d'intervertir une somme finie et l'intégrale. Dans le corollaire 2.14, nous échangeons une série (somme infinie) avec l'intégrale : il nous faut donc un argument supplémentaire, en l'occurrence le théorème de convergence monotone.

Exercice 2.16 Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble dénombrable. Montrer que la fonction indicatrice de A , qui est mesurable, est d'intégrale nulle : $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A d\lambda = 0$. On pourra écrire $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $\mathbf{1}_A = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{a_n\}}$.

EXEMPLES : la fonction indicatrice $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$, et a fortiori la fonction indicatrice $g := \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ des rationnels de $[0,1]$, sont mesurables d'intégrales nulles.

On a donc déjà gagné par rapport à l'intégrale de Riemann. En effet la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$, qui est pourtant obtenue comme limite croissante d'une suite de fonctions en escalier, n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Du théorème de convergence monotone on déduit le lemme de Fatou. Il s'agit toujours d'une suite de fonctions mesurables positives, mais cette suite n'est plus supposée croissante. Même si l'on ne peut alors plus échanger limite et intégrale, une inégalité persiste. Nous énonçons une version simpliste de ce lemme (voir 2.23 pour le lemme de Fatou dans toute sa puissance).

Lemme 2.17 Lemme de Fatou (version simpliste).

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ mesurables positives. On suppose que

1. la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$;
2. la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des intégrales $I_n := \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ converge vers $I \in [0, \infty]$.

Alors, la fonction f est mesurable et positive et on a l'inégalité

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda.$$

Les exemples de l'exercice 2.18 illustrent les deux raisons pour lesquelles on ne peut pas toujours échanger limite et intégrale :

1. *Evanescence* : la masse part à l'infini.

2. *Concentration* : la masse se concentre vers un point.

Les hypothèses du théorème de convergence dominée 4.25 exclueront ces cas défavorables.

Exercice 2.18 1. *Evanescence* : Etudier l'exemple où $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ est définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $f_n(x) = 0$ si $x \leq n$ et $f_n(x) = 1$ si $x > n$.
 2. *Concentration* : Etudier l'exemple de la suite $g_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $g_n(x) = 0$ si $x \leq 0$ ou $x \geq 1/n$, et $g_n(x) = n$ si $0 < x < 1/n$.
 On esquissera les graphes des (f_n) et (g_n) .

Le résultat élémentaire suivant nous servira dans la preuve du lemme de Fatou. Il permet de remplacer une suite réelle convergente par une suite croissante de même limite.

Lemme 2.19 Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $x_n \in [0, +\infty]$, une suite convergente de limite $\ell \in [0, +\infty]$. On pose $y_n = \inf_{k \geq n} x_k \in [0, +\infty]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors croissante, et elle converge toujours vers $\ell \in [0, +\infty]$.

Preuve La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante car l'inf est pris sur un ensemble de plus en plus petit.

Supposons d'abord que $x_n \rightarrow \infty$. Soit $M > 0$. Il existe un rang N tel que l'on ait $x_n \geq M$ pour tout $n \geq N$. Il suit alors que $y_n \geq M$ si $n \geq N$ et donc la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Supposons maintenant que $x_n \rightarrow \ell \in [0, \infty[$ et fixons $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N tel que l'on ait $\ell - \varepsilon \leq x_n \leq \ell + \varepsilon$, et donc $\ell - \varepsilon \leq y_n \leq \ell + \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Ainsi, la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers ℓ . $\square$

Preuve du lemme de Fatou On introduit les fonctions $g_n := \inf_{k \geq n} f_k$ ($n \in \mathbb{N}$). Le lemme précédent, que l'on applique aux suites de réels positifs $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ pour $x \in \mathbb{R}$, assure que la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge encore simplement vers f . Mais la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est maintenant croissante (et toujours positive) : on peut donc lui appliquer le théorème de convergence monotone, d'où l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_n d\lambda. \quad (2.1)$$

On va maintenant chercher à majorer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_n d\lambda$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par construction, on a la majoration $g_n \leq f_k$ pour tout $k \geq n$. Il suit, par monotonie de l'intégrale, que $\int_{\mathbb{R}} g_n d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f_k d\lambda =: I_k$ pour tout $k \geq n$. Par hypothèse, on a $I_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} I$. On peut donc passer à la limite dans cette inégalité, à n fixé, lorsque $k \rightarrow \infty$. Il vient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité $\int_{\mathbb{R}} g_n d\lambda \leq I$.

On passe alors à la limite dans cette dernière inégalité lorsque $n \rightarrow \infty$, et il vient finalement avec (2.1) ce qu'on voulait démontrer : que

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_n d\lambda \leq I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda.$$

$\square$

Dans l'énoncé ci-dessus du lemme de Fatou, il est un peu dommage de devoir supposer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, ainsi que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de leurs intégrales. Heureusement, le lemme de Fatou admet une version plus générale. Elle fait intervenir la notion de limite inférieure d'une suite de nombres réels (ou à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$), qui est toujours définie et que nous rappelons ci-dessous.

Définition 2.20 Limite inférieure.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$. La suite de terme général $y_n = \inf_{k \geq n} x_k \in [-\infty, +\infty]$ est croissante. Elle admet donc une limite dans $[-\infty, +\infty]$: c'est la limite inférieure de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que l'on note

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf_{k \geq n} x_k) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (\inf_{k \geq n} x_k).$$

On définit de même la limite supérieure de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{k \geq n} x_k) = \inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup_{k \geq n} x_k).$$

- Exercice 2.21**
1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. On suppose que cette suite converge vers $\ell \in [-\infty, +\infty]$. Déterminer sa limite inférieure, et sa limite supérieure.
 2. Déterminer les limites inférieure et supérieure des suites respectivement définies pour $n \geq 1$ par : $x_n = n$, $y_n = -n$, $z_n = (-1)^n$, $u_n = (-1)^n + 1/n$, $v_n = 0$ si n est pair et $v_n = n$ si n est impair.

On peut alors définir la limite inférieure d'une suite de fonctions à valeurs réelles.

Définition 2.22 Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) une suite de fonctions. La limite inférieure de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, notée $\liminf f_n : \mathbb{R} \rightarrow [-\infty, +\infty]$, est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $(\liminf f_n)(x) = \liminf (f_n(x))$.

On laisse au lecteur le soin de définir la limite supérieure d'une suite de fonctions à valeurs réelles : nous n'en aurons pas besoin ici.

Nous pouvons maintenant énoncer le "vrai" lemme de Fatou.

Théorème 2.23 Lemme de Fatou (version complète).

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ mesurables positives. On a l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda.$$

La démonstration de ce théorème est laissée au lecteur. Elle est semblable à celle de la version simplifiée.

Exercice 2.24 On introduit la suite de fonctions $h_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $h_{2n} = \mathbb{1}_{[0,1]}$ et $h_{2n+1} = \mathbb{1}_{[1,2]}$.

1. Montrer que la limite inférieure $f := \liminf h_n$ de cette suite de fonctions est $f = \mathbb{1}_{\{1\}}$.
2. Que vaut $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda$?
3. Déterminer la $\liminf$ de la suite réelle $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_{\mathbb{R}} h_n \, d\lambda$.

3. Intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

De l'intégrale des fonctions positives, on déduit la notion de fonction intégrable au sens de Lebesgue puis d'intégrale d'une fonction intégrable.

- La définition d'une fonction Lebesgue intégrable à valeurs dans $[0, +\infty]$, puis à valeurs réelles ou complexes, et de son intégrale (3.2 et 3.7).
- La définition des espaces vectoriels $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(B)$ et $\mathcal{L}^1(B)$ et les premières propriétés de l'intégrale de Lebesgue (3.6 et 3.9).
- La proposition 3.11 (en particulier les critères d'intégrabilité) et sa démonstration.
- Le lemme 3.13 (théorème fondamental de l'analyse) et sa démonstration.
- Le lien entre l'intégrale de Riemann et celle de Lebesgue 3.15, sans démonstration.
- Les méthodes de calcul (proposition 3.18), sans démonstration.
- La proposition 3.19 et sa démonstration.
- Les propriétés 3.25 de l'intégrale de Lebesgue, sans démonstration.
- Les fonctions de référence : les trois propositions de la section G (propositions 3.29, 3.32 et 3.33) sans démonstration.

A Fonctions intégrables à valeurs réelles

Jusqu'ici, on dispose uniquement de l'intégrale des fonctions mesurables positives. Cette intégrale est à valeurs dans $[0, +\infty]$.

On va maintenant définir, lorsque c'est possible (c'est-à-dire lorsque cette fonction est "intégrable"), l'intégrale d'une fonction mesurable $f : B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de signe quelconque en se ramenant aux intégrales de fonctions positives.

Définition 3.1 Parties positive et négative d'une fonction.

Soient $B \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable et $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

On introduit sa partie positive $f^+ := \max(f, 0)$ et sa partie négative $f^- := \max(-f, 0)$, de sorte que $f = f^+ - f^-$.

Les fonctions f^+ et f^- sont deux fonctions mesurables positives (elles sont à valeurs finies, i.e. dans $[0, \infty[$).

La fonction valeur absolue de f , égale à $|f| = f^+ + f^-$, est également mesurable (et positive).

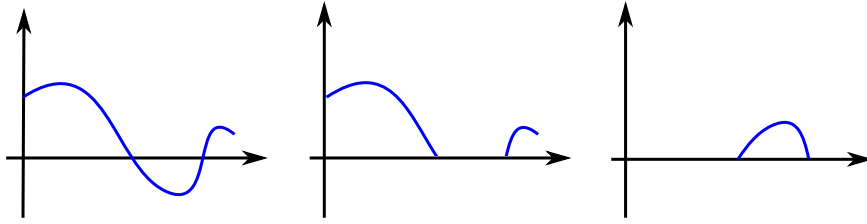


FIGURE 3.1 – Les graphes de f , et de ses parties positive f^+ et négative f^-

On définit maintenant les fonctions intégrables : comme leur nom l'indique, ce sont les fonctions dont on saura définir l'intégrale, qui est un réel (fini !)

Définition 3.2 Fonction réelle intégrable, intégrale de Lebesgue.

Soit $B \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable.

1. Une fonction mesurable positive $f : B \rightarrow [0, +\infty]$ est intégrable si et seulement si son intégrale est finie, soit $\int_B f d\lambda \in [0, +\infty[$.
2. Une fonction mesurable à valeurs réelles $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si sa valeur absolue $|f| : B \rightarrow [0, +\infty[$, qui est une fonction mesurable positive, est intégrable c'est-à-dire si et seulement si

$$\int_B |f| d\lambda = \int_B f^+ d\lambda + \int_B f^- d\lambda \in [0, +\infty[.$$

Dans ce cas, on définit l'intégrale de Lebesgue de f comme étant

$$\int_B f d\lambda := \int_B f^+ d\lambda - \int_B f^- d\lambda \in \mathbb{R}.$$

Remarque 3.3 • On sait attribuer une intégrale à n'importe quelle fonction mesurable positive (théorème 2.4). Cette intégrale prend ses valeurs dans $[0, +\infty]$.

Néanmoins (attention, peau de banane cachée sous les définitions!), cette fonction positive n'est pas toujours intégrable : on dit qu'elle l'est lorsque son intégrale est finie, i.e. à valeurs dans $[0, +\infty[$.

• Lorsque la fonction $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable, ses parties positive et négative sont intégrables : leurs intégrales appartiennent à $[0, +\infty[$. Il suit que l'expression $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda := \int_B f^+ d\lambda - \int_B f^- d\lambda$ qui définit alors $\int_B f$ n'est jamais la forme indéterminée $\infty - \infty$. Ouf!

Exemple 3.4 Les fonctions $f_1 = \mathbb{1}_{[0, +\infty[}$, $f_2 = (\mathbb{1}_{[0, +\infty[} - \mathbb{1}_{[-1, 0]})$ ou encore $f_3 = (\mathbb{1}_{[0, +\infty[} - \mathbb{1}_{]-\infty, 0]})$ ne sont pas intégrables. Par contre, la fonction $f_4 = (\mathbb{1}_{[-4, -1]} + 3\mathbb{1}_{[0, 1]})$ est intégrable (que vaut son intégrale?).

La fonction $g_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbb{1}_{]n-1, n]}$ n'est pas intégrable. On en déduit que la fonction $g_2 : x \in \mathbb{R} \rightarrow (1/x) \mathbb{1}_{]1, \infty[}$ n'est pas intégrable. La fonction g_3 définie sur $\mathbb{R}$ par $g_3(x) = 1/x$ lorsque $|x| \geq 1$ et $g_3(x) = 0$ sinon n'est pas intégrable.

Les fonctions $h_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \mathbb{1}_{]n, n+1]}$ et $h_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \mathbb{1}_{]n, n+1]}$ sont intégrables. La fonction $h_3 : x \in \mathbb{R} \rightarrow (1/x^2) \mathbb{1}_{]1, \infty[}$ est intégrable.

Lorsque f est une fonction intégrable, on va voir que l'on peut également calculer son intégrale à partir de toute décomposition de f comme différence de deux fonctions positives intégrables (qui ne sont donc pas forcément ses parties positive et négative).

Lemme 3.5 Soient $B \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable, et $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On suppose qu'on a une décomposition $f = f_1 - f_2$, où $f_1, f_2 : B \rightarrow [0, \infty[\subset \mathbb{R}$ sont deux fonctions (mesurables) positives intégrables. Alors on a l'égalité

$$\int_B f d\lambda = \int_B f_1 d\lambda - \int_B f_2 d\lambda \in \mathbb{R}.$$

Preuve On a deux décompositions $f = f^+ - f^- = f_1 - f_2$ de notre fonction. Il suit que $f^+ + f_2 = f_1 + f^-$. Les fonctions intervenant dans cette égalité sont mesurables et positives, donc le théorème 2.4 assure qu'on a l'égalité $\int_B f^+ d\lambda + \int_B f_2 d\lambda = \int_B f_1 d\lambda + \int_B f^- d\lambda$. Par hypothèse, les quatre intégrales intervenant dans cette identité sont finies. On en déduit donc (puisque, par hypothèse, il n'y pas de forme indéterminée $\infty - \infty$!) que

$$\int_B f d\lambda := \int_B f^+ d\lambda - \int_B f^- d\lambda = \int_B f_1 d\lambda - \int_B f_2 d\lambda.$$

□

Proposition 3.6 Propriétés de l'intégrale de Lebesgue (1).

Soit $B \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable. On désigne par $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(B)$ l'ensemble des fonctions (mesurables) $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont intégrables sur B .

1. L'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(B)$ est naturellement un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

L'intégrale de Lebesgue

$$I : f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(B) \rightarrow \int_B f \, d\lambda \in \mathbb{R}$$

vérifie les propriétés suivantes :

2. **linéarité** : $I : \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(B) \rightarrow \mathbb{R}$ est une application $\mathbb{R}$ -linéaire ;
3. **croissance** : pour $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(B)$ avec $f \leq g$, on a $\int_B f \, d\lambda \leq \int_B g \, d\lambda$;
4. **inégalité triangulaire** : pour toute fonction intégrable $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(B)$, on a l'inégalité

$$\left| \int_B f \, d\lambda \right| \leq \int_B |f| \, d\lambda.$$

Lorsque $B = \mathbb{R}$, on pourra simplement noter $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1 = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs réelles qui sont intégrables.

Preuve 1. Structure d'espace vectoriel. Rappelons que l'intégrale des fonctions mesurables positives est positivement linéaire (théorème 2.4 (3)). Soient donc $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(B)$ deux fonctions intégrables, et t un réel.

La fonction $f + g$ est mesurable et la fonction $|f + g|$ est d'intégrale finie puisque $|f + g| \leq |f| + |g|$. Cela prouve que $f + g$ est intégrable.

La fonction tf est mesurable, avec $|tf| = |t||f|$ d'intégrale finie. Donc tf est intégrable.

2a. Additivité. Soient $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(B)$. Pour déterminer l'intégrale de $f + g$, on ne va pas tenter de déterminer ses parties positive et négative en fonction de celles de f et g , mais plutôt utiliser le lemme 3.5. On écrit en effet

$$f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-).$$

Les fonctions $f^+ + g^+$ et $f^- + g^-$ sont mesurables positives, et d'intégrales finies. On a donc en utilisant le lemme 3.5, puis l'additivité de l'intégrale des fonctions positives, et enfin en regroupant les termes :

$$\begin{aligned} \int_B (f + g) \, d\lambda &= \int_B (f^+ + g^+) \, d\lambda - \int_B (f^- + g^-) \, d\lambda \\ &= \int_B f^+ \, d\lambda + \int_B g^+ \, d\lambda - \int_B f^- \, d\lambda - \int_B g^- \, d\lambda \\ &= \int_B f \, d\lambda + \int_B g \, d\lambda. \end{aligned}$$

2b. Homogénéité. Soient f intégrable et $t \in \mathbb{R}$. En revenant à la définition de l'intégrale $\int_B (tf) d\lambda$, puis en utilisant de nouveau le théorème 2.4 (3), on obtient que $\int_B (tf) d\lambda = t \int_B f d\lambda$ puisque :

- * $(tf)^+ = tf^+$ et $(tf)^- = tf^-$ lorsque $t \geq 0$;
- * $(tf)^+ = |t| f^-$ et $(tf)^- = |t| f^+$ lorsque $t < 0$.

3. Croissance. L'intégrale est positive et linéaire, elle est donc croissante. Il suffit en effet d'écrire l'inégalité $\int_B h d\lambda \geq 0$ pour la fonction mesurable positive $h = g - f \geq 0$.

4. Inégalité triangulaire. Soit f intégrable. Puisque $|f| = f^+ + f^-$, on a en utilisant l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$:

$$|\int_B f d\lambda| = |\int_B f^+ d\lambda - \int_B f^- d\lambda| \leq \int_B f^+ d\lambda + \int_B f^- d\lambda = \int_B |f| d\lambda. \quad \square$$

B Fonctions intégrables à valeurs complexes

Nous serons naturellement amenés à intégrer des fonctions à valeurs complexes. C'est incontournable lorsque l'on introduit la transformée de Fourier.

On se ramène immédiatement aux fonctions à valeurs réelles en séparant les parties réelles et imaginaires. Il n'y a aucune difficulté supplémentaire.

Définition 3.7 Fonction complexe intégrable, intégrale de Lebesgue.

Soit $B \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable.

Soit $f = u + iv : B \rightarrow \mathbb{C}$. La fonction f est mesurable si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire $u, v : B \rightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables.

On dit que la fonction f est intégrable lorsque son module $|f| : B \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction intégrable. C'est le cas si et seulement si ses parties réelle et imaginaire u et v sont toutes les deux intégrables. Dans ce cas on définit l'intégrale de f par

$$\int_B f d\lambda := \int_B u d\lambda + i \int_B v d\lambda.$$

Remarque 3.8 L'équivalence des critères d'intégrabilité vient de ce que $|u| \leq |f|$ et $|v| \leq |f|$, ainsi que de l'inégalité triangulaire $|f| \leq |u| + |v|$.

La proposition 3.6 s'étend aux fonctions intégrables à valeurs complexes.

Proposition 3.9 Propriétés de l'intégrale de Lebesgue (2).

Soit $B \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable. On désignera par $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(B)$, ou plus simplement $\mathcal{L}^1(B)$, l'ensemble des fonctions $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont intégrables. On notera en particulier $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

1. L'ensemble $\mathcal{L}^1(B)$ est naturellement un **espace vectoriel** sur $\mathbb{C}$.
2. L'intégrale $I : f \in \mathcal{L}^1(B) \rightarrow \int_B f d\lambda \in \mathbb{C}$ est **$\mathbb{C}$ -linéaire**.
3. L'intégrale vérifie l'**inégalité triangulaire** : pour $f \in \mathcal{L}^1(B)$, on a

$$\left| \int_B f d\lambda \right| \leq \int_B |f| d\lambda.$$

Remarque 3.10 Dans l'inégalité triangulaire, il s'agit maintenant de modules de nombres complexes (et non plus de valeurs absolues).

Preuve 1. et 2. sont conséquences immédiates de la proposition 3.6 et de la définition 3.7.

3. Ce n'est pas difficile, mais il va falloir se fatiguer un petit peu plus que dans le cas réel !

L'intégrale $J = \int_B f d\lambda$ est un nombre complexe. Il existe donc un nombre complexe $e^{is} \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que $|J| = e^{is} J$. Par $\mathbb{C}$ -linéarité de l'intégrale (2.) on a donc

$$|J| = e^{is} J = \int_B e^{is} f d\lambda \in [0, \infty[.$$

La contribution dans $e^{is} J$ de la partie imaginaire de la fonction $e^{is} f$ est donc nulle, c'est-à-dire que $\int_B \operatorname{Im}(e^{is} f) d\lambda = 0$. Il vient donc

$$|J| = \int_B \operatorname{Re}(e^{is} f) d\lambda \leq \int_B |e^{is} f| d\lambda = \int_B |f| d\lambda$$

par monotonie de l'intégrale des fonctions réelles et puisque $|e^{is}| = 1$. $\square$

Il faut bien connaître les résultats élémentaires, mais fondamentaux, suivants.

Proposition 3.11 Soit $B \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable.

1. Soient $g : B \rightarrow [0, +\infty]$ intégrable et $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable telle que $|f| \leq g$. Alors, f est intégrable.
2. Soient $f, g : B \rightarrow \mathbb{C}$ mesurables telles que $|f| \leq |g|$. Si g est intégrable, f l'est aussi. Si f n'est pas intégrable, g non plus.
3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On suppose que f est nulle en dehors d'une partie bornée $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et que f est bornée : il existe $M \in \mathbb{R}$ avec $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors f est intégrable.
4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ intégrable.
 - (a) La fonction f est également intégrable sur B .
 - (b) Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux parties mesurables disjointes. On a l'égalité $\int_{A \cup B} f d\lambda = \int_A f d\lambda + \int_B f d\lambda$.
5. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ intégrable. On a l'égalité $\int_{[a, b]} f d\lambda = \int_{]a, b[} f d\lambda$.

Preuve Indispensable... mais élémentaire à partir des définitions, et donc laissée au lecteur. La preuve sera cependant donnée en cours. $\square$

Exercice 3.12 1. Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ et $h_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ (pour $n \in \mathbb{N}$) des fonctions intégrables au sens de Lebesgue.

On suppose que la suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur le segment $[a, b]$. Montrer que $\int_{[a,b]} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} h_n d\lambda$.

Ce résultat très faible (car l'hypothèse de convergence uniforme est très forte), réminiscent de ce que l'on connaît déjà pour l'intégrale de Riemann, sera bientôt pulvérisé par le théorème de convergence dominée.

2. Soit la suite de fonctions définie par $h_n = (1/n)\mathbb{1}_{[0,n]}$. Montrer que cette suite converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle $f \equiv 0$. A-t-on $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} h_n d\lambda$?

C Intégrer une fonction continue sur un segment

Dans un cours précédent, vous avez introduit l'intégrale de Riemann. Elle permet d'intégrer une fonction qui est définie sur un segment et qui est suffisamment régulière – disons continue. On sera rassurés de savoir que, pour une fonction continue sur un segment, ses intégrales au sens de Riemann et de Lebesgue coïncident.

Les énoncés suivants sont également valables pour des fonctions à valeurs complexes : il suffit de séparer parties réelle et imaginaire pour les démontrer.

Lemme 3.13 Théorème fondamental de l'analyse.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un segment.

L'expression $F(x) = \int_{[a,x]} f d\lambda$ définit une fonction $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $F(a) = 0$ et pour laquelle $F'(x) = f(x)$ pour tout $a < x < b$.

En d'autres termes, F est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Preuve La fonction f , continue sur un segment, y est bornée (corollaire 1.48). La proposition 3.11 assure donc que F est bien définie. En notant $M = \|f\|_{\infty}$, l'inégalité $|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|$ pour tous $x, y \in [a, b]$ est alors conséquence de la proposition 3.6. Il suit que F est continue sur ce segment.

Soient maintenant $x \in]a, b[$ et $\alpha > 0$ tel que $[x - \alpha, x + \alpha] \subset [a, b]$. Pour tout $0 \leq h \leq \alpha$, il suit de la proposition 3.11(4b) les égalités

$$\begin{aligned} F(x+h) &= F(x) + \int_{[x, x+h]} f d\lambda \\ F(x) &= F(x-h) + \int_{[x-h, x]} f d\lambda. \end{aligned}$$

Exprimons la continuité de la fonction f au point $x \in]a, b[$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$, que l'on peut supposer vérifier également $\eta \leq \alpha$, et tel que $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$ dès que $t \in [x - \eta, x + \eta]$.

Pour $0 < h \leq \eta$, on a donc les inégalités $|F(x + h) - F(x) - hf(x)| \leq h\varepsilon$ et $|F(x - h) - F(x) + hf(x)| \leq h\varepsilon$. La fonction F est donc bien dérivable en x , de dérivée $F'(x) = f(x)$, puisque

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = f(x). \quad \square$$

Remarque 3.14 La même démonstration montre que F est dérivable à droite en a et à gauche en b , avec $F'_d(a) = f(a)$ et $F'_g(b) = f(b)$.

Corollaire 3.15 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (avec $a \leq b$) une fonction continue définie sur un segment. Alors f est intégrable au sens de Lebesgue sur $[a, b]$ et ses intégrales au sens de Riemann et de Lebesgue coïncident :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{[a,b]} f d\lambda. \quad (3.1)$$

Preuve du corollaire 3.15

Le lemme 3.13 assure que la fonction F est l'unique primitive de f telle que $F(a) = 0$. On a donc $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ pour tout $x \in [a, b]$. $\square$

Remarque 3.16 A l'attention de ceux d'entre vous qui ont l'intégrale de Riemann très présente à l'esprit...

Il faut imposer que $a \leq b$ pour avoir l'égalité des intégrales (rappelons en effet la convention $\int_b^a f(t) dt = -\int_a^b f(t) dt$ pour l'intégrale de Riemann).

L'intégrale de Riemann est une intégrale orientée : on intègre de a à b , ou bien de b à a . Tandis que, dans l'intégrale de Lebesgue, on intègre sur le segment $[a, b]$.

Notation 3.17 On réservera la notation $\int_a^b f(t) dt$ à l'intégrale, au sens de Riemann, d'une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur un segment. Pour une telle fonction, rappelons que le corollaire 3.15 assure l'égalité des intégrales au sens de Riemann et de Lebesgue, soit $\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(t) dt$.

Il ne suffit pas d'avoir défini l'intégrale de Lebesgue, il s'agit aussi de savoir mener des calculs effectifs ! Dans le cas d'une fonction continue sur un segment, le corollaire 3.15 identifie l'intégrale de Riemann avec celle de Lebesgue : on peut donc, sans surprise, utiliser les méthodes de calcul (ci-dessous) dont on a l'habitude.

Proposition 3.18 Méthodes de calcul, sur un segment. Soient $a < b$.

1. **Primitive.** Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f . Alors $\int_{[a,b]} f d\lambda = F(b) - F(a)$.
2. **Intégration par parties.** Soient $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 . On a alors

$$\int_{[a,b]} uv' d\lambda = [uv]_a^b - \int_{[a,b]} u'v d\lambda.$$

3. **Changement de variable.**

Soient $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et $I = \varphi([a, b])$ l'intervalle image.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur I et $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f . Alors

$$\int_{[a,b]} (f \circ \varphi) \varphi' d\lambda = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Preuve 1. est conséquence du lemme 3.13 puisque, F étant une primitive de f , la fonction $t \in [a, b] \rightarrow F(t) - F(a)$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

2. C'est 1. appliqué à la fonction continue $f = (uv' + u'v)$, qui admet la fonction uv comme primitive.

3. C'est 1. appliqué à la fonction continue $(f \circ \varphi) \varphi'$, qui admet la fonction $F \circ \varphi$ comme primitive. $\square$

D Intégrer sur un intervalle ouvert

Nous savons maintenant intégrer les fonctions (intégrables) à valeurs réelles, et non plus seulement les fonctions positives. Nous pouvons donc généraliser le corollaire 2.12 comme suit.

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle qui n'est pas un segment (I est donc un intervalle non fermé et/ou non borné). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, que l'on suppose intégrable sur I . La proposition fondamentale suivante (ou une variante, voir par exemple 3.20) permettra de ramener le calcul de l'intégrale de Lebesgue $\int_I f d\lambda$ au calcul d'intégrales (au sens de Lebesgue ou de Riemann : ici c'est indifférent) de cette fonction continue f sur des segments.

Proposition 3.19 Soient $]a, b[\subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert (borné, ou non borné) et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels avec $a < a_n < b_n < b$, et telles que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroisse vers a et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croisse vers b . Alors la fonction f est intégrable sur chacun des segments $[a_n, b_n]$, et on a l'égalité

$$\int_{]a,b[} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a_n, b_n]} f d\lambda.$$

Preuve Pour simplifier la rédaction, nous supposons que f est à valeurs réelles (sinon, on n'a qu'à séparer parties réelle et imaginaire). L'hypothèse faite sur les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ assure que $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'intervalles dont la réunion vérifie $\cup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] =]a, b[$.

Introduisons, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction tronquée $f_n = f \mathbf{1}_{[a_n, b_n]}$. L'inégalité $|f_n| \leq |f|$ assure que chacune des fonctions f_n est intégrable.

On peut appliquer le corollaire 2.12 aux parties positive f^+ et négative f^- de f , en remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a les égalités $f_n^\pm = f^\pm \mathbf{1}_{[a_n, b_n]}$. On obtient donc $\int_{]a, b[} f^\pm d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a_n, b_n]} f^\pm d\lambda$, et on obtient le résultat annoncé en revenant à la définition 3.2 des intégrales de f et des f_n . $\square$

Exemple 3.20 Soit $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable. On a l'égalité $\int_{[0, +\infty[} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, n]} f d\lambda$.

Notation 3.21 Lorsque $B \subset \mathbb{R}$ est une partie mesurable quelconque, et $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable, on pourra également noter l'intégrale de Lebesgue de f sur B en faisant apparaître la variable d'intégration comme suit :

$$\int_B f d\lambda = \int_B f(t) d\lambda(t).$$

Cette dernière notation sera plus raisonnable lorsque l'on remplace la fonction abstraite f par une expression explicite (voir l'exemple 3.22), et se révèlera indispensable si l'on souhaite préciser la "variable d'intégration" (ici t), par exemple lorsqu'on étudie une intégrale dépendant d'un paramètre comme au paragraphe 4.C.

Exemple 3.22 Voyons comment les méthodes que nous venons de décrire s'appliquent au calcul de l'intégrale $I = \int_{[1, \infty[} e^{-t} \sin t d\lambda(t)$.

- La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et admet $t \mapsto -e^{-t}$ pour primitive.

On commence par montrer que $f : t \in [1, \infty[\mapsto e^{-t} \in [0, +\infty]$, qui est mesurable et positive, est intégrable. En effet, le corollaire 2.12 (ou l'exemple 2.13) donnent l'égalité

$$\int_{[1, \infty[} e^{-t} d\lambda(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[1, n]} e^{-t} d\lambda(t).$$

Chacune des intégrales de droite est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[1, n]$. La proposition 3.18(1) s'applique donc, et on obtient

$$\int_{[1, n]} e^{-t} d\lambda(t) = e^{-1} - e^{-n},$$

d'où

$$\int_{[1, \infty[} e^{-t} d\lambda(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[1, n]} e^{-t} d\lambda(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-1} - e^{-n}) = e^{-1} < \infty.$$

• Soit alors $g : t \in [1, \infty[\mapsto e^{-t} \sin t \in \mathbb{R}$. Puisque $|g| \leq f$ avec f intégrable, la fonction g est intégrable (proposition 3.11). Autrement dit I est bien définie.

• Pour calculer I on peut alors se ramener à intégrer sur des segments, puisque la proposition 3.19 assure l'égalité

$$I := \int_{[1, \infty[} e^{-t} \sin t \, d\lambda(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[1, n]} e^{-t} \sin t \, d\lambda(t).$$

• Chacune des intégrales $I_n = \int_{[1, n]} e^{-t} \sin t \, d\lambda(t)$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. On peut donc intégrer par parties (c'est la proposition 3.18 (2)). On obtient alors

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{[1, n]} e^{-t} \sin t \, d\lambda(t) = [-e^{-t} \sin t]_1^n + \int_{[1, n]} e^{-t} \cos t \, d\lambda(t) \\ &= [-e^{-t} \sin t]_1^n - [e^{-t} \cos t]_1^n - \int_{[1, n]} e^{-t} \sin t \, d\lambda(t). \end{aligned}$$

On a donc $2I_n = e^{-1}(\sin 1 + \cos 1) - e^{-n}(\sin n + \cos n)$ puis, en faisant tendre n vers ∞ , l'égalité $I = e^{-1}(\sin 1 + \cos 1)/2$.

On observera la méthode suivie dans l'exemple 3.22 :

- On commence par montrer que la fonction g est intégrable.
- On se ramène alors à intégrer cette fonction g sur des segments $[1, n]$.
- Sur chaque segment $[1, n]$ on peut alors intégrer par parties.

On n'intègre pas directement par parties sur un intervalle qui n'est pas un segment !

Remarque 3.23 Dans la rédaction de l'exemple suivant nous avons choisi de nous en tenir, à toutes les étapes, aux intégrales de Lebesgue. À partir du moment où l'on se met à intégrer notre fonction continue sur un segment, on aurait pu utiliser des intégrales de Riemann (ce n'est alors qu'une question de notation, on parle de la même chose) et écrire

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n e^{-t} \sin t \, dt$$

avec, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^n e^{-t} \sin t \, dt = [-e^{-t} \sin t]_1^n + \int_1^n e^{-t} \cos t \, dt \\ &= [-e^{-t} \sin t]_1^n - [e^{-t} \cos t]_1^n - \int_1^n e^{-t} \sin t \, dt. \end{aligned}$$

E Lebesgue versus Riemann

Les intégrales de Riemann et de Lebesgue d'une fonction continue (ou continue par morceaux) définie sur un segment sont toutes deux bien définies, et coïncident.

Considérons maintenant la fonction continue $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = (\sin x/x)$ pour $x > 0$.

Cette fonction n'est pas intégrable au sens de Lebesgue : on a en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la minoration $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(x)| dx \geq 2/(n+1)$ (comparaison avec la série harmonique). Par contre, la fonction f admet une intégrale de Riemann semi-convergente sur $[0, +\infty[$, au sens où les intégrales $\int_0^y f(x) dx$ admettent une limite finie $\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y f(x) dx \in \mathbb{R}$ lorsque $y \rightarrow +\infty$ (l'existence de cette limite s'obtient par comparaison avec la série harmonique alternée).

Les intégrales au sens de Lebesgue et de Riemann ne sont donc pas toujours réconciliables (hors le cas continu sur un segment...)

Par prudence, nous nous interdirons donc dans ce cours de faire référence à l'intégrale de Riemann généralisée (ou impropre, ou semi-convergente). En effet, comme illustré ci-dessus par l'exemple de la fonction sinus cardinal $x \mapsto (\sin x)/x$, les choses se compliquent singulièrement lorsqu'on cherche à intégrer des fonctions à valeurs réelles ou complexes (et non plus positives).

Citons cependant, pour satisfaire votre curiosité, le résultat suivant concernant les fonctions à valeurs positives (dont l'énoncé se décline avec tout intervalle ouvert à droite et/ou à gauche).

Proposition 3.24 *Intégrale de Riemann généralisée d'une fonction positive.*

Soit $f : [0, \infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue positive, de primitive $F : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

La fonction f est intégrable au sens de Lebesgue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ si et seulement si $F(x)$ a une limite finie lorsque $x \rightarrow \infty$.

C'est le cas si et seulement si f admet une intégrale de Riemann généralisée sur $[0, +\infty[$. On a alors l'égalité

$$\int_{[0, +\infty[} f d\lambda = \int_0^\infty f(t) dt.$$

F Propriétés d'invariance

Les propriétés de l'intégrale de Lebesgue que nous énonçons ci-dessous vous sont déjà familières dans le cadre de l'intégrale de Riemann. Elles restent valables pour l'intégrale de Lebesgue. Nous les retrouverons au chapitre 5 comme cas particulier du théorème de changement de variable 5.28 (exercice 5.32).

Proposition 3.25 Propriétés d'invariance de l'intégrale.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable.

Les fonctions $\tau_x f : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t-x) \in \mathbb{C}$ pour $x \in \mathbb{R}$, $\check{f} : t \in \mathbb{R} \mapsto f(-t) \in \mathbb{C}$ et $f_s : t \in \mathbb{R} \mapsto f(st) \in \mathbb{C}$ pour $s \neq 0$ sont également intégrables, et on a :

Translation : $\int_{\mathbb{R}} f(t) d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-x) d\lambda(t)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dilatation : $\int_{\mathbb{R}} f(t) d\lambda(t) = |s| \int_{\mathbb{R}} f(st) d\lambda(t)$ pour tout $s \neq 0$.

Symétrie : $\int_{\mathbb{R}} f(t) d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} f(-t) d\lambda(t)$.

Toutes ces identités restent valables, dans $[0, +\infty]$, lorsque la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ est mesurable positive.

Remarque 3.26 • Attention à ne pas oublier la valeur absolue dans l'égalité $\int_{\mathbb{R}} f(t) d\lambda(t) = |s| \int_{\mathbb{R}} f(st) d\lambda(t)$.

Garde-fou : penser que l'intégrale d'une fonction positive doit être positive !

• La propriété de symétrie est un cas particulier de celle qui précède (dilatation), avec $s = -1$.

Exercice 3.27 En admettant que les propriétés de 3.25 sont vérifiées pour les fonctions mesurables positives (proposition 9.38), les démontrer pour les fonctions intégrables.

Exercice 3.28 1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable 1-périodique.

(a) Montrer, pour tout entier $n \geq 1$, l'égalité

$$\int_{[0,n]} f(t) d\lambda(t) = n \int_{[0,1]} f(t) d\lambda(t).$$

(b) En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, l'égalité

$$\int_{[0,1]} f(nt) d\lambda(t) = \int_{[0,1]} f(t) d\lambda(t).$$

2. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable et 1-périodique, et un entier $n \geq 1$. On suppose que f est intégrable sur $[0, 1]$. Montrer alors que la fonction $t \in [0, 1] \mapsto f(nt) \in \mathbb{C}$ est intégrable sur cet intervalle, et qu'on a l'égalité

$$\int_{[0,1]} f(nt) d\lambda(t) = \int_{[0,1]} f(t) d\lambda(t).$$

G Points de repère et tours de main

Pour montrer qu'une fonction est, ou n'est pas, intégrable on sera bien souvent amenés à la comparer à une fonction "connue" dont on sait qu'elle est (ou pas) intégrable.

Les exemples suivants, qui fournissent déjà une belle liste de "fonctions de référence", devront donc être connus et leur (non)-intégrabilité pourra être utilisée sans démonstration dans les copies – pourvu que l'énoncé apparaisse clairement.

Proposition 3.29 Quelques fonctions de référence.

1. La fonction $x \mapsto x^a$ est intégrable sur $]0, 1]$ ssi $a > -1$.
2. La fonction $x \mapsto x^a$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ ssi $a < -1$.
3. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est intégrable sur $]0, 1]$.
4. La fonction $x \mapsto e^{-ax}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ ssi $a > 0$.
5. La fonction $x \mapsto e^{-ax^b}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ ssi $a > 0$ et $b > 0$.
En particulier, la fonction $x \mapsto e^{-ax^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ ssi $a > 0$.

Exercice 3.30 Esquisser sur un même graphique, et pour différentes valeurs de $a \in \mathbb{R}$, les graphes des fonctions $x \in [0, +\infty[\mapsto x^a \in [0, +\infty[$. De même pour les fonctions $x \in [0, +\infty[\mapsto e^{-ax} \in [0, +\infty[$ et $x \in [0, +\infty[\mapsto e^{-x^a} \in [0, +\infty[$.

Les fonctions citées dans la proposition 3.29 sont de signe constant (toutes sont positives, sauf $x \mapsto \ln(x)$ qui est négative) sur leur intervalle de définition. Elles sont donc Lebesgue intégrables si et seulement si elles admettent une intégrale de Riemann généralisée (proposition 3.24).

Les résultats de cette proposition vous sont donc déjà familiers !

Preuve On utilise les résultats vus dans les paragraphes précédents : en particulier théorème de convergence monotone pour se ramener à intégrer sur un segment, utilisation de primitives sur un segment, comparaison de fonctions (voir si besoin la proposition 3.33)...

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, la fonction $f_a : x \in]0, 1] \mapsto x^a \in [0, +\infty[$ est positive. Lorsque $a \geq 0$, on peut remarquer d'emblée que f_a est continue sur le segment $[0, 1]$. Elle y est donc intégrable... ainsi que sur l'intervalle $]0, 1]$ (ce que nous retrouverons ci-dessous).

Soit $a \in \mathbb{R}$. Puisque $f_a \geq 0$, le théorème de convergence monotone donne l'égalité $\int_{]0,1]} x^a d\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[1/n,1]} x^a d\lambda(x)$. La fonction f_a est donc intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si cette limite est finie.

Supposons en un premier temps que $a \neq -1$. La fonction f_a admet alors pour primitive la fonction $x \mapsto x^{a+1}/(a+1)$. Il vient donc $\int_{[1/n,1]} x^a d\lambda(x) =$

$(1 - n^{-a-1})/(a+1)$. Lorsque $n \rightarrow \infty$, cette quantité tend vers l'infini pour $a < -1$ (la fonction n'est alors pas intégrable sur $]0, 1]$), et a une limite finie pour $a > -1$ (la fonction est alors intégrable sur $]0, 1]$ et son intégrale vaut $1/(a+1)$).

Si maintenant $a = -1$, la fonction f_{-1} admet pour primitive la fonction logarithme. On a donc $\int_{[1/n, 1]} x^{-1} d\lambda(x) = -\ln(1/n) = \log n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Ainsi f_{-1} n'est pas intégrable sur $]0, 1]$.

2. Pour $a \in \mathbb{R}$, la fonction $g_a : x \in [1, \infty[\mapsto x^a \in [0, +\infty[$ est positive. Lorsque $a \geq 0$, on peut remarquer d'emblée que $g_a(x) \geq 1$ pour tout $x \geq 1$ et la fonction g_a n'est donc pas intégrable sur $[1, \infty[$ (ce que nous retrouverons ci-dessous).

Soit $a \in \mathbb{R}$. Puisque $g_a \geq 0$, le théorème de convergence monotone donne l'égalité $\int_{[1, \infty[} x^a d\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[1, n]} x^a d\lambda(x)$. La fonction g_a est donc intégrable sur $[1, \infty[$ si et seulement si cette limite est finie.

Supposons en un premier temps que $a \neq -1$. La fonction g_a admet alors pour primitive la fonction $x \mapsto x^{a+1}/(a+1)$. Il vient donc $\int_{[1, n]} x^a d\lambda(x) = (n^{a+1} - 1)/(a+1)$: lorsque $n \rightarrow \infty$, cette quantité tend vers l'infini pour $a > -1$ (la fonction n'est alors pas intégrable sur $[1, \infty[$) et a une limite finie pour $a < -1$ (la fonction est alors intégrable sur $[1, \infty[$).

Si maintenant $a = -1$, la fonction g_{-1} admet pour primitive la fonction logarithme. On a donc $\int_{[1, n]} x^{-1} d\lambda(x) = \ln n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Ainsi g_{-1} n'est pas intégrable sur $[1, \infty[$.

3. • La fonction $x \mapsto \ln x$ est négative sur l'intervalle $]0, 1]$, et y admet pour primitive sur $[0, +\infty[$ la fonction $x \mapsto x \ln x - x$. On estime

$$\begin{aligned} \int_{[1/n, 1]} |\ln x| d\lambda(x) &= - \int_{[1/n, 1]} \ln x d\lambda(x) = [x - x \ln x]_{1/n}^1 \\ &= (1 - 1/n) + (1/n) \ln(1/n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 < \infty. \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \ln x$ est donc intégrable sur $]0, 1]$, et son intégrale vaut -1 .

• Si l'on n'est pas intéressés par le calcul effectif de cette intégrale, on peut se contenter de comparer $|\ln x|$ au voisinage de 0 avec une fonction puissance intégrable.

Soit $b > 0$. On sait que $x \ln x \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$. Puisque $b > 0$, on en déduit qu'on a également $bx^b \ln x = x^b \ln x^b \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$. On introduit alors la fonction $x \in]0, 1] \mapsto x^b \ln x \in \mathbb{R}$: on vient de voir que cette fonction se prolonge par continuité en 0. Cette fonction est donc bornée sur $]0, 1]$: il existe une constante M_b telle que $|\ln x| \leq M_b x^{-b}$ pour tout $0 < x \leq 1$. Pour la valeur de votre choix $0 < b < 1$ cela assure, par comparaison et d'après le (1), que la fonction $x \mapsto \ln x$ est intégrable sur $]0, 1]$.

4. Soit $h_a : x \in [0, +\infty[\mapsto e^{-ax} \in [0, +\infty[$. C'est une fonction positive. Lorsque $a \leq 0$, cette fonction est minorée par la fonction constante égale à 1, et n'est donc pas intégrable sur $[0, +\infty[$. Montrons que h_1 est intégrable.

Cette fonction admet pour primitive la fonction $x \mapsto -e^{-x}$. Le théorème de convergence monotone assure donc de nouveau les égalités

$$\int_{[1, \infty[} e^{-x} d\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[1, n]} e^{-x} d\lambda(x) = e^{-1} - e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1} < \infty.$$

La fonction h_1 est donc intégrable. L'intégrabilité de h_a lorsque $a > 0$ se montre de la même façon, ou bien peut se déduire de l'intégrabilité de h_1 en utilisant les propriétés d'invariance de l'intégrale de Lebesgue (proposition 3.25). Cette méthode a l'avantage de fournir également la valeur de l'intégrale.

Mais on peut aussi raisonner par comparaison (comme dans la seconde méthode du point 3. ci-dessus) et utiliser le fait que, pour tout réel $b \in \mathbb{R}$ et puisqu'on a supposé $a > 0$, on a $x^b e^{-ax} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$.

5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Supposons en un premier temps $a \leq 0$. La fonction définie par $k_{a,b} : x \in [0, +\infty[\mapsto e^{-ax^b} \in [0, +\infty[$ est alors minorée par 1, donc n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$. Nous supposons donc désormais $a > 0$.

Supposons $b \leq 0$. On a alors $x^b \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$ et la fonction $k_{a,b}$ a pour limite 1 en ∞ . Si l'on choisit $A > 0$ assez grand, on aura donc $k_{a,b}(x) \geq 1/2$ lorsque $x \geq A$. La fonction $k_{a,b}$ n'est donc pas intégrable sur $[0, +\infty[$.

Supposons maintenant $b > 0$. La fonction $u : x \mapsto x^2 e^{-ax^b}$ tend alors vers 0 à l'infini (passer au logarithme : voir si besoin la proposition 3.33). Cette fonction u étant continue sur $[0, +\infty[$, il résulte de la proposition 3.32 qu'elle y est bornée, mettons par M . On a donc $0 \leq k_{a,b} \leq Mx^{-2}$ pour tout $x \geq 0$. La fonction $k_{a,b}$ est donc intégrable sur $[1, +\infty[$. Puisque $k_{a,b}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (rappelons que $b > 0$), elle est également intégrable sur $[0, 1]$. $\square$

Remarque 3.31 Fonction intégrable au voisinage de $+\infty$, ou d'un point.

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. La fonction étant continue elle est bornée sur tout segment inclus dans son domaine de définition. Elle est donc intégrable sur un tel segment.

On dit que f est "intégrable au voisinage de $+\infty$ " lorsqu'il existe $A > 0$ tel que f soit intégrable sur l'intervalle $[A, +\infty[$. Dans ce cas, f est intégrable sur tout intervalle $[B, +\infty[$ lorsque $B > 0$ (si $B \geq A$ c'est immédiat par restriction ; si $B < A$ cela résulte de ce que f est intégrable sur $[B, A]$).

On dit de même que f est "intégrable au voisinage de 0" lorsqu'il existe $A > 0$ tel que f soit intégrable sur l'intervalle $]0, A]$. Dans ce cas, f est intégrable sur tout intervalle $]0, B]$ lorsque $B > 0$ (si $B \leq A$ c'est immédiat par restriction ; si $B > A$ cela résulte de ce que f est intégrable sur $[A, B]$).

Bien sûr, tout ce qui précède se transpose à une fonction continue définie sur un intervalle ouvert $] \alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$. On parle alors d'intégrabilité de f au voisinage de α ou bien au voisinage de β .

Les premières propriétés de la proposition 3.29 peuvent donc être ré-énoncées comme suit. La fonction $x \rightarrow x^a$ est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $a > -1$, et elle est intégrable au voisinage de l'infini si et seulement si $a < -1$. La fonction $x \rightarrow \ln x$ est intégrable au voisinage de 0.

Nous nous servirons de façon récurrente des deux propositions suivantes lorsque nous aurons à montrer qu'une fonction est (ou non) intégrable.

Proposition 3.32 Fonctions bornées. *Soient $a \leq b$ des réels.*

1. *Une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un segment est bornée sur ce segment.*
2. *Une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui admet des limites finies en $\pm\infty$ est bornée sur $\mathbb{R}$.*
3. *Une fonction continue $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ qui admet une limite finie en $+\infty$ est bornée sur $[a, +\infty[$.*

Les deux premières assertions de la proposition 3.32 ne sont autres que les corollaires 1.48 et 1.49. La dernière assertion en est une variante.

Pour traiter des exemples, comme dans la preuve de la proposition 3.29, il sera indispensable de savoir comparer entre elles des fonctions classiques (en particulier fonctions puissances et exponentielles).

Proposition 3.33 Comparaison de fonctions et conséquences.

1. (a) *Pour $a \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$, la fonction $x \mapsto x^a e^{-\beta x}$ tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$.*
 (b) *Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$, la fonction $x \mapsto x^a e^{-bx}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.*
2. (a) *Pour $a \in \mathbb{R}$ et $\beta < 0$, la fonction $x \mapsto (\ln(x))^a x^\beta$ tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$.*
 (b) *Soit $A > 1$. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b < -1$, la fonction $x \mapsto (\ln x)^a x^b$ est intégrable sur $[A, +\infty[$.*

Preuve 1.(a) Passer au logarithme.

1.(b) La fonction $x \mapsto x^a e^{-bx/2}$ est continue sur $[1, \infty[$ et elle tend vers 0 à l'infini. La proposition 3.32 assure donc que cette fonction est bornée, mettons par M , sur l'intervalle $[1, \infty[$.

On a donc $x^a e^{-bx} \leq M e^{-bx/2}$ pour tout $x \geq 1$, et par comparaison avec la fonction $x \mapsto M e^{-bx/2}$ qui est intégrable sur $[1, \infty[$, il suit que $x \mapsto x^a e^{-bx}$ est intégrable $[1, \infty[$ et donc au voisinage de $+\infty$.

2. (a) Puisque $\ln x \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow \infty$, il suffit de prouver l'assertion lorsque $a > 0$. On écrit alors $(\ln(x))^a x^b = (\ln(x) x^{b/a})^a$, avec $\ln(x) x^{b/a} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$ puisque $b/a < 0$.

2.(b) On choisit $b < \beta < -1$, et l'on écrit $(\ln(x))^a x^b = (\ln(x))^a x^{b-\beta} x^\beta$. Le facteur $(\ln(x))^a x^{b-\beta}$ est continu sur $[A, \infty[$ et tend vers 0 à l'infini, donc est borné sur cet intervalle. La fonction $x \mapsto x^\beta$ est intégrable sur $[A, \infty[$. Le produit est donc intégrable sur cet intervalle. $\square$

Quelques erreurs à ne pas commettre :

On intègre par parties uniquement lorsqu'il s'agit d'intégrer une fonction continue sur un segment.

En particulier, on n'intègre pas par parties sur un intervalle ouvert, ou non borné.

Lorsqu'une fonction f est à valeurs positives, on démontre qu'elle est intégrable en calculant (ou en estimant) son intégrale $\int f d\lambda$, qui doit être finie c'est-à-dire à valeurs dans $[0, +\infty[$ et non $[0, +\infty]$.

Par contre, si l'on n'a pas encore montré que la fonction f (non positive), à valeurs réelles ou complexes, est intégrable il ne faut pas écrire $\int f d\lambda$ car cette quantité n'est a priori pas définie.

Si vous êtes familiers avec la notion de fonctions équivalentes, vous pourrez également utiliser les résultats suivants... à condition évidemment de bien vérifier que les fonctions sont équivalentes et de citer correctement le résultat.

Fonctions équivalentes.

- Deux fonctions continues $f, g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ sont dites équivalentes au voisinage de l'infini lorsqu'il existe $A > 0$ tel que ni f ni g ne s'annulent sur l'intervalle $[A, +\infty[$, et si de plus $f(x)/g(x) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Dans ce cas, f est intégrable au voisinage de l'infini (remarque 3.31) si et seulement si g l'est.

Par exemple, les fonctions $x \mapsto 1/x$ et $x \mapsto 1/(x+1)$ sont équivalentes au voisinage de l'infini. Ni l'une ni l'autre n'est intégrable au voisinage de l'infini.

- De même f et g sont équivalentes au voisinage de 0 lorsqu'il existe $A > 0$ tel que ni f ni g ne s'annulent sur l'intervalle $]0, A]$, et si de plus $f(x)/g(x) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0$.

Dans ce cas, f est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si g l'est.

Par exemple, les fonctions $x \mapsto e^x/\sqrt{x}$ et $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ sont équivalentes au voisinage de 0. Elles sont toutes deux intégrables au voisinage de 0.

H Petit rappel sur les séries réelles et complexes

Définition 3.34 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles ou complexes. On dit que la série $\sum u_n$ (de terme général u_n) est convergente lorsque la suite $(s_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de ses sommes partielles, soit

$$s_p = \sum_{n=0}^p u_n ,$$

est convergente. Dans ce cas, on définit la somme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ de la série comme étant la limite de la suite des sommes partielles, soit

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^p u_n .$$

Proposition 3.35 Séries à termes positifs

Une série de terme général positif (soit $u_n \in [0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) est convergente si et seulement si ses sommes partielles sont majorées.

Preuve La série étant de terme général positif, la suite $(s_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est croissante. Cette suite $(s_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge donc si et seulement si elle est majorée. On a alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^p u_n = \sup_{p \in \mathbb{N}} \sum_{n=0}^p u_n . \quad \square$$

Définition 3.36 Séries alternées

Une série $\sum u_n$, dont le terme général est réel, est dite alternée lorsqu'elle s'écrit $u_n = (-1)^n v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ou bien $u_n = (-1)^{n+1} v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et où la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle positive décroissant vers 0. On a alors $v_n = |u_n|$.

Proposition 3.37 Séries alternées Une série alternée est convergente.

Preuve Supposons pour fixer les idées que $u_n = (-1)^n |u_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On vérifie alors facilement que

1. la suite $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles paires est décroissante, et elle est minorée par s_1 : elle converge donc vers un réel a ;
2. la suite $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles impaires est croissante, et majorée par s_0 : elle converge donc vers un réel b ;
3. la différence $s_{2n+2} - s_{2n+1} = u_{2n+1}$ tend vers 0, donc $a = b$.

La série est donc convergente, de somme $a = b$. $\square$

Remarquons la propriété suivante, dont la démonstration est laissée au lecteur.

Lemme 3.38 Soit $\sum u_n$ une série alternée. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a la majoration $|s_p| \leq |u_0|$.

Définition 3.39 Séries absolument convergentes

Une série $\sum u_n$ à terme général réel ou complexe est absolument convergente lorsque la série à termes positifs $\sum |u_n|$ est convergente.

Proposition 3.40 Séries absolument convergentes

Une série $\sum u_n$ à terme général réel ou complexe, et qui est absolument convergente, est convergente.

Preuve Supposons, pour simplifier l'exposition, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit à valeurs réelles. Introduisons les deux suites $(u_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ (partie positive de (u_n)) et $(u_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$ (partie négative de (u_n)) respectivement définies pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n^+ = \sup(u_n, 0) \quad \text{et} \quad u_n^- = \sup(-u_n, 0).$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ et $u_n = u_n^+ - u_n^-$.

Par hypothèse, la série à terme général positif $\sum |u_n|$ est convergente. Il suit des majorations $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$ que les deux séries à terme général positif $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont également convergentes, de sommes respectives s_+ et s_- . On vérifie alors facilement que la série $\sum u_n$ est convergente, de somme $s_+ - s_-$. En effet, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} (s_+ - s_-) - \sum_0^p u_n &= (s_+ - s_-) - \sum_0^p (u_n^+ - u_n^-) \\ &= \left(s_+ - \sum_0^p u_n^+\right) - \left(s_- - \sum_0^p u_n^-\right) \\ &\rightarrow 0 \quad \text{lorsque } p \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad \square$$

Remarque 3.41 Noter l'analogie criante entre les séries (à termes positifs, resp. absolument convergentes) et les intégrales (de fonctions positives, resp. Lebesgue intégrables). Voir également le paragraphe 9.E.

- Une série à termes positifs correspond à une fonction mesurable positive. La série à termes positif converge si sa somme (qui est toujours définie) est finie. La fonction mesurable positive est intégrable si son intégrale (qui est toujours définie) est finie.

- Une série à valeurs réelles correspond à une fonction mesurable à valeurs réelles. La série converge absolument si la série des valeurs absolues (série positive) est convergente, et sa somme est alors la différence des sommes de ses parties positive et négative. La fonction mesurable est intégrale si sa valeur absolue (fonction mesurable positive) est intégrable, et son intégrale est alors la différence des intégrales de ses parties positive et négative.

Exercice 3.42 Ecrire la démonstration de la proposition 3.40 dans le cas d'une série $\sum u_n$ de terme général complexe.

Remarque 3.43 Il existe cependant des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes. Par exemple, la série harmonique alternée de terme général $u_n = (-1)^n/n$ lorsque $n \geq 1$ n'est pas absolument convergente.

Elles correspondent, avec tous les ennuis qui vont avec, aux "intégrales semi-convergentes" dont nous ne voulons surtout pas parler ici car elles sortent du cadre de l'intégrale de Lebesgue !

4. Les théorèmes de Lebesgue

Nous démontrons dans ce chapitre les théorèmes fondamentaux de la théorie.

Il s'agit tout d'abord du théorème de convergence dominée de Lebesgue 4.25, qui suit facilement du théorème de convergence monotone.

Nous en déduisons les théorèmes de continuité 4.29 et de dérivabilité 4.34 des intégrales à paramètre.

Ce sont tous ces résultats qui, de par leur puissance et leur facilité d'utilisation, font le succès de l'intégrale de Lebesgue. Ils n'attendent plus qu'à être illustrés en T.D !

- La notion de partie négligeable 4.11 et de propriété vraie presque partout 4.18.
- Les propriétés 4.14, 4.20, 4.22 et leurs démonstrations.
- Le théorème de convergence dominée 4.25, sans démonstration.
- Le corollaire 4.5, et sa preuve.
- Le théorème 4.29 de continuité sous l'intégrale, et sa démonstration.
- Le théorème 4.34 de dérivabilité sous l'intégrale, sans démonstration.

A Le théorème de convergence dominée

Rappelons que l'intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives satisfait le théorème de convergence monotone (2.4).

Du théorème de convergence monotone, nous allons maintenant déduire le théorème de convergence dominée pour les fonctions intégrables de signe quelconque ou, plus généralement, à valeurs complexes.

Dans ce paragraphe, nous énonçons une première version un petit peu simplifiée (et donc rassurante) de ce théorème, car elle ne fait pas intervenir la notion de partie négligeable. Le “vrai” théorème de convergence dominée 4.25 s'en déduira immédiatement et sans douleur.

Théorème 4.1 Théorème de convergence dominée (première version).

Soit $B \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable. Soit $f_n : B \rightarrow \mathbb{C}$ (pour $n \in \mathbb{N}$) une suite de fonctions mesurables. On suppose qu'il y a :

- **convergence** : la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : B \rightarrow \mathbb{C}$, soit $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$;
- **domination** : il existe une fonction positive $g : B \rightarrow [0, +\infty]$ intégrable telle qu'on ait la domination $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in B$.

Alors chacune des fonctions f_n , ainsi que la limite f , est une fonction intégrable et on peut échanger limite et intégrale :

$$\int_B f \, d\lambda := \int_B \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_B f_n \, d\lambda \right).$$

Mieux, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B |f - f_n| \, d\lambda = 0.$$

Remarque 4.2 L'hypothèse de domination ci-dessus équivaut à supposer que la fonction mesurable positive $h := \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n|$ est intégrable.

En effet, on a $|f_n| \leq h$ pour tout entier n . Si h est intégrable, on peut donc choisir $g = h$ pour dominer les f_n . Réciproquement, si une fonction intégrable positive g domine toutes les f_n , on a $|f_n| \leq g$ pour tout n et donc la fonction mesurable positive $h := \sup |f_n| \leq g$ est également intégrable.

Cependant, dans la pratique, il ne sera pas toujours facile de déterminer la fonction $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n|$. Nous serons alors amenés à majorer plus largement la famille de fonctions $(|f_n|, n \in \mathbb{N})$. Il faudra bien vérifier que le majorant choisi est intégrable pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée !

Preuve du théorème 4.1 La fonction f est mesurable, comme limite de la suite de fonctions mesurables $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

La domination $|f_n| \leq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ passe à la limite quand $n \rightarrow \infty$ pour donner $|f| \leq g$. Puisque g est intégrable, chacune des fonctions f_n ainsi que la limite f sont donc intégrables (proposition 3.11).

Introduisons la suite de fonctions mesurables positives définies par $h_n := \sup_{k \geq n} |f - f_k|$ (pour $n \in \mathbb{N}$). La suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge simplement vers 0. Elle satisfait l'encadrement $0 \leq h_n \leq 2g$. La suite des intégrales $I_n = \int h_n d\lambda$ est décroissante et positive, elle admet donc une limite. En un premier temps, nous allons voir que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n d\lambda = 0$. Nous en déduirons ensuite facilement le théorème.

La suite de fonctions $(2g - h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives, qui converge simplement vers $2g$. Appliquons lui le théorème de convergence monotone ! Il vient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B (2g - h_n) d\lambda = \int_B 2g d\lambda.$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B h_n d\lambda = 0$ comme annoncé.

Par définition de h_n , on a $0 \leq |f - f_n| \leq h_n$, donc la monotonie de l'intégrale assure que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B |f - f_n| d\lambda = 0$. La linéarité de l'intégrale et l'inégalité triangulaire

$$\left| \int_B f d\lambda - \int_B f_n d\lambda \right| = \left| \int_B (f - f_n) d\lambda \right| \leq \int_B |f - f_n| d\lambda$$

nous donnent enfin la convergence des intégrales $\int_B f_n d\lambda \rightarrow \int_B f d\lambda$ lorsque $n \rightarrow \infty$. $\square$

Remarque 4.3 Le lecteur attentif se sera rendu compte que cette preuve ressemble à celle du lemme de Fatou. De fait, le théorème de convergence dominée peut se démontrer directement en appliquant le lemme de Fatou (version complète 2.23) à la suite de fonctions positives $2g - |f - f_n|$. Nous avons préféré nous passer de la notion de limite inférieure (elle est cachée sous le tapis) et écrire une preuve qui ne fait appel qu'au théorème de convergence monotone.

Remarque 4.4 La difficulté, lorsqu'on cherche à appliquer ce théorème, est de vérifier la convergence de la suite mais, surtout, de trouver une fonction g "qui domine" (c'est-à-dire qui majore) toutes les fonctions f_n de la suite, et qui est intégrable (d'où l'importance de connaître notamment les résultats de la section 3.G : fonctions de référence, et comparaison de fonctions).

On peut maintenant généraliser le résultat de la proposition 3.19 à des suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non monotones.

Corollaire 4.5 Soient $]a, b[\subset \mathbb{R}$ un intervalle (borné, ou non borné) et $f \in \mathcal{L}^1(]a, b[)$ une fonction intégrable sur cet intervalle.

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels tels que $a \leq a_n \leq b_n \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $a_n \rightarrow a$ et $b_n \rightarrow b$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Alors on a l'égalité

$$\int_{]a, b[} f \, d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{]a_n, b_n[} f \, d\lambda.$$

Autrement dit, on a

$$\int_{]a, b[} f \, d\lambda = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \int_{]x, y[} f \, d\lambda.$$

Pour mémoire, rappelons lorsque f est définie sur l'intervalle fermé $[a, b]$, l'égalité $\int_{]a, b[} f \, d\lambda = \int_{[a, b]} f \, d\lambda$: il n'y a donc pas à s'inquiéter de savoir si on intègre sur des intervalles fermés ou ouverts (proposition 3.11).

Preuve On introduit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $f_n = f \mathbb{1}_{]a_n, b_n[}$. Cette suite converge simplement vers f , et elle est dominée par f , supposée intégrable. Le résultat annoncé est donc conséquence du théorème de convergence dominée. $\square$

Exercice 4.6 Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ une fonction intégrable. On introduit, pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $A_n := \{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x)| \leq n\}$ et la fonction tronquée $f_n := f \mathbb{1}_{A_n}$.

1. On suppose dans un premier temps que f est à valeurs positives.
Le théorème de convergence monotone s'applique-t-il à la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Si oui, que dit-il ?
2. On revient à $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Montrer que $\int f_n \, d\lambda \rightarrow \int f \, d\lambda$.

Exercice 4.7 On introduit les suites de fonctions mesurables respectivement définies par $f_n = \mathbb{1}_{[n, \infty[}$, $g_n = \mathbb{1}_{[n, n+1]}$, $h_n = \mathbb{1}_{[0, 1/n]}$, $j_n : x \rightarrow (1/x) \mathbb{1}_{]0, 1/n]}$ (x), $k_n : x \rightarrow (1/\sqrt{x}) \mathbb{1}_{]0, 1/n]}$ (x) ou encore $\ell_n = n \mathbb{1}_{]0, 1/n^2]}$ ($n \in \mathbb{N}$).

1. Montrer que chaque suite converge simplement, et déterminer sa limite.
2. Décider, pour chacune de ces suites, si le théorème de convergence dominée s'applique.

Exercice 4.8 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors, pour toutes suites de réels $x_n \rightarrow -\infty$ et $y_n \rightarrow +\infty$, on a

$$\int f \, d\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[x_n, y_n]} f \, d\lambda.$$

Autrement dit, on a

$$\int f \, d\lambda = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \int_{[x, y]} f \, d\lambda.$$

Exercice 4.9 Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction mesurable définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n$ lorsque $0 \leq t < n$ et $f_n(t) = 0$ sinon.

1. En utilisant la fonction logarithme, montrer que $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}$ pour tous $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer que chaque fonction f_n est intégrable.
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\lambda$.

Revenons maintenant sur l'exercice 3.12, que nous avons traité de façon très élémentaire. Dans l'exercice suivant, on retrouve ce résultat en utilisant le théorème de convergence dominée : le théorème s'applique très facilement sur cet exemple, mais rappelons nous ce qu'il nous a coûté pour le démontrer ! Moralité : lorsque l'on peut faire les choses facilement "à la main", autant se passer d'utiliser un gros théorème...

Exercice 4.10 Retrouver le résultat de l'exercice 3.12 (1) en utilisant théorème de convergence dominée.

B Parties négligeables

On introduit ici la notion de partie négligeable. Ce sont des parties si petites que si l'on modifie une fonction sur un ensemble négligeable, cela ne changera pas la valeur de son intégrale. Cette notion joue un rôle capital dans la théorie de Lebesgue.

Définition 4.11 Partie négligeable.

On dit qu'une partie $A \subset \mathbb{R}$ est négligeable lorsque sa fonction indicatrice est mesurable et d'intégrale nulle, soit $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A d\lambda = 0$.

Il faut penser qu'une partie $A \subset \mathbb{R}$ est négligeable lorsqu'elle est de "longueur" nulle. Mais pour définir la "longueur" d'une partie de $\mathbb{R}$ qui est un peu compliquée, c'est toute une histoire.

Nous verrons en effet au chapitre 9 que, pour définir ce qu'est une fonction mesurable puis son intégrale, il faut tout d'abord définir ce que sont les parties mesurables et leurs mesures. Ces notions seront liées par la propriété suivante.

Propriété 4.12 Mesure d'une partie mesurable.

Une partie A de $\mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si sa fonction indicatrice $\mathbb{1}_A : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ est une fonction mesurable.

Dans ce cas, la mesure de A vérifie $\lambda(A) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A d\lambda$.

Les définitions précises de parties et de fonctions mesurables seront données en 9.3 et en 9.22. Cela dit, toutes les parties de $\mathbb{R}$ que vous pourrez imaginer seront mesurables (revoir si besoin le paragraphe 3.A).

On peut alors donner une définition équivalente des parties négligeables.

Définition 4.13 Partie négligeable (bis). *Une partie mesurable A est négligeable lorsqu'elle est de mesure nulle, soit $\lambda(A) = 0$.*

Une propriété fondamentale des parties négligeables est leur stabilité par unions dénombrables.

Lemme 4.14 Union de négligeables.

Une union finie ou dénombrable de parties négligeables est négligeable.

Preuve Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de parties négligeables de $\mathbb{R}$. On veut montrer que la réunion $A := \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est également négligeable.

Cette propriété est une conséquence immédiate de l'un des axiomes qui interviennent dans la définition des mesures 9.10 (σ -additivité).

Cependant, une fois traduit en termes d'intégrales (propriété 4.12), on la retrouve comme cas particulier du corollaire 2.14, en prenant $u_n = \mathbb{1}_{A_n}$. En effet, puisque les parties A_n sont négligeables, les fonctions mesurables positives u_n sont toutes d'intégrale nulle, donc leur somme $u := \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est également d'intégrale nulle. Puisque $\mathbb{1}_A \leq u$, la croissance de l'intégrale assure que la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ est d'intégrale nulle, c'est-à-dire que A est négligeable. $\square$

Exemple 4.15 Un singleton est négligeable. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est dénombrable donc négligeable.

Par contre une union quelconque de parties négligeables ne l'est plus forcément. Chaque singleton dans $\mathbb{R}$ est négligeable, mais $\mathbb{R}$ ne l'est pas !

Un sous-ensemble (mesurable) d'une partie négligeable est encore une partie négligeable.

Un intervalle non réduit à un point n'est pas négligeable.

Il existe des parties négligeables de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas dénombrables.

Lemme 4.16 *L'intersection décroissante d'une suite de compacts non vides $K_n \subset \mathbb{R}$ est un compact non vide.*

Preuve Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts, c'est-à-dire avec $K_{n+1} \subset K_n \subset \mathbb{R}$. On suppose que chacun de ces compacts est non vide, et on veut montrer que $K = \cap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ est un compact non vide de $\mathbb{R}$.

On choisit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, un élément $x_n \in K_n$. La suite de compacts étant décroissante, on a $x_p \in K_n$ pour tout $p \geq n$.

La suite (x_n) vivant dans le compact K_0 , elle possède une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $\alpha \in K_0$. Mieux, puisqu'à partir du rang n on a

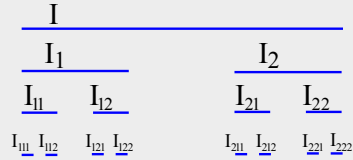
$x_p \in K_n$, on observe que $\alpha \in K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc que $\alpha \in K$. Ceci assure que K est non vide.

Pour montrer que K est compact, on considère une suite (z_n) d'éléments de K . Puisque $K \subset K_0$ avec K_0 compact, la suite (z_n) possède une suite extraite $(z_{\varphi(n)})$ qui converge vers $\alpha \in K_0$. Cette suite extraite $(z_{\varphi(n)})$ est également à valeurs dans le compact K_p pour tout $p \in \mathbb{N}$ (car à valeurs dans K), ce qui assure que $\alpha \in K_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et donc finalement que $\alpha \in K$.

Exemple 4.17 L'ensemble triadique de Cantor.

On part du compact $K_0 = [0, 1]$. On construit alors le compact $K_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ en ôtant le tiers médian de l'intervalle K_0 .

On réitère la construction, de sorte que le compact K_n ($n \geq 1$) est constitué de 2^n intervalles disjoints, chacun de longueur $(1/3)^n$, qu'on appelle les intervalles de n -ième génération.



Le compact K_{n+1} est obtenu en ôtant, de chacun des intervalles de n -ième génération, son tiers médian. Le Cantor $1/3$ est alors défini comme l'intersection $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Comme intersection décroissante de compacts non vides, c'est un compact non vide.

De plus, puisque $\int \mathbb{1}_{K_n} d\lambda = (2/3)^n$ pour tout $n \geq 0$, il vient que $\int \mathbb{1}_C d\lambda \leq (2/3)^n$ pour tout $n \geq 0$, et donc que C est négligeable.

Il reste à voir que C n'est pas dénombrable. Pour cela, apposons des étiquettes sur les intervalles de n -ième génération, comme sur le dessin. Les intervalles de n -ième génération sont alors en bijection avec l'ensemble $\{1, 2\}^n$.

En utilisant le lemme 4.16, on montre alors que C est en bijection avec le produit infini $\{1, 2\}^{\mathbb{N}}$ (se donner un point de C , c'est en effet prendre l'intersection d'une suite décroissante d'intervalles $(J_0, J_1, \dots, J_n, \dots)$ où J_n est un intervalle de n -ième génération. Le procédé diagonal évoqué à la proposition 1.57 permet de montrer que ce produit infini $\{1, 2\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Définition 4.18 Propriété vraie presque partout.

On dira qu'une propriété est vérifiée presque partout (p.p.) si elle est vraie en dehors d'un ensemble négligeable.

Exemple 4.19 Une fonction mesurable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est nulle p.p. lorsque l'ensemble (mesurable) $A := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$ est négligeable.

Deux fonctions mesurables $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont égales p.p. lorsque l'ensemble (mesurable) $B := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\}$ est négligeable.

Enonçons deux propriétés élémentaires faisant intervenir cette notion.

Proposition 4.20 *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive.*

1. *Si l'intégrale de f est finie, alors f prend des valeurs finies p.p.*
2. *L'intégrale de f est nulle si et seulement si $f = 0$ p.p.*

Preuve 1. Introduisons l'ensemble $B := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = \infty\}$. C'est une partie mesurable de $\mathbb{R}$. Soit $g = \infty \mathbb{1}_B$ la fonction mesurable qui vaut $+\infty$ sur B et qui est nulle hors de B . Par construction on a $g \leq f$, d'où

$$\infty \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f d\lambda < \infty$$

par croissance de l'intégrale. Il suit que B est négligeable.

2. Introduisons $A := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$. C'est une partie mesurable de $\mathbb{R}$.

• Supposons pour commencer que f est nulle presque partout, c'est-à-dire que A est négligeable. On a alors par croissance de l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} \infty \mathbb{1}_A d\lambda = \infty \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A d\lambda = \infty 0 = 0.$$

• Réciproquement, si l'intégrale de f est nulle, chaque ensemble

$$A_n := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 1/n\}$$

est négligeable puisque $(1/n) \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_n} d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f d\lambda = 0$, et donc $A = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ est également négligeable d'après le lemme 4.14. $\square$

Remarque 4.21 La réciproque de l'assertion 1. dans 4.20 est évidemment fausse. Par exemple, la fonction $\mathbb{1} : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ constante égale à 1 est finie en tout point, mais son intégrale vaut $+\infty$!

On va maintenant voir qu'il suffit de connaître une fonction presque partout pour connaître son intégrale.

Proposition 4.22 *Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions mesurables.*

On suppose que $f = g$ p.p. Alors f est intégrable si et seulement si g l'est. Dans ce cas, leurs intégrales $\int f d\lambda = \int g d\lambda$ sont égales.

Preuve Si f et g coïncident en dehors de l'ensemble négligeable N , on a

$$||f| - |g|| \leq |f - g| \leq \infty \mathbb{1}_N.$$

Puisque N est négligeable, la fonction $\infty \mathbb{1}_N$ est intégrable, d'intégrale nulle. Par monotonie de l'intégrale, il suit que $\int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda = \int_{\mathbb{R}} |g| d\lambda$ donc f est intégrable si et seulement si g l'est. Dans ce cas, l'inégalité triangulaire assure que $0 \leq |\int_{\mathbb{R}} (f - g) d\lambda| \leq \int_{\mathbb{R}} |f - g| d\lambda \leq 0$, d'où le résultat. $\square$

- Exercice 4.23** 1. Soient $f_i, g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ des fonctions mesurables ($i = 1, 2$) telles que $f_1 = f_2$ p.p. et $g_1 = g_2$ p.p. Montrer que $f_1 + g_1 = f_2 + g_2$ p.p. et $f_1 g_1 = f_2 g_2$ p.p.
2. Soit $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$. Montrer que f est également intégrable sur chacun des intervalles $[a, b[,]a, b]$ et $]a, b[$, et qu'on a les égalités

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_{[a,b[} f d\lambda = \int_{]a,b]} f d\lambda = \int_{]a,b[} f d\lambda.$$

Exercice 4.24 Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions continues. On suppose que $f = g$ p.p. Démontrer que $f = g$. (Voir également l'exercice 8.5).

Nous sommes maintenant prêts à énoncer la forme définitive du théorème de convergence dominée. Dans ce nouvel énoncé, plus général, les hypothèses de convergence et de domination sont seulement valables presque partout.

Théorème 4.25 Théorème de convergence dominée.

Soit $B \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable. Soit $f_n : B \rightarrow \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables. On suppose qu'il existe un ensemble négligeable $N \subset B$ tel que :

- **convergence** : la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ en tout point de $B \setminus N$;
- **domination** : il existe une fonction positive $g : B \rightarrow [0, +\infty]$ intégrable telle qu'on ait la domination $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in B \setminus N$.

Alors chacune des fonctions f_n , ainsi que la limite f , est une fonction intégrable, et

$$\int_B f d\lambda = \int_B \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_B f_n d\lambda \right).$$

Mieux, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B |f_n - f| d\lambda = 0.$$

Définition 4.26 Domination.

Soient $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur B mesurable, et $g : B \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction intégrable. On dit que g domine f si $|f| \leq g$ p.p.

Preuve du théorème de convergence dominée. On se ramène sans effort à la première version du théorème de convergence dominée, en constatant qu'on peut simplement oublier ce qui se passe sur l'ensemble négligeable N !

Introduisons en effet les fonctions tronquées $\tilde{f} := f \mathbf{1}_{cN}$ (qui vaut 0 sur N et est égale à f sur le complémentaire cN), et $\tilde{f}_n := f_n \mathbf{1}_{cN}$ ($n \in \mathbb{N}$). Ce sont encore des fonctions mesurables et on a pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{f}_n = f_n$ p.p. et $\tilde{f} = f$ p.p.

La suite $(\tilde{f}_n)$ satisfait maintenant les hypothèses du théorème 4.1 : elle converge partout vers $\tilde{f}$, et est dominée en chaque point et pour tout n par la fonction intégrable g . On a donc

$$\int_B \tilde{f}_n d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_B \tilde{f} d\lambda.$$

Puisque $\int_B \tilde{f}_n d\lambda = \int_B f_n d\lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\int_B \tilde{f} d\lambda = \int_B f d\lambda$, il vient comme annoncé

$$\int_B f_n d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_B f d\lambda.$$

□

Remarque 4.27 Vous pourrez également voir les hypothèses du théorème de convergence dominée formulées comme suit dans la littérature.

Théorème Soient $B \subset \mathbb{R}$ mesurable, et $f_n : B \rightarrow \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que l'on a :

- **convergence p.p.** : la suite (f_n) converge p.p. vers une fonction $f : B \rightarrow \mathbb{C}$;
- **domination** : il existe une fonction positive intégrable $g : B \rightarrow [0, +\infty]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait la domination $|f_n| \leq g$ p.p.

Alors, on a les conclusions du théorème 4.25.

Examinons cette nouvelle formulation.

L'hypothèse de convergence p.p. signifie qu'il existe une partie négligeable $A \subset B$ telle que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour tout $x \in B \setminus A$.

L'hypothèse de domination énoncée ici signifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une partie négligeable A_n tel que $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout $x \in B \setminus A_n$.

Observons alors que $N := A \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, comme union dénombrable de parties négligeables, est une partie négligeable de B et que les hypothèses du théorème 4.25 sont satisfaites pour cette partie N . Ce nouvel énoncé est donc équivalent à celui de 4.25.

Exercice 4.28 Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |x| < 1$ par $f_n(x) = (\sin(\frac{1}{x}))^n$, et par $f_n(x) = 0$ sinon

1. Montrer que chacune des fonctions f_n (pour $n \in \mathbb{N}$) est intégrable.
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 en dehors d'un ensemble négligeable $N \subset \mathbb{R}$ que l'on explicitera.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge lorsque $n \rightarrow \infty$, et identifier sa limite.

C Intégrales dépendant d'un paramètre

On utilise maintenant le théorème de convergence dominée pour étudier les intégrales dépendant d'un paramètre.

Théorème 4.29 Continuité sous l'intégrale.

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $h : I \times B \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction, où $B \subset \mathbb{R}$ est une partie mesurable de $\mathbb{R}$. On suppose que :

1. pour tout $x \in I$, la fonction $t \in B \mapsto h(x, t) \in \mathbb{C}$ est intégrable ;
2. pour tout $t \in B$, la fonction $x \in I \mapsto h(x, t) \in \mathbb{C}$ est continue ;
3. il existe une fonction positive intégrable $g \in \mathcal{L}^1(B)$ telle qu'on ait la domination $|h(x, t)| \leq g(t)$ pour tout $x \in I$ et tout $t \in B$.

Alors, la fonction $H : x \in I \mapsto \int_B h(x, t) d\lambda(t) \in \mathbb{C}$ est bien définie, et elle est continue.

Remarque 4.30 Dans la pratique, $B \subset \mathbb{R}$ sera bien souvent un intervalle !
La première hypothèse est conséquence de la troisième.

Preuve Pour tout $x \in I$, la fonction définie par $t \in B \mapsto h(x, t) \in \mathbb{C}$ est intégrable (hypothèse 1.). La fonction H est donc bien définie.

Nous allons montrer que H est continue au point x_0 en utilisant le critère séquentiel de continuité 1.43. On se donne donc une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans I qui converge vers x_0 , et l'on veut montrer que la suite $(H(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $H(x_0)$. Cette propriété résulte immédiatement du théorème de convergence dominée 4.25 que l'on applique à la suite de fonctions définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $f_n : t \in B \mapsto h(y_n, t) \in \mathbb{C}$. En effet, on a :

- **convergence** : On introduit la fonction $f : t \in B \mapsto h(x_0, t) \in \mathbb{C}$. D'après l'hypothèse 2., la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f en tout point $t \in B$.
- **domination** : L'hypothèse 3. assure qu'on a $|f_n(t)| \leq g(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in B$, avec g intégrable positive.

Les hypothèses du théorème de convergence dominée étant satisfaites, on a $H(y_n) := \int_B f_n d\lambda \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_B f d\lambda =: H(x_0)$: ce qu'on voulait. $\square$

Le corollaire suivant se déduit sans peine du théorème 4.29 : il suffit en effet d'oublier la partie négligeable N , et donc d'intégrer uniquement sur $B' = B \setminus N$. On laisse au lecteur le soin d'écrire les détails si besoin.

Corollaire 4.31 Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $h : I \times B \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction, où $B \subset \mathbb{R}$ est une partie mesurable de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. On suppose qu'il existe un ensemble négligeable $N \subset B$ tel que :

1. pour tout $x \in I$, la fonction $t \in B \mapsto h(x, t) \in \mathbb{C}$ est intégrable ;
2. pour tout $t \notin N$, la fonction $x \in I \mapsto h(x, t) \in \mathbb{C}$ est continue en x_0 ;
3. il existe une fonction positive intégrable $g \in \mathcal{L}^1(B)$ telle qu'on ait la domination $|h(x, t)| \leq g(t)$ pour tout $x \in I$ et tout $t \notin N$.

Alors, la fonction

$$H : x \in I \mapsto \int_B h(x, t) d\lambda(t) \in \mathbb{C}$$

est bien définie et elle est continue en x_0 .

Exercice 4.32 Intégrale fonction de la borne. Soit $f \in \mathcal{L}^1$.

1. Montrer que la fonction $F : x \in [0, \infty[\mapsto \int_{[0, x]} f d\lambda \in \mathbb{R}$ est bien définie.
2. Montrer que F est continue sur $[0, \infty[$.
On écrira F sous forme d'une intégrale dépendant d'un paramètre, soit

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x, t) d\lambda(t) \quad \text{où} \quad h(x, t) = f(t) \mathbb{1}_{[0, x]}(t).$$

Un prochain chapitre sera consacré à la transformée de Fourier. On peut cependant s'y intéresser dès maintenant.

Exercice 4.33 Transformée de Fourier. Soit $f \in \mathcal{L}^1$ une fonction intégrable.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto f(t)e^{-itx} \in \mathbb{C}$ est intégrable.
2. Montrer que la transformée de Fourier $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itx} d\lambda(t)$ est une fonction continue.

Nous allons maintenant passer au théorème de dérivation sous le signe intégrale. Comme il va s'agir de dériver, on doit maintenant supposer que I est un intervalle ouvert.

Théorème 4.34 Dérivabilité sous l'intégrale.

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $B \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable et une fonction $h : I \times B \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que :

1. pour tout $x \in I$, la fonction $t \in B \mapsto h(x, t) \in \mathbb{C}$ est intégrable ;
2. pour tout $t \in B$, la fonction $x \in I \mapsto h(x, t) \in \mathbb{C}$ est de classe C^1 ;
3. il existe une fonction intégrable $g \in \mathcal{L}^1(B)$ telle que, pour tout $x \in I$ et tout $t \in B$, on ait la domination $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq g(t)$.

Alors, la fonction

$$H : x \in I \mapsto \int_B h(x, t) d\lambda(t) \in \mathbb{C}$$

est bien définie, de classe C^1 , et pour tout $x \in I$ on peut calculer sa dérivée :

$$H'(x) = \int_B \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) d\lambda(t).$$

En d'autres termes, on peut "dériver sous l'intégrale". Il suit que la fonction H est continue.

Exercice 4.35 Utiliser le théorème de dérivation sous l'intégrale pour montrer que la fonction définie par $H : x \in]0, +\infty[\mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-xt^2} d\lambda(t) \in \mathbb{R}$ est de classe C^1 , et exprimer sa dérivée sous forme d'une intégrale. On commencera par étudier H sur des intervalles $]a, +\infty[$, avec $0 < a$.

Retrouver simplement ce résultat en exprimant H à l'aide de $I_0 = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} d\lambda(t)$ (on utilisera les propriétés d'invariance de l'intégrale).

Preuve L'hypothèse (1) assure que la fonction H est bien définie.

Montrons maintenant la dérivabilité de H . Soit $x_0 \in I$. La fonction H est dérivable au point x_0 avec $H'(x_0) = \alpha$ si et seulement si ses taux d'accroissement au point x_0 , soient

$$\tau_H^{x_0}(x) := \frac{H(x_0) - H(x)}{x_0 - x},$$

convergent vers α lorsque $x \rightarrow x_0$ (avec $x \in I$ et $x \neq x_0$). Pour montrer que c'est bien le cas, nous allons de nouveau utiliser le théorème de convergence dominée.

On choisit donc une suite $y_n \in I \setminus x_0$ qui converge vers x_0 , et l'on introduit cette fois-ci la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n : t \in B \mapsto \frac{h(x_0, t) - h(y_n, t)}{x_0 - y_n} \in \mathbb{C}.$$

Chaque fonction f_n est intégrable comme combinaison linéaire de fonctions intégrables.

Observons que $f_n(t) = \tau_{h(\cdot, t)}^{x_0}(y_n)$ est le taux d'accroissement entre x_0 et y_n de la fonction $x \mapsto h(x, t)$. Par définition du taux d'accroissement et par linéarité de l'intégrale, on a l'égalité

$$\tau_H^{x_0}(y_n) = \int_B f_n(t) d\lambda(t).$$

Convergence : L'hypothèse de dérivabilité (2.) assure que, pour tout $t \in B$, on a $f_n(t) \rightarrow \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, t)$ lorsque $n \rightarrow \infty$: les taux d'accroissement de la fonction $x \mapsto h(x, t)$ convergent vers la dérivée !

Domination : Il s'agit maintenant de dominer les fonctions f_n , c'est-à-dire les taux d'accroissement des fonctions $x \mapsto h(x, t)$ au point x_0 . Du théorème des accroissements finis, puis de la majoration 3., on déduit la domination, valable pour tout $t \in B$:

$$|f_n(t)| = \left| \frac{h(x_0, t) - h(y_n, t)}{x_0 - y_n} \right| \leq \sup_{z \in [x_0, y_n]} \left| \frac{\partial h}{\partial x}(z, t) \right| \leq g(t).$$

Puisque la fonction g est intégrable, le théorème de convergence dominée s'applique à la suite (f_n) pour montrer que

$$\tau_H^{x_0}(y_n) = \int_B f_n(t) d\lambda(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_B \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, t) d\lambda(t).$$

Ainsi H est bien dérivable au point x_0 , avec $H'(x_0) = \int_B \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, t) d\lambda(t)$.

Le théorème de continuité sous le signe intégrale s'applique alors pour montrer que la dérivée $x \in I \mapsto H'(x) = \int_B \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) d\lambda(t)$ est continue, i.e. que H est de classe C^1 . En effet, chaque fonction $x \in I \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \in \mathbb{C}$ est continue sur I (pour $t \in B$) et on a la domination (3). $\square$

Remarque 4.36 Si l'on remplace, dans l'énoncé de 4.34, l'hypothèse 2. par

2' pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \in I \mapsto h(t, x) \in \mathbb{R}$ est dérivable

le théorème 4.29 assure simplement que H est dérivable.

5. Intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

Nous commençons par définir l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Puis nous énonçons sans démonstration les théorèmes de Fubini, et de changement de variable pour les intégrales multiples, qui donnent des méthodes pratiques pour le calcul de ces intégrales.

- Les propriétés de l'intégrale sur $\mathbb{R}^n$ des fonctions mesurables positives [5.1](#) ou bien intégrables [5.3](#).
- Les théorèmes de convergence monotone, de Fatou, de convergence dominée, de continuité et dérivabilité sous l'intégrale (mêmes énoncés qu'en dimension 1).
- La notion d'ensemble négligeable.
- La définition de l'intégrale d'une fonction définie presque partout [5.8](#).
- Le théorème de Fubini-Tonelli [5.11](#)
- Le théorème de Fubini [5.17](#).
- Le théorème du changement de variables pour les intégrales multiples [5.28](#).
- Les propriétés d'invariance de l'intégrale [5.32](#) en dimension quelconque.
- Le passage en coordonnées polaires [5.29](#).

A Intégration dans $\mathbb{R}^n$

A.1 Fonctions positives

Nous admettrons qu'on sait définir, comme en dimension 1, l'intégrale de Lebesgue pour les fonctions mesurables positives $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$. Elle satisfait les mêmes propriétés qu'en dimension 1, que nous rappelons ci-dessous brièvement. Seule la condition de normalisation doit être modifiée par rapport à l'énoncé 2.4 : on ne prescrit plus la longueur des intervalles, mais la "mesure" (qui sera une "surface" en dimension 2, un "volume" en dimension 3 etc...) des pavés n -dimensionnels.

Théorème 5.1 Intégrale des fonctions positives sur $\mathbb{R}^n$.

Il existe une application qui, à une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ mesurable positive, associe son "intégrale de Lebesgue"

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) d\lambda(x_1, \dots, x_n).$$

Cette intégrale est :

1. **Normalisée :** pour tout pavé $P := \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$, l'intégrale de sa fonction indicatrice vaut $\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_P d\lambda = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.
2. **Croissante.**
3. **Positivement linéaire.**

Elle satisfait le théorème de

Convergence monotone : si $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante (c'est-à-dire avec $f_p \leq f_{p+1}$) de fonctions mesurables positives $f_p : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$, alors sa limite $f := \lim f_p = \sup f_p : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ est mesurable positive et on peut échanger limite et intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{p \rightarrow +\infty} f_p d\lambda = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_p d\lambda.$$

Comme en dimension 1, une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ (de même que sa restriction à une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$, par exemple un ouvert ou un fermé de $\mathbb{R}^n$) est mesurable.

A.2 Fonctions à valeurs réelles ou complexes

Une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si $\int_{\mathbb{R}^n} |f| d\lambda < \infty$, et l'on définit alors son intégrale en passant par l'intermédiaire de ses parties positives et négative (revoir la définition 3.2), soit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ d\lambda - \int_{\mathbb{R}^n} f^- d\lambda.$$

De même pour les fonctions à valeurs complexes, en passant par les parties réelle et imaginaire.

Une fonction mesurable $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur une partie mesurable $B \subset \mathbb{R}^n$ est intégrable lorsque son prolongement $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ par 0 est intégrable, et on définit alors $\int_B f d\lambda := \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f} d\lambda$.

Exemple 5.2 Soient $P := \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$ un pavé, et $f : P \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors f est bornée. Il suit qu'elle est intégrable sur P .

Proposition 5.3 Propriétés de l'intégrale de Lebesgue (2).

Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ une partie mesurable. On désignera par $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(B)$, ou plus simplement $\mathcal{L}^1(B)$, l'ensemble des fonctions $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont intégrables. On notera en particulier $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

1. L'ensemble $\mathcal{L}^1(B)$ est naturellement un **espace vectoriel** sur $\mathbb{C}$.
2. L'intégrale $I : f \in \mathcal{L}^1(B) \rightarrow \int_B f d\lambda \in \mathbb{C}$ est une **application $\mathbb{C}$ -linéaire** sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}^1$.
3. L'intégrale vérifie l'**inégalité triangulaire** : pour $f \in \mathcal{L}^1(B)$, on a

$$\left| \int_B f d\lambda \right| \leq \int_B |f| d\lambda.$$

Preuve Reprendre mot pour mot la démonstration donnée en dimension 1 (propositions 3.6 et 3.9). $\square$

L'intégrale de Lebesgue en dimension n vérifie le théorème de convergence dominée qui se déduit, comme en dimension 1, du théorème de convergence monotone. Énonçons la version sans partie négligeable.

Théorème 5.4 Théorème de convergence dominée.

Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ mesurable. Soient $f_p : B \rightarrow \mathbb{C}$ ($p \in \mathbb{N}$) des fonctions mesurables. Supposons qu'on ait :

- **convergence** : la suite de fonctions $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ en tout point de B ;
- **domination** : il existe une fonction positive $g : B \rightarrow [0, +\infty]$ intégrable telle qu'on ait la domination $|f_p(x)| \leq g(x)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in B$.

Alors chacune des fonctions f_p , ainsi que la limite f , est intégrable et

$$\int_B f d\lambda = \int_B \left(\lim_{p \rightarrow \infty} f_p \right) d\lambda = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_B f_p d\lambda \right).$$

Mieux, on a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_B |f_p - f| d\lambda = 0.$$

On en déduit, comme avant, les théorèmes de continuité et de dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre. Nous vous laissons le soin de les énoncer.

A.3 Parties négligeables dans $\mathbb{R}^n$

Nous commençons par revenir sur la notion de partie négligeable, cette fois-ci dans $\mathbb{R}^n$, et avec quelques nouveaux exemples. La définition est la même...

Définition 5.5 Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ une partie mesurable.

On dit que A est négligeable lorsque $\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A d\lambda = 0$.

Exemple 5.6 Comme en dimension 1, une réunion finie ou dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.

Un singleton $\{x_0\} \subset \mathbb{R}^n$ est négligeable. De même, un segment parallèle à un axe de coordonnées, comme $S_1(a, b) = [a, b] \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}$, est négligeable lorsque $n \geq 2$. Dans les deux cas, il s'agit de pavés (avec un ou plusieurs côtés de longueur nulle) !

Une droite de coordonnées, par exemple $D_1 = \{(t, 0, \dots, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est négligeable lorsque $n \geq 2$. Il suffit d'écrire $D_1 = \cup_{n \in \mathbb{N}} S_1(-n, n)$.

Attention, un segment non réduit à un point n'est pas négligeable dans $\mathbb{R}$!

Pour démontrer qu'un segment quelconque est négligeable dans $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$, on s'en tire comme suit avec les moyens du bord. Le théorème de Fubini nous permettra bientôt de trivier le résultat (exercice 5.14).

Exercice 5.7 1. Soit le segment $\sigma = \{(t, t) \mid t \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^2$.

- (a) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'on peut recouvrir σ par la réunion de p carrés de côtés $1/p$ (faire un dessin!).
- (b) En déduire que σ est négligeable.

2. Montrer de même qu'un segment quelconque $S \subset \mathbb{R}^n$ est négligeable dans $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$.

3. En déduire qu'une droite $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ est négligeable dans $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$.

La théorie de l'intégration de Lebesgue nous amène naturellement à intégrer des fonctions qui ne sont définies que presque partout, c'est-à-dire en dehors d'un ensemble négligeable (voir notamment le théorème de Fubini 5.17).

Définition 5.8 Soit $n \geq 1$. Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ une partie mesurable.

On dira que "la fonction mesurable f est définie presque partout sur B " lorsqu'il existe une partie négligeable $N \subset B$ telle que f soit définie (et mesurable) sur $B \setminus N$.

Lorsque f est à valeurs positives, on définit alors $\int_B f d\lambda = \int_{B \setminus N} f d\lambda$.

Lorsque f est à valeurs complexes, on dit que la fonction f définie p.p. est intégrable sur B lorsque $\int_{B \setminus N} |f| d\lambda < \infty$ et on définit $\int_B f d\lambda = \int_{B \setminus N} f d\lambda$.

Remarque 5.9 La notation $\int_B f d\lambda$ est ici quelque peu abusive, la fonction $f : B \setminus N \rightarrow \mathbb{C}$ n'étant pas définie aux points de N . Mais cette notation présente l'avantage de ne pas faire référence à la partie négligeable N , qui ne nous intéressera généralement pas.

Il faut quand même s'assurer que la définition de l'intégrale d'une fonction définie presque partout n'est pas ambiguë. Supposons pour fixer les idées que f , définie presque partout sur B , soit à valeurs positives. La fonction f est donc définie sur $B \setminus N$, où $N \subset B$ est négligeable. Si N_1 est une autre partie négligeable de B , telle que $N \subset N_1$, la fonction f est a fortiori définie sur N_1 et la proposition 4.22 assure que $\int_{B \setminus N} f d\lambda = \int_{B \setminus N_1} f d\lambda$. Nous formaliserons tout ceci au chapitre 8 où nous introduirons les espaces L^1 puis L^p pour $p \geq 1$.

Voici un exemple très naturel, où apparaît une fonction définie presque partout.

Exemple 5.10 Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par $f_n(x) = (\cos x)^n$ (pour $n \in \mathbb{N}$). La fonction $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ est définie presque partout (en tous les points tels que $\cos x \neq -1$, c'est-à-dire lorsque $x \in \mathbb{R} \setminus N$ où N est la partie dénombrable $N = \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$).

L'objet des deux paragraphes suivants est de donner des méthodes pour calculer les intégrales n -dimensionnelles.

B Les théorèmes de Fubini

Les théorèmes de Fubini permettent de ramener le calcul d'une intégrale en plusieurs variables à une succession d'intégrales en dimension 1 (pour lesquelles on dispose notamment des méthodes expliquées en 3.18).

Pour simplifier les notations, nous n'exposerons ces résultats qu'en dimension 2. La généralisation à la dimension n est immédiate : pour calculer une intégrale sur $\mathbb{R}^n$, on intègre n fois en dimension 1 en choisissant comme on veut l'ordre dans lequel on fait apparaître les n coordonnées.

On commence (comme toujours !) par traiter le cas des fonctions positives.

Théorème 5.11 Théorème de Fubini-Tonelli.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. Alors, les trois expressions suivantes ont un sens et on a l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda(y) \right) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda(x) \right) d\lambda(y). \quad (5.1)$$

Cela signifie implicitement que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction définie par $f_x : y \in \mathbb{R} \rightarrow f(x, y) \in [0, +\infty]$ est mesurable, puis que la fonction définie par $x \in \mathbb{R} \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f_x d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda(y) \in [0, +\infty]$ est mesurable.

Exercice 5.12 On se donne $A := \{a\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ ($a \in \mathbb{R}$) ou, plus généralement, $A = N \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ où $N \subset \mathbb{R}$ est une partie négligeable. Montrer que $A \subset \mathbb{R}^2$ est lui-même négligeable, c'est-à-dire que l'intégrale de sa fonction indicatrice est nulle :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_A = 0.$$

Exercice 5.13 Soient $n \geq 2$ et $P := \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$ un pavé. Retrouver, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli et la normalisation de 2.4, la valeur de l'intégrale de la fonction indicatrice du pavé, soit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_P = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

La normalisation 5.1 est donc bien cohérente avec Fubini-Tonelli, ouf!

Exercice 5.14 Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ une droite. Retrouver le fait que D est négligeable dans $\mathbb{R}^2$ (exercice 5.7), en utilisant cette fois-ci le théorème de Fubini-Tonelli.

Expliquons maintenant sur un exemple comment intégrer une fonction mesurable positive sur une partie de $\mathbb{R}^2$, par exemple un triangle.

Exemple 5.15 Soit le triangle $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x\}$. On cherche à calculer l'intégrale

$$\int_T x d\lambda(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} f \mathbf{1}_T,$$

où $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow x \in \mathbb{R}$. Puisque $f \mathbf{1}_T$ est positive, on peut utiliser le théorème de Fubini-Tonelli pour calculer cette intégrale.

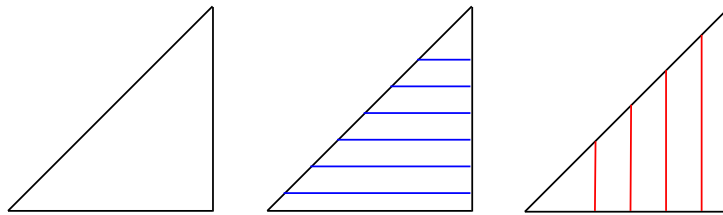


FIGURE 5.1 – Fubini-Tonelli pour un triangle

Avant tout chose on dessine T , et on détermine l'intersection de T avec les droites horizontales (y constant) et verticales (x constant) :

$$T \cap \{y = y_0\} = [y_0, 1] \times \{y_0\} \text{ si } y_0 \in [0, 1], \text{ et est vide sinon}$$

$$T \cap \{x = x_0\} = \{x_0\} \times [0, x_0] \text{ si } x_0 \in [0, 1], \text{ et est vide sinon.}$$

En intégrant “en x à l’intérieur”, on obtient que

$$\begin{aligned} \int_T f &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \mathbb{1}_T(x, y) d\lambda(x) \right) d\lambda(y) = \int_{[0,1]} \left(\int_{[y,1]} f(x, y) d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[y,1]} x d\lambda(x) \right) d\lambda(y) = \int_{[0,1]} \left(\frac{1}{2} - \frac{y^2}{2} \right) d\lambda(y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

En effet $(f\mathbb{1}_T)(x, y)$ est nulle si y est hors de l’intervalle $[0, 1]$, ou bien si $y \in [0, 1]$ et x est hors de l’intervalle $[y, 1]$; elle est égale à $f(x, y)$ sinon (dessin du milieu dans la figure 5.1).

En intégrant “en y à l’intérieur”, on obtient que

$$\begin{aligned} \int_T f &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \mathbb{1}_T(x, y) d\lambda(y) \right) d\lambda(x) = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,x]} f(x, y) d\lambda(y) \right) d\lambda(x) \\ &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,x]} x d\lambda(y) \right) d\lambda(x) = \int_{[0,1]} x^2 d\lambda(x) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

En effet $(f\mathbb{1}_T)(x, y)$ est nulle si x est hors de l’intervalle $[0, 1]$, ou bien si $x \in [0, 1]$ et y est hors de l’intervalle $[0, x]$; elle est égale à $f(x, y)$ sinon (dessin de droite dans la figure 5.1).

Comme prévu par le théorème, les deux options de calcul donnent le même résultat. Dans certains cas, il sera plus judicieux de choisir d’intégrer d’abord en x à l’intérieur, ou bien en y à l’intérieur : il faudra s’inspirer des circonstances.

Exercice 5.16 Aire du triangle.

Dans l’exemple précédent 5.15, prendre $f \equiv 1$ pour obtenir que l’aire du triangle T est $A(T) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_T d\lambda(x, y) = \int_T d\lambda(x, y) = 1/2$.

Passons maintenant à l’intégrale d’une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$. Il faudra bien entendu commencer par montrer que f est intégrable, c’est-à-dire que $\int_{\mathbb{R}^2} |f| d\lambda < \infty$. Pour ce faire, on appliquera souvent (mais pas systématiquement) le théorème de Fubini-Tonelli (5.1) à la fonction $|f|$. Une fois l’intégrabilité de f assurée, on pourra appliquer le théorème de Fubini pour calculer l’intégrale de f .

Théorème 5.17 Théorème de Fubini.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable. Alors :

- Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : y \in \mathbb{R} \rightarrow f(x, y) \in \mathbb{C}$ est intégrable. De plus, la fonction $x \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f_x d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda(y) \in \mathbb{C}$ (qui est définie p.p. sur $\mathbb{R}$) est intégrable.
- Pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $f^y : x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x, y) \in \mathbb{C}$ est intégrable. De plus, la fonction $y \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f^y d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda(x)$ (qui est définie p.p. sur $\mathbb{R}$) est intégrable.

On a alors l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, d\lambda(y) \right) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y). \quad (5.2)$$

Les propriétés • assurent que toutes les expressions qui apparaissent dans (5.2) sont bien définies.

Remarque 5.18 L'hypothèse que f est intégrable est indispensable dans ce théorème. Sinon, l'intégrale de gauche n'est pas définie. Pire (?!), les deux intégrales de droite peuvent exister et avoir des valeurs différentes!

Dans l'illustration simplette de Fubini ci-dessous on constate que, pour une fonction intégrable $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, il peut arriver que les fonctions f_x (resp. f^y) ne soient intégrables que pour presque tout x (resp. presque tout y).

Exemple 5.19 Soit la fonction mesurable $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(1, y) = e^y \sin y$ et $f(x, y) = 0$ si $x \neq 1$.

La fonction f est nulle en dehors de la droite $\{1\} \times \mathbb{R}$, qui est négligeable (exercice 5.12 ou 5.7). Cette fonction est donc intégrable et d'intégrale nulle, soit $\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda = 0$.

La fonction f_x est intégrable si et seulement si $x \neq 1$, donc presque partout, et dans ce cas f_x est la fonction nulle donc $\int f_x(y) \, d\lambda(y) = 0$.

La fonction $x \rightarrow \int f_x(y) \, d\lambda(y)$ est définie presque partout (pour $x \neq 1$), et y est nulle. Cette fonction est donc intégrable et d'intégrale nulle et on a bien $\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_x(y) \, d\lambda(y) \right) d\lambda(x) = 0$.

Pour $y \in \mathbb{R}$, la fonction f^y est nulle p.p. (en l'occurrence sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$), donc elle est intégrable avec $\int f^y(x) \, d\lambda(x) = 0$. On retrouve comme attendu l'égalité $\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^y(x) \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) = 0$.

Exercice 5.20 Fonctions décomposées.

1. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions intégrables. Démontrer que la fonction définie par $F : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow f(x)g(y) \in \mathbb{C}$ est intégrable et calculer $\int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y) \, d\lambda(x, y)$ à l'aide de $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda$ et $\int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda$.
2. Soient $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ des fonctions intégrables ($n \geq 2, 1 \leq i \leq n$). Démontrer que la fonction $F : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \in \mathbb{C}$ est intégrable, et exprimer $\int_{\mathbb{R}^n} f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \, d\lambda(x_1, \dots, x_n)$ à l'aide des intégrales $\int_{\mathbb{R}} f_i \, d\lambda$.

C Le théorème du changement de variable

Nous avons déjà évoqué la formule du changement de variable pour les intégrales en dimension 1 (voir la proposition 3.18). Nous nous intéressons maintenant à la dimension quelconque.

C.1 Rappels de calcul différentiel

Commençons par rappeler brièvement ce que sont une application de classe C^1 et un difféomorphisme (pour plus de détails, on pourra se reporter au cours de Calcul différentiel).

Définition 5.21 Application C^1 , jacobienne, déterminant jacobien.

On note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^n$.

Une application $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 si et seulement si ses composantes φ_i admettent des dérivées partielles $\partial_j \varphi_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ continues (pour $1 \leq i, j \leq n$).

La matrice jacobienne de φ au point x est alors la matrice (n, n) des dérivées partielles en ce point, soit

$$J_x(\varphi) = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_1(x) & \dots & \partial_n \varphi_1(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_1 \varphi_n(x) & \dots & \partial_n \varphi_n(x) \end{pmatrix}.$$

Le déterminant jacobien de φ est la fonction $x \mapsto \det J_x(\varphi)$, continue à valeurs réelles, définie pour $x \in U$ comme le déterminant

$$\det J_x(\varphi) = \det (\partial_j \varphi_i(x))_{1 \leq i, j \leq n}$$

de la matrice jacobienne au point x .

On utilise également la notation $\partial_j \varphi_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$.

Exemple 5.22 Une application linéaire, ou plus généralement polynomiale, est de classe C^1 .

Soient $M \in M_n \mathbb{R}$ et l'application linéaire $\varphi_M : x \in \mathbb{R}^n \mapsto Mx \in \mathbb{R}^n$. La matrice jacobienne de φ_M en chaque point $x \in \mathbb{R}^n$ est $J_x(\varphi_M) = M$.

Exercice 5.23 Démontrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (xy^2 + 1, e^x + y)$ est de classe C^1 , et déterminer sa matrice jacobienne ainsi que son déterminant jacobien en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Définition 5.24 Difféomorphisme.

Soit $n \geq 1$. Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Une application $\varphi : U \rightarrow V$ est un C^1 -difféomorphisme si :

1. φ réalise une bijection entre U et V ;
2. l'application $\varphi : U \rightarrow V$ est de classe C^1 ;
3. l'application réciproque $\varphi^{-1} : V \rightarrow U$ est également de classe C^1 .

Remarque 5.25 Même si cela ne nous sera pas utile ici, rappelons que lorsque $\varphi : U \rightarrow V$ est un C^1 -difféomorphisme, son déterminant jacobien $\det J_x(\varphi)$ est non nul en chaque point $x \in U$.

En effet, on dérive l'expression $\varphi^{-1} \circ \varphi = \text{Id}$, composée de fonctions de classe C^1 , puis on prend le déterminant de l'expression obtenue. On obtient alors que $J_{\varphi(x)}\varphi^{-1} \circ J_x(\varphi) = \text{Id}$, et donc en utilisant la multiplicativité du déterminant :

$$\det J_{\varphi(x)}(\varphi^{-1}) \cdot \det J_x(\varphi) = 1$$

pour tout $x \in U$. Le résultat suit.

L'exemple suivant est élémentaire, mais fondamental.

Proposition 5.26 Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible, c'est-à-dire dont le déterminant est non nul. Alors l'application linéaire associée définie par $\varphi_M : x \in \mathbb{R}^n \rightarrow Mx \in \mathbb{R}^n$ est un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Son jacobien est l'application constante définie par $J_x(\varphi_M) = M$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et le déterminant jacobien en chaque point vaut $\det J_x(\varphi_M) = \det M \neq 0$.

Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, son image $V = \varphi_M(U) \subset \mathbb{R}^n$ est également ouverte, et la restriction $\varphi_M : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme.

C.2 Déterminant et volume

L'intégrale de Lebesgue est reliée à la notion de “volume” : longueur en dimension 1, aire en dimension 2, volume 3-dimensionnel en dimension 3 etc... La formule du changement de variable (théorème 5.28) va faire apparaître un déterminant (le déterminant jacobien du difféomorphisme). Pour comprendre d'où sort ce déterminant, il faut avoir en tête le fait que le déterminant est intimement lié à la notion de volume. C'est, en petite dimension, ce qu'exprime le résultat suivant.

Proposition 5.27 On vient de voir que le déterminant jacobien d'une application linéaire φ_M est constant, on le notera donc $\det J(\varphi_M)$ (sans référence au point où l'on considère la matrice jacobienne).

Dimension 1 : Soit $a \in \mathbb{R}$.

L'image par l'application linéaire $\varphi_a : x \in \mathbb{R} \rightarrow ax \in \mathbb{R}$ du segment $[0, 1]$ (de longueur 1) est un segment de longueur $|a| = |\det J(\varphi_a)|$.

Dimension 2 : Soit $M \in \text{M}_2(\mathbb{R})$.

L'image par l'application linéaire $\varphi_M : x \in \mathbb{R}^2 \rightarrow Mx \in \mathbb{R}^2$ du pavé $[0, 1]^2$ (d'aire 1) est un pavé d'aire $|\det M| = |\det J(\varphi_M)|$.

Dimension 3 : Soit $M \in \text{M}_3(\mathbb{R})$.

L'image par l'application linéaire $\varphi_M : x \in \mathbb{R}^3 \rightarrow Mx \in \mathbb{R}^3$ du pavé $[0, 1]^3$ (de volume 1) est un pavé de volume $|\det M| = |\det J(\varphi_M)|$.

Éléments de preuve • L'assertion est claire en dimension 1.

• Plaçons-nous en dimension 2. Si la matrice M n'est pas inversible, l'image $\varphi_M([0, 1]^2)$ est incluse dans une droite et est donc négligeable, tandis que $|\det M| = 0$.

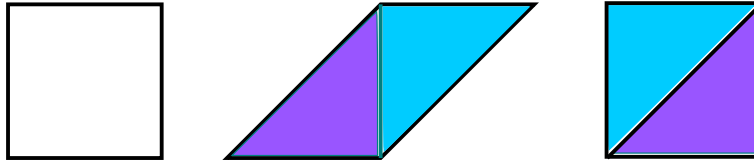
Nous allons également évoquer deux exemples lorsque $M \in M_2\mathbb{R}$ est inversible (et l'on peut montrer que ces deux exemples suffisent à montrer l'assertion lorsque $M \in M_2\mathbb{R}$ est inversible quelconque).

* Supposons pour commencer que $M = T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $\det T = 1$.

L'image $\varphi_T([0, 1]^2)$ est le parallélogramme dessiné ci-dessous. Par découpage, on constate que ce parallélogramme a même aire, égale à 1, que le pavé de départ $[0, 1]^2$.

* Supposons maintenant que $M = D_a := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, avec $\det D_a = a$.

L'image $\varphi_{D_a}([0, 1]^2)$ est alors un rectangle de côtés 1 et $|a|$, donc d'aire égale à $|a|$.



C.3 Changement de variable dans l'intégrale

Théorème 5.28 **Théorème du changement de variable en dimension n .**

Soit $\varphi : U \rightarrow V$ un C^1 -difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $|\det J(\varphi)| : x \in U \mapsto |\det J_x(\varphi)| \in [0, \infty[$ la valeur absolue du déterminant jacobien.

• Soit $f : V \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. Alors, la fonction $(f \circ \varphi) |\det J(\varphi)| : U \rightarrow [0, +\infty]$ est mesurable, et on a l'égalité :

$$\int_V f d\lambda = \int_U (f \circ \varphi) |\det J(\varphi)| d\lambda \in [0, +\infty]. \quad (5.3)$$

• Soit $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable. Alors, la fonction $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable si et seulement si la fonction $(f \circ \varphi) |\det J(\varphi)| : U \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable. Dans ce cas, les intégrales de f sur V , et de $(f \circ \varphi) |\det J(\varphi)|$ sur U , sont égales :

$$\int_V f d\lambda = \int_U (f \circ \varphi) |\det J(\varphi)| d\lambda, \quad (5.4)$$

$|\det J(\varphi)|$ désignant la valeur absolue du déterminant jacobien.

On peut remarquer que la seconde assertion est conséquence immédiate de la première, en revenant à la définition d'une fonction intégrable, et de son intégrale.

Un exemple très important d'application théorème de changement de variables concerne le passage en coordonnées polaires. L'exercice suivant sera traité en cours.

Exercice 5.29 Coordonnées polaires. L'application

$$\varphi : (r, \theta) \in]0, \infty[\times]0, 2\pi[\longrightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2$$

définit un difféomorphisme sur son image $V := \varphi(\mathbb{R}^2)$.

1. Décrire V , et remarquer que $\mathbb{R}^2 \setminus V$ est négligeable.
2. Déterminer le déterminant jacobien $\det J_{(r,\theta)}(\varphi)$ de φ au point (r, θ) .

Vous pourrez donc utiliser à volonté la proposition suivante.

Proposition 5.30 Intégrer en polaires.

Pour une fonction intégrable $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ (ou alors pour une fonction mesurable positive $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty]$), on a l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\lambda(x, y) = \int_{]0, \infty[\times]0, 2\pi[} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\lambda(r, \theta).$$

L'utilisation des coordonnées polaires se révèle particulièrement utile pour intégrer des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui ne dépendent que de la distance à l'origine. Donnons un exemple.

Exercice 5.31 Calcul de $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} d\lambda(t)$.

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow e^{-(x^2+y^2)} \in [0, \infty[$. On introduit $I = \int_{[0, \infty[} e^{-t^2} d\lambda(t)$ et $J = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\lambda(x, y)$.

1. Calculer J en passant en coordonnées polaires.
2. En déduire la valeur de I . On pourra penser à utiliser le théorème de Fubini (ou l'exercice 5.20) pour exprimer l'intégrale J à l'aide de I .
3. Montrer alors, pour $a > 0$, l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} d\lambda(t) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}.$$

Vous retrouvez ainsi les densités de probabilité des lois normales.

Le théorème du changement de variable généralise comme suit la proposition 3.25, qui avait énoncée en dimension 1, à la dimension supérieure.

Exercice 5.32 Propriétés d'invariance de l'intégrale.

En faisant intervenir les difféomorphismes

$$\begin{aligned}\tau_y : x \in \mathbb{R}^n &\rightarrow x - y \in \mathbb{R}^n & (y \in \mathbb{R}^n) \\ h_s : x \in \mathbb{R}^n &\rightarrow sx \in \mathbb{R}^n & (s \in \mathbb{R}^*) \\ j : x \in \mathbb{R}^n &\rightarrow -x \in \mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

retrouver, puis généraliser en dimension quelconque, les propriétés d'invariance de l'intégrale (proposition 3.25) comme cas particuliers du théorème 5.28. On obtient, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ intégrable, ou bien mesurable positive, tout vecteur $y \in \mathbb{R}^n$ et tout scalaire $s \neq 0$, les égalités :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(-x) d\lambda(x) = |s|^n \int_{\mathbb{R}^n} f(sx) d\lambda(x).$$

Remarque 5.33 Comparaison avec la dimension 1.

Soient $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 . Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur $\varphi([a, b])$ et $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f . On a vu à la proposition 3.18 (3) que

$$\int_{[a,b]} (f \circ \varphi) \varphi' d\lambda = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)). \quad (*1)$$

Si nous supposons de plus que la restriction $\varphi :]a, b[\rightarrow]c, d[$ est un difféomorphisme, son jacobien au point $x \in]a, b[$ est $J_x(\varphi) = \varphi'(x)$, et le théorème du changement de variable assure que

$$\begin{aligned}\int_{]a,b[} (f \circ \varphi) |\varphi'(x)| d\lambda &= \int_{]c,d[} f d\lambda, \\ \text{où } \int_{]c,d[} f d\lambda &= \int_{[c,d]} f d\lambda = F(d) - F(c).\end{aligned} \quad (*2)$$

Puisque nous avons supposé que φ est un difféomorphisme, la dérivée φ' ne change pas de signe sur $]a, b[$.

Supposons φ croissante, c'est-à-dire $\varphi' > 0$. Dans ce cas $\varphi(a) = c$ et $\varphi(b) = d$.

Supposons φ décroissante, c'est-à-dire $\varphi' < 0$. Dans ce cas $\varphi(a) = d$ et $\varphi(b) = c$.

Dans les deux cas, on a bien cohérence des expressions (*1) et (*2).

6. Transformée de Fourier

Les séries de Fourier permettent de décomposer une fonction périodique en superposition de signaux “élémentaires”, qui font apparaître une composante fondamentale et des harmoniques (voir par exemple l’appendice 11).

Il faut voir la transformée de Fourier comme un analogue des séries de Fourier, pour des fonctions qui ne sont plus supposées périodiques.

Une des caractéristiques fondamentales commune aux séries de Fourier et à la transformée de Fourier est de remplacer un opérateur de dérivation par un opérateur de multiplication. C’est cette remarque qui en fait un outil de choix pour étudier des équations aux dérivées partielles, ce que nous illustrerons par un début d’étude de l’équation de la chaleur.

A Définition et premières propriétés

Nous commençons par introduire la transformée de Fourier d’une fonction intégrable, puis nous énonçons quelques propriétés relativement élémentaires de cette transformation. Ceci nous fournit l’occasion de revoir beaucoup de propriétés de l’intégrale de Lebesgue !

Remarque 6.1 On trouve dans la littérature plusieurs choix de normalisation pour la transformée de Fourier. Quelle que soit la définition choisie, un facteur 2π apparaîtra quelque part (pour nous, ce sera dans la formule d’inversion de Fourier) : si vous le chassez par la porte, il rentrera par la fenêtre !

Définition 6.2 Transformée de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable. La transformée de Fourier de f est la fonction $\mathcal{F}f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par l’expression

$$\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itx} d\lambda(t).$$

On notera également $\mathcal{F}f = \hat{f}$.

Proposition 6.3 Pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est bien définie, et c’est une fonction continue et bornée.

Preuve Cela va résulter du théorème 4.29 de continuité sous l'intégrale, appliqué à la fonction $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $h(x, t) = f(t) e^{-itx}$.

Domination : Pour $x, t \in \mathbb{R}$, on a $|e^{-itx}| = 1$. On a donc la domination $|h(x, t)| \leq |f(t)|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$: rappelons en effet que, par hypothèse, la fonction $g = |f|$ est intégrable. La transformée de Fourier de f est donc bien définie.

Continuité : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto f(t) e^{-itx} \in \mathbb{C}$ est continue. Le théorème 4.29 s'applique donc pour montrer la continuité de $\hat{f}$.

Le fait que $\hat{f}$ soit bornée est conséquence de l'inégalité triangulaire dans l'intégrale. On a en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la majoration

$$|\hat{f}(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itx} d\lambda(t) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| d\lambda(t). \quad \square$$

Remarque 6.4 On peut même montrer que la fonction continue $\hat{f}$ tend vers 0 en $\pm\infty$: c'est le lemme de Riemann-Lebesgue. Mais il s'agit d'un résultat bien plus profond, qui repose sur la "régularité" de la mesure de Lebesgue (qui assure que toute fonction intégrable est approchable - en moyenne - par des fonctions de classe C^1 à support compact).

Définition 6.5 On introduit également la "transformée de Fourier inverse" $\overline{\mathcal{F}}f$ de $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\overline{\mathcal{F}}f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{itx} d\lambda(t).$$

Lemme 6.6 Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Introduisons $\overline{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction conjuguée de f , ainsi que la fonction symétrisée $f^\vee : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, respectivement définies pour $t \in \mathbb{R}$ par $\overline{f}(t) = \overline{f(t)}$ et par $f^\vee(t) = f(-t)$. On a alors les identités

$$\overline{\mathcal{F}}f = (\mathcal{F}f)^\vee = \mathcal{F}(f^\vee) = \overline{\mathcal{F}\overline{f}}.$$

Preuve Soit $f \in \mathcal{L}^1$. Par définition de $\overline{\mathcal{F}}$, on a l'égalité $\overline{\mathcal{F}}f = (\mathcal{F}f)^\vee$. Le changement de variable $t \mapsto -t$ (exercice 5.32) donne, pour $x \in \mathbb{R}$, l'égalité

$$(\overline{\mathcal{F}}f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{itx} d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} f(-t) e^{-itx} d\lambda(t) = \mathcal{F}(f^\vee)(x).$$

Enfin, la conjugaison complexe $z \in \mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2 \mapsto \overline{z} \in \mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$ est $\mathbb{R}$ -linéaire. Par linéarité de l'intégrale, il suit pour tout $x \in \mathbb{R}$ que

$$\overline{\overline{\mathcal{F}}f(x)} = \overline{\int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} e^{-itx} d\lambda(t)} = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{itx} d\lambda(t) = \overline{\mathcal{F}}f(x). \quad \square$$

Remarque 6.7 Pour une variable aléatoire X de densité f_X , la fonction caractéristique définie par $\varphi_X : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}(e^{itX}) \in \mathbb{C}$ vérifie $\varphi_X = \overline{\mathcal{F}}f_X$.

Comme nous le verrons lors de la démonstration de la formule d'inversion de Fourier, ou encore lors de notre étude élémentaire de l'équation de la chaleur, les identités fonctionnelles satisfaites par la transformée de Fourier sont de première importance.

Notation 6.8 Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et $s \in \mathbb{R}$ on désignera par $\tau_s f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction translatée de f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $\tau_s f(t) = f(t-s)$. On rappelle (proposition 3.25) que $\tau_s f$ est intégrable si f l'est.

Notation 6.9 On introduit également les fonctions $\chi_s : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{ist} \in \mathbb{C}^*$ (pour $s \in \mathbb{R}$). Ce sont les “caractères” du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$.

Leurs alter ego en série de Fourier seront les fonctions 2π -périodiques définies pour $n \in \mathbb{Z}$ par $\chi_n : t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \mapsto e^{int} \in \mathbb{C}^*$.

Proposition 6.10 Propriétés fonctionnelles 1.

Pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$ on introduit les fonctions intégrables suivantes dont les transformées de Fourier s'expriment, en fonction de la transformée de Fourier de f , comme suit :

$$\begin{aligned} \bullet \quad g_s(t) &= e^{ist} f(t) & \widehat{g}_s &= \tau_s \widehat{f} \\ \bullet \quad h_s &= \tau_s f & \widehat{h}_s(x) &= e^{-isx} \widehat{f}(x) \\ \bullet \quad f_a(t) &= |a| f(at) & \widehat{f}_a(x) &= \widehat{f}\left(\frac{x}{a}\right). \end{aligned}$$

Les deux premières identités expriment que la transformée de Fourier échange translation et multiplication par un caractère, soit

$$\mathcal{F}(\chi_s f) = \tau_s(\mathcal{F}f) \text{ et } \mathcal{F}(\tau_s f) = \chi_{-s}(\mathcal{F}f) \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}. \quad (6.1)$$

Preuve On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les égalités

$$\widehat{g}_s(x) = \int_{\mathbb{R}} g_s(t) e^{-itx} d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it(x-s)} d\lambda(t) = \widehat{f}(x-s) = (\tau_s \widehat{f})(x)$$

puis, en utilisant l'invariance de l'intégrale par translation (changement de variable $u = t - s$, proposition 3.25),

$$\begin{aligned} \widehat{h}_s(x) &= \int_{\mathbb{R}} h_s(t) e^{-itx} d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s) e^{-itx} d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-i(u+s)x} d\lambda(u) \\ &= e^{-isx} \widehat{f}(x) \end{aligned}$$

et enfin, avec le changement de variable $t \rightarrow at$ (proposition 3.25),

$$\widehat{f}_a(x) = \int_{\mathbb{R}} |a| f(at) e^{-itx} d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-iux/a} d\lambda(t) = \widehat{f}\left(\frac{x}{a}\right). \quad \square$$

Une autre propriété fondamentale de la transformée de Fourier est qu'elle échange dérivation et multiplication par un polynôme. Ici, il faut être un peu soigneux avec les hypothèses.

Pour une fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t) \in \mathbb{C}$ on se permettra de noter **abusivement** tf la fonction définie par $t \in \mathbb{R} \mapsto tf(t) \in \mathbb{C}$.

Proposition 6.11 Propriétés fonctionnelles 2.

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

1. On suppose que la fonction $t \mapsto tf(t)$ est également intégrable sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, la transformée de Fourier de f est de classe C^1 et on a l'égalité

$$\mathcal{F}(tf) = i(\mathcal{F}f)'.$$

2. On suppose maintenant que f est de classe C^1 , et que sa dérivée f' est intégrable. On a alors l'égalité

$$\mathcal{F}(f') = ix \mathcal{F}f.$$

Commençons par un lemme qui nous permettra de justifier une intégration par parties sur un intervalle non borné, ce qu'on ne peut faire sans précautions (voir l'encadré suivant l'exemple 3.22). Vous savez qu'une fonction intégrable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, même si on la suppose continue, ne tend pas toujours vers 0 à l'infini. Avec une hypothèse supplémentaire, cela devient vrai.

Lemme 6.12 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable. On suppose que f est continûment dérivable, et que sa dérivée f' est intégrable. Alors $f(t) \rightarrow 0$ lorsque $|t| \rightarrow \infty$.

Preuve La fonction f étant de classe C^1 , on a $f(T) = f(0) + \int_0^T f'(t) d\lambda(t)$ pour tout $T > 0$. Puisque f' est supposée intégrable, il suit que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Puisque f elle-même est intégrable, on doit avoir $\ell = 0$. Un raisonnement semblable montre que $f(T) \rightarrow 0$ lorsque $T \rightarrow -\infty$. Ceci achève la démonstration. $\square$

Preuve de la proposition 6.11

1. Soit donc $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable, telle que la fonction $t \mapsto tf(t)$ soit également intégrable. On introduit la fonction

$$h : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto f(t) e^{-itx} \in \mathbb{C}.$$

On vérifie que h satisfait les hypothèses de dérivabilité sous le signe intégrale. En effet, on a déjà vu que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto h(x, t) \in \mathbb{C}$ est intégrable pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, pour $t \in \mathbb{R}$, la fonction $h_t : x \in \mathbb{R} \mapsto f(t) e^{-itx} \in \mathbb{C}$ est de classe C^1 , de dérivée $h'_t(x) = -itf(t)e^{-itx}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'égalité

$$|h'_t(x)| = |tf(t)e^{-itx}| = |tf(t)|.$$

Nous avons supposé que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto |tf(t)| \in [0, +\infty]$ est intégrable : il s'agit donc bien d'une domination. Le théorème 4.34 s'applique donc pour montrer que $\mathcal{F}f$ est de classe C^1 avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'égalité

$$(\mathcal{F}f)'(x) = \int_{\mathbb{R}} h'_t(x) d\lambda(t) = (-i) \int_{\mathbb{R}} tf(t)e^{-itx} dt = -i \mathcal{F}(tf)(x).$$

2. Supposons maintenant que f soit continûment dérivable, et que sa dérivée f' soit intégrable. Pour $x \in \mathbb{R}$, on utilise le théorème de convergence dominée pour se ramener à une intégrale sur un segment, puis une intégration par parties, et enfin de nouveau le théorème de convergence dominée. On obtient successivement :

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(f'))(x) &= \int_{\mathbb{R}} f'(t) e^{-itx} d\lambda(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-n, n]} f'(t) e^{-itx} d\lambda(t) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [f(n) e^{-inx} - f(-n) e^{inx} + ix \int_{[-n, n]} f(t) e^{-itx} d\lambda(t)] \\ &= ix \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itx} d\lambda(t). \end{aligned}$$

Le lemme 6.12 assure, sous nos hypothèses, que le terme entre crochets tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$, de sorte que $\mathcal{F}f' = (ix)\mathcal{F}f$. $\square$

B Transformée de Fourier d'une gaussienne

La formule d'inversion de Fourier affirme que, pour toute "bonne" fonction intégrable $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (l'hypothèse précise est que les deux fonctions f et $\mathcal{F}f$ soient intégrables), on a l'égalité $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = (2\pi)f$ (théorèmes 6.22 et 6.24).

Un point clé pour prouver le théorème d'inversion de Fourier dans toute sa généralité consiste à remarquer que cette propriété est vérifiée pour une seule fonction, ici une gaussienne. Pour cela on montre que la gaussienne est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, et l'on observe que sa transformée est solution de la même équation différentielle.

Lemme 6.13 *Les fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 , solutions de l'équation différentielle $g'(x) = -xg(x)$ (E), sont les fonctions $x \in \mathbb{R} \rightarrow a e^{-x^2/2}$ avec $a \in \mathbb{C}$.*

Preuve Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 . En dérivant la fonction $h : x \rightarrow g(x)e^{x^2/2}$ on observe, puisque l'exponentielle ne s'annule pas, que g est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction h est constante. Le résultat est prouvé. $\square$

Proposition 6.14 *Soit $G : t \in \mathbb{R} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \in \mathbb{R}$. On a l'identité*

$$\hat{G}(x) = e^{-x^2/2} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$

et donc $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}G = (2\pi)G$.

Preuve La fonction G est intégrable avec $\int_{\mathbb{R}} G(t) d\lambda(t) = 1$ (exercice 5.31).

Nous cherchons maintenant à utiliser les propriétés fonctionnelles de la transformée de Fourier. On observe que la gaussienne G est une fonction de classe C^∞ dont la dérivée vérifie $G'(t) = -tG(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Les fonctions G' et tG étant toutes deux intégrables (proposition 3.33), la proposition 6.11 s'applique. Il suit que la fonction $\hat{G}$ est de classe C^1 , et est solution de l'équation différentielle

$$(\hat{G})'(x) = -x \hat{G}(x). \quad (E)$$

Il existe donc une constante $a \in \mathbb{C}$ pour laquelle $\hat{G}(x) = a e^{-x^2/2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En remarquant que $\hat{G}(0) = \int_{\mathbb{R}} G(t) d\lambda(t) = 1$, il vient $a = 1$ et donc $\mathcal{F}G = \sqrt{2\pi} G$.

La formule d'inversion pour G suit puisque, la fonction G étant paire, on a $\overline{\mathcal{F}}(G) = \mathcal{F}G = \sqrt{2\pi} G$ et donc $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}G = \overline{\mathcal{F}}\sqrt{2\pi}G = (2\pi)G$. $\square$

Exercice 6.15 Pour $a > 0$, montrer que la transformée de Fourier de la fonction $G_a : x \in \mathbb{R} \rightarrow \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2 x^2/2} \in \mathbb{R}$ vérifie $\hat{G}_a(\xi) = e^{-\xi^2/2a^2}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Constater que G_a vérifie également la formule d'inversion de Fourier.

C L'espace de Schwartz

L'espace de Schwartz $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est l'espace fonctionnel dans lequel l'étude de la transformée de Fourier est la plus facile à mener. Nous verrons en particulier que cet espace est invariant sous transformation de Fourier.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On rappelle que la notation $f^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de f , lorsque celle-ci existe. Pour alléger les notations, on se permettra ($\odot$) de nouveau de noter $t^k f$ la fonction définie par $t \mapsto t^k f(t)$.

Définition 6.16 L'espace de Schwartz ¹.

L'espace de Schwartz $\mathcal{S}$ est l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ dont chaque dérivée est à décroissance rapide, c'est-à-dire telles qu'on ait pour tous entiers $k, p \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} t^p f^{(k)}(t) = 0.$$

Remarque 6.17 Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ appartient $\mathcal{S}$ si et seulement si elle est de classe C^∞ avec, pour tous $k, p \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |t^p f^{(k)}(t)| < \infty.$$

Exemple 6.18 La fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t^2} \in \mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{S}$.

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞ et qui est nulle en dehors d'un compact de $\mathbb{R}$, appartient à $\mathcal{S}$.

1. Du nom de Laurent Schwartz (1915–2002), mathématicien français qui a introduit la théorie des distributions à la fin des années 40. A ne pas confondre avec Hermann Schwarz (1843-1921), mathématicien allemand, qui a donné son nom à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cf. le cours sur les espaces de Hilbert).

Lemme 6.19 *Soit $f \in \mathcal{S}$. Alors f est intégrable sur $\mathbb{R}$.*

Preuve En effet cette fonction étant continue, elle est intégrable sur tout segment. Il suffit donc de vérifier qu'elle est intégrable au voisinage de $\pm\infty$. Or, puisque la fonction $t \rightarrow t^2 f(t)$ tend vers 0 à l'infini, il suit que $|f(t)| \leq t^{-2}$ lorsque $|t|$ est assez grand. Le résultat suit, puisque la fonction $t \mapsto t^{-2}$ est intégrable au voisinage de $\pm\infty$. $\square$

Lemme 6.20 *L'espace de Schwartz est un espace vectoriel qui est stable par dérivation, ainsi que par multiplication par un polynôme :*

Soit $f \in \mathcal{S}$. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme et $k \in \mathbb{N}$. Les fonctions $f^{(k)}$ et $t \mapsto P(t)f(t)$ appartiennent également à $\mathcal{S}$.

Preuve Il suffit d'observer que $(tf)^{(p)} = t f^{(p)} + p f^{(p-1)}$ pour $p \geq 1$. $\square$

Proposition 6.21 Propriétés fonctionnelles 3 : sur $\mathcal{S}$.

Soit $f \in \mathcal{S}$. Alors $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}$.

On a de plus, pour tous entiers $k, p \in \mathbb{N}$, les identités

$$\mathcal{F}(t^p f) = i^p (\mathcal{F}f)^{(p)} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(f^{(k)}) = (ix)^k \mathcal{F}f.$$

Preuve • Pour $g \in \mathcal{S}$, montrons que $\mathcal{F}g$ est à décroissance rapide.

Une récurrence sur k , avec la proposition 6.11.(2), montre que $\mathcal{F}(g^{(k)}) = (ix)^k \mathcal{F}g$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puisque la transformée de Fourier de $g^{(k)}$ est bornée (proposition 6.3), il suit que la fonction $\mathcal{F}g$ est à décroissance rapide.

• Soit $f \in \mathcal{S}$.

On constate d'abord que $\mathcal{F}f$ est de classe C^p pour tout $p \in \mathbb{N}$, avec $(\mathcal{F}f)^{(p)} = (-i)^p \mathcal{F}(t^p f)$ (récurrence sur p , en utilisant la proposition 6.11.(1)). En particulier, la transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ est de classe C^∞ .

Pour $p \in \mathbb{N}$, la fonction $g_p : t \mapsto t^p f(t)$ appartient également à $\mathcal{S}$. Il suit donc du premier point que la dérivée $(\mathcal{F}f)^{(p)}$ est à décroissance rapide. $\square$

Théorème 6.22 Inversion de Fourier sur $\mathcal{S}$.

Soit $f \in \mathcal{S}$. On a l'égalité

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = (2\pi) f.$$

En particulier, l'application $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ est une bijection.

Le lemme suivant affirme qu'on peut diviser, dans $\mathcal{S}$, par la fonction $t \mapsto t$ une fonction $f \in \mathcal{S}$ qui s'annule en l'origine. Une fois ce lemme acquis, la preuve du théorème d'inversion de Fourier sur $\mathcal{S}$ suivra de façon élémentaire des propriétés fonctionnelles de la transformée de Fourier et de l'égalité $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}G = (2\pi) G$, où G est la gaussienne de la proposition 6.14.

Lemme 6.23 Soit $f \in \mathcal{S}$, telle que $f(0) = 0$. Alors il existe une fonction $h \in \mathcal{S}$ telle que $f(t) = t h(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Preuve du théorème 6.22

Soit une fonction $f \in \mathcal{S}$. On veut montrer l'égalité $(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f)(s) = (2\pi) f(s)$ pour tout point $s \in \mathbb{R}$.

• Commençons par montrer la formule d'inversion de Fourier en l'origine, c'est-à-dire l'égalité $(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f)(0) = (2\pi) f(0)$.

* Supposons en un premier temps que f s'annule en 0. On peut donc, d'après le lemme 6.23, écrire $f(t) = t h(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, où $h \in \mathcal{S}$. La proposition 6.11 assure donc que $\hat{f} = i(\hat{h})'$. On a donc

$$\begin{aligned} (-i)\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(0) &= \int_{\mathbb{R}} (\hat{h})'(t) d\lambda(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-n, n]} (\hat{h})'(t) d\lambda(t) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{h}(n) - \hat{h}(-n) = 0, \end{aligned}$$

puisque $\hat{h} \in \mathcal{S}$ tend vers 0 en $\pm\infty$. On a donc bien $(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f)(0) = (2\pi) f(0)$ puisque $f(0) = 0$.

* Si l'on ne suppose plus que f s'annule en 0, on peut écrire $f = f_0 + aG$, où G est la gaussienne de la proposition 6.14 et où $a \in \mathbb{R}$ est choisi de sorte que la fonction $f_0 \in \mathcal{S}$ s'annule en 0. Par linéarité de la transformée de Fourier, il vient

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f_0 + a\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}G,$$

puis, en utilisant le cas précédent et la proposition 6.14, $(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f)(0) = (2\pi)f(0)$.

• Nous allons maintenant en déduire la formule d'inversion de Fourier en tout point $s \in \mathbb{R}$. Pour cela, évaluons $(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f)(s)$ en utilisant les propriétés fonctionnelles (6.1) comme suit :

$$\begin{aligned} (\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f)(s) &= (\mathcal{F}\mathcal{F}f)(-s) = (\tau_s \mathcal{F}\mathcal{F}f)(0) = (\mathcal{F}[\chi_s \mathcal{F}f])(0) \\ &= (\mathcal{F}\mathcal{F}(\tau_{-s}f))(0). \end{aligned}$$

La formule d'inversion de Fourier en l'origine, pour la fonction $\tau_{-s}f \in \mathcal{S}$, donne alors

$$\mathcal{F}\mathcal{F}(\tau_{-s}f)(0) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(\tau_{-s}f)(0) = (2\pi)(\tau_{-s}f)(0) = (2\pi) f(s),$$

ce qu'on voulait.

• Il suit de la formule d'inversion de Fourier que $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ est injective. Puisque $\overline{\mathcal{F}}(g) = \mathcal{F}(g^\vee)$ pour tout $g \in \mathcal{S}$, il suit également que $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ est surjective. L'inverse de $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ est l'application $(2\pi)^{-1}\overline{\mathcal{F}}$. $\square$

Preuve du lemme 6.23

On veut factoriser la fonction $f : t \mapsto f(t)$, supposée s'annuler en 0, par t . Pour cela, on écrit le théorème fondamental de l'analyse pour la fonction f . Il vient, avec le changement de variable $s = tu$:

$$f(t) = \int_0^t f'(s) ds = \int_0^1 t f'(tu) du = t \int_0^1 f'(tu) du = t \int_{[0,1]} f'(tu) d\lambda(u).$$

On a préféré écrire les premières intégrales sous forme d'intégrales de Riemann, pour ne pas avoir à se préoccuper du signe de t .

On introduit donc la fonction $h : t \in \mathbb{R} \mapsto \int_{[0,1]} f'(tu) d\lambda(u) \in \mathbb{C}$, de sorte que $f(t) = t h(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Nous devons montrer que $h \in \mathcal{S}$.

- On commence par montrer que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

En utilisant les théorèmes 4.29 et 4.34 sur les intégrales dépendant d'un paramètre, on démontre par récurrence que h vérifie pour tout $k \geq 0$:

Propriété H_k : la fonction h est de classe C^k sur l'intervalle $\mathbb{R}$ avec, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $h^{(k)}(t) = \int_{[0,1]} u^k f^{(k+1)}(tu) du$

ce qui sous-entend que l'intégrand... est intégrable ! Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| < \infty$.

* *Initialisation (H_0) :* Soit $g : (t, u) \in \mathbb{R} \times [0, 1] \mapsto f'(tu) \in \mathbb{C}$.

Pour tout $u \in [0, 1]$, l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto g(t, u) = f'(tu) \in \mathbb{C}$ est continue. On a également la domination $|g(t, u)| = |f'(tu)| \leq M_1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, où la fonction constante $u \in [0, 1] \mapsto M_1 \in [0, +\infty[$ est intégrable sur ce segment. Le théorème de continuité sous le signe intégrale s'applique, et montre que h est continue sur $\mathbb{R}$.

* *Hérédité :* Soit $k \geq 0$. Supposons l'assertion H_k vraie. Introduisons la fonction $g_k : (t, u) \in \mathbb{R} \times [0, 1] \mapsto u^k f^{(k+1)}(tu) \in \mathbb{C}$.

Pour $u \in [0, 1]$, la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto u^k f^{(k+1)}(tu) \in \mathbb{C}$ est de classe C^1 . De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a la domination

$$\left| \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, u) \right| = |u^{k+1} f^{(k+2)}(tu)| \leq M_{k+2} \quad \text{pour tout } u \in [0, 1],$$

où la fonction constante égale à M_{k+2} est intégrable sur le segment $[0, 1]$. Le théorème de dérivation sous le signe somme s'applique, et montre que la propriété H_{k+1} est vraie.

• Puisque h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f(t) = t h(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $t \in \mathbb{R}$, l'égalité

$$f^{(k)}(t) = k h^{(k-1)}(t) + t h^{(k)}(t). \quad (6.2)$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. De l'identité $t^p h(t) = t^{p-1} f(t)$ (pour tout $t \neq 0$), il suit que $t^p h(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Avec (6.2), une récurrence immédiate sur k montre également que $t^p h^{(k)}(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a donc bien $h \in \mathcal{S}$ comme annoncé. $\square$

D La transformée de Fourier sur l'espace $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

On ne peut pas clore ce chapitre sans mentionner le théorème d'inversion de Fourier sur l'espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions intégrables.

Théorème 6.24 Inversion de Fourier dans $\mathcal{L}^1$.

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ une fonction intégrable. Supposons que la transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ soit également une fonction intégrable. On a alors l'égalité

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = (2\pi)f \text{ p.p.}$$

Remarque 6.25 L'hypothèse $\mathcal{F}f$ intégrable assure que la fonction $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f$ est bien définie.

Si l'on remplace f par une autre fonction intégrable g telle que $f = g$ p.p., on a l'égalité $\mathcal{F}f = \mathcal{F}g$ en tout point. La conclusion du théorème ne peut donc être ici qu'une égalité presque partout !

Sous les hypothèses du théorème, la fonction f est donc égale presque partout à la fonction continue $(1/2\pi) \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f$.

Tout comme le lemme de Riemann-Lebesgue évoqué plus haut, ce résultat repose sur la régularité de la mesure de Lebesgue qui assure notamment que l'on peut approcher – en moyenne – toute fonction intégrable $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ par une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions $f_n \in \mathcal{S}$ de l'espace de Schwartz, au sens où

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n - f| d\lambda \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

Corollaire 6.26 Injectivité de Fourier.

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f = 0$. Alors la fonction f est nulle presque partout.

Remarque 6.27 Le bon cadre pour énoncer ce théorème d'injectivité (qui porterait alors mieux son nom) est celui de l'espace $L^1(\mathbb{R})$, qui sera évoqué au chapitre 8.

7. Application à une équation aux dérivées partielles

Dans ce chapitre, nous montrons sur un exemple simple ce que la transformée de Fourier peut apporter dans l'étude d'une équation aux dérivées partielles.

A Convolution

Avant de nous intéresser à l'équation de la chaleur, nous introduisons une opération fondamentale en analyse : la convolution de deux fonctions. Tout comme dans le chapitre précédent, nous nous limiterons par souci de simplification à convoluer deux fonctions appartenant à l'espace de Schwartz.

Définition 7.1 Convolution de deux fonctions.

Soient $f, g \in \mathcal{S}$. Leur convolution $f * g$ est définie en tout point $x \in \mathbb{R}$ par l'expression

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y) d\lambda(y).$$

Lemme 7.2 Soient $f, g \in \mathcal{S}$.

La convolution $f * g$ est bien définie (et elle est bornée).

On a l'égalité $f * g = g * f$.

La convolution $f * g \in \mathcal{S}$ appartient à l'espace de Schwartz avec, pour $k \in \mathbb{N}$, les égalités $(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)} = f^{(k)} * g(E_k)$.

Il suit facilement de la démonstration de (E_k) et de la commutativité du produit de convolution que, pour $0 \leq \ell \leq k$, on a également l'égalité $(f * g)^{(k)} = f^{(\ell)} * g^{(k-\ell)}$.

Preuve Une fonction de l'espace de Schwartz est bornée, et intégrable. Le produit d'une fonction bornée par une fonction intégrable est intégrable. Il suit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto f(y)g(x - y) \in \mathbb{C}$ est intégrable : la convolution $f * g$ est donc bien définie en tout point $x \in \mathbb{R}$. Remarquons d'emblée que $f * g$ est bornée, avec par exemple

$$\|f * g\|_{\infty} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)| d\lambda(y) \right) \|g\|_{\infty}.$$

L'égalité $(f * g)(x) = (g * f)(x)$ suit de la définition, en utilisant le changement de variable $y \mapsto z = x - y$.

Démontrons que la convolée $f * g$ est de classe C^1 . On applique pour cela le théorème de dérivation sous le signe intégrale (théorème 4.34) à la fonction $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ définie pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $h(x, y) = f(y)g(x - y)$. Vérifions que les hypothèses en sont bien satisfaites :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \in \mathbb{R} \mapsto f(y)g(x - y) \in \mathbb{C}$ est intégrable (car dominée par $\|g\|_\infty |f|$ avec $|f|$ intégrable)
2. Pour tout $y \in \mathbb{R}$ la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto f(y)g(x - y) \in \mathbb{C}$ est de classe C^1
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\frac{\partial h}{\partial x} : y \in \mathbb{R} \mapsto f(y)g'(x - y) \in \mathbb{C}$ est dominée par la fonction intégrable $\|g'\|_\infty |f|$.

Le théorème s'applique donc pour montrer que $f * g$ est de classe C^1 avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'égalité $(f * g)'(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g'(x - y) d\lambda(y)$.

On montre alors par une récurrence immédiate que la convolée $(f * g)$ est de classe C^∞ et que ses dérivées successives s'obtiennent en dérivant sous le signe intégrale.

Montrons maintenant que chaque dérivée $(f * g)^{(k)}$ est à décroissance rapide. Soit donc $p \in \mathbb{N}$. On obtient, avec la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned} x^p (f * g)^{(k)}(x) &= x^p \int_{\mathbb{R}} f(y)g^{(k)}(x - y) d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (x - y + y)^p f(y)g^{(k)}(x - y) d\lambda(y) \\ &= \sum_{j=0}^p C_p^j \int_{\mathbb{R}} [y^j f(y)] [(x - y)^{p-j} g^{(k)}(x - y)] d\lambda(y). \end{aligned}$$

Autrement dit, la fonction $x \mapsto x^p (f * g)^{(k)}(x)$ s'obtient comme combinaison linéaire de fonctions obtenues par convolution de fonctions $x \mapsto x^j f^{(k)}(x)$ et $x \mapsto x^{p-j} g(x)$ qui appartiennent à l'espace de Schwartz. Elle est donc bornée. On conclut avec la remarque 6.17 que $f * g \in \mathcal{S}$. $\square$

La transformée de Fourier satisfait également des propriétés fonctionnelles faisant intervenir le produit de convolution. Notons avant toute chose que le produit (usuel) fg de deux fonctions $f, g \in \mathcal{S}$ appartient encore à $\mathcal{S}$ – cela suit de la formule de Leibniz pour les dérivées d'un produit.

Proposition 7.3 Propriétés fonctionnelles 4 : convolution.

Soient $f, g \in \mathcal{S}$. On a l'identité $\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$.

Preuve Soit $\xi \in \mathbb{R}$. On a, par définition,

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(f * g))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) e^{-ix\xi} d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y) d\lambda(y) \right) e^{-ix\xi} d\lambda(x). \end{aligned}$$

On brûle d'envie d'appliquer le théorème de Fubini 5.17 à la fonction définie par $h : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(y)g(x-y)e^{-ix\xi} \in \mathbb{C}$. Mais on doit d'abord vérifier que h est intégrable. Pour cela, nous appliquons le théorème de Fubini-Tonelli 5.11 à la fonction positive $|h|$. Il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |h(x, y)| d\lambda(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^2} |f(y)| |g(x-y)| d\lambda(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-y)| d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |g| d\lambda \right) < \infty. \end{aligned}$$

Nous avons donc, avec Fubini une première fois :

$$(\mathcal{F}(f * g))(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} h(x, y) d\lambda(x, y)$$

donc

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(f * g))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(y)g(x-y)e^{-ix\xi} d\lambda(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (f(y)e^{-iy\xi}) (g(x-y)e^{-i(x-y)\xi}) d\lambda(x, y) \end{aligned}$$

puis en utilisant de nouveau Fubini, ainsi qu'un changement de variable $y \mapsto x - y$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(f * g))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-iy\xi} \left(\int_{\mathbb{R}} (g(x-y)e^{-i(x-y)\xi}) d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-iy\xi} (\mathcal{F}g)(\xi) d\lambda(y) \\ &= (\mathcal{F}f)(\xi) (\mathcal{F}g)(\xi). \end{aligned} \quad \square$$

Exercice 7.4 En déduire l'identité $\mathcal{F}(fg) = (1/2\pi)(\mathcal{F}f)*(\mathcal{F}g)$ lorsque f et g sont deux fonctions de l'espace de Schwartz. On pensera à utiliser la formule d'inversion de Fourier.

B Approximation de l'unité

Rappelons que la gaussienne de variance $1/a^2$ est définie, pour $a > 0$, par $G_a : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2 x^2/2} \in \mathbb{R}$.

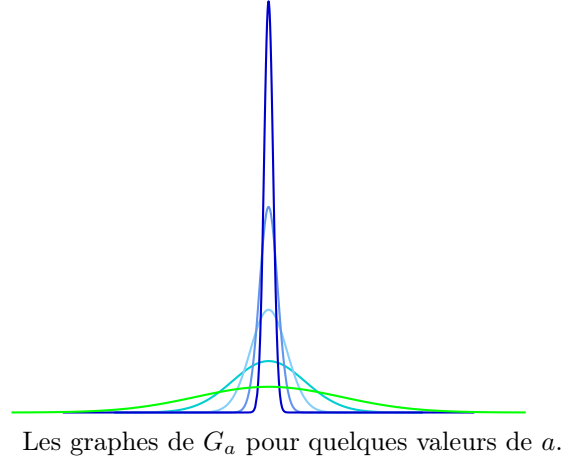
Lemme 7.5 Chaque gaussienne G_a est une fonction positive d'intégrale 1.

La masse de la gaussienne se concentre vers l'origine lorsque $a \rightarrow +\infty$: pour tout $\delta > 0$, on a

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq \delta} G_a(x) d\lambda(x) = 0.$$

Preuve Par définition, on a $G_a(x) = a G_1(ax)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction G_1 est positive d'intégrale 1, il en va donc de même des G_a . Un changement de variable et le théorème de convergence dominée assurent que, pour tout $\delta > 0$, on a pour chaque suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs tendant vers ∞ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq \delta} G_{a_n}(x) d\lambda(x) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq a_n \delta} G_1(x) d\lambda(x) = 0. \quad \square \end{aligned}$$



La famille (G_a) constitue une approximation de l'unité : pour a grand, l'application $f \in \mathcal{S} \mapsto G_a * f \in \mathcal{S}$ est pratiquement l'application identité. L'énoncé précis est le suivant.

Proposition 7.6 Approximation de l'unité Soit $f \in \mathcal{S}$. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $a_n \rightarrow +\infty$.

Alors, la suite des convolées $(f * G_{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f lorsque $n \rightarrow \infty$.

Au point $x \in \mathbb{R}$, la convolée $(G_a * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) G_a(x - y) d\lambda(y)$ est définie comme la moyenne des valeurs $f(y)$ lorsque y décrit $\mathbb{R}$, pondérée par le poids $G_a(x - y)$. Lorsque $a \rightarrow +\infty$, la masse de G_a est concentrée vers l'origine. Les contributions dans cette moyenne des valeurs $f(y)$ lorsque y est loin de x auront alors peu d'importance. Tandis que, lorsque y est proche de x , $f(y)$ est pratiquement égal à $f(x)$ par continuité de f . La preuve ci-dessous quantifie ce raisonnement qualitatif.

Preuve Soit $a > 0$. Puisque la fonction G_a est d'intégrale 1, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ les égalités

$$\begin{aligned} f(x) - (G_a * f)(x) &= f(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x - y) G_a(y) d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (f(x) - f(x - y)) G_a(y) d\lambda(y), \end{aligned}$$

de sorte que l'inégalité triangulaire donne, pour tout $\delta > 0$, la majoration

$$\begin{aligned} |f(x) - (G_a * f)(x)| &\leq \int_{|y| \leq \delta} |f(x) - f(x - y)| G_a(y) d\lambda(y) \\ &\quad + \int_{|y| > \delta} |f(x) - f(x - y)| G_a(y) d\lambda(y). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Puisque les fonctions $f, f' \in \mathcal{S}$ sont bornées, on introduit $M_0 = \|f\|_\infty$ et $M_1 = \|f'\|_\infty$. Soit $\varepsilon > 0$, et notons $\delta = \varepsilon/M_1$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $|y| \leq \delta$, la majoration $|f(x) - f(x-y)| \leq M_1\delta = \varepsilon$ de sorte que (puisque G_a est d'intégrale 1) le premier terme du membre de droite dans (7.1) est majoré par ε .

Pour cette valeur de $\delta = \varepsilon/M_1$, le lemme 7.5 assure maintenant l'existence d'un réel $A > 0$ tel qu'on ait, pour tout $a \geq A$, la majoration

$$\int_{|y| \geq \delta} G_a(y) d\lambda(y) \leq \varepsilon/(2M_0).$$

Lorsque $a \geq A$, le second terme du membre de droite dans (7.1) est alors également majoré par ε (pour tout $x \in \mathbb{R}$), de sorte que

$$\|f - G_a * f\|_\infty \leq 2\varepsilon. \quad \square$$

C L'équation de la chaleur

L'équation de la chaleur est ainsi nommée car elle décrit l'évolution de la température $u(x, t)$ au point x d'une barre infinie et homogène, en fonction du temps t .

Donnons-nous une condition initiale $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de sorte que $f(x)$ soit, pour chaque point $x \in \mathbb{R}$, la température au point x à l'instant 0. On laisse alors évoluer le système pendant le temps T , sans apport extérieur, et on désigne par $u(x, t)$ la température au point $x \in \mathbb{R}$ et à l'instant $0 < t < T$.

Nous supposons, pour simplifier, que la donnée initiale f appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$. On s'intéresse alors aux fonctions $u : [0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient les conditions :

$$\begin{aligned} &\text{La fonction } u : \mathbb{R} \times [0, T[\rightarrow \mathbb{R} \text{ est continue,} \\ &\text{avec } u(x, 0) = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\text{La fonction } u : \mathbb{R} \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R} \text{ est de classe } C^2 \text{ (ou même } C^\infty) \quad (7.3)$$

$$\text{et elle y est solution de l'équation de la chaleur } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (7.4)$$

L'objectif de ce chapitre est de comprendre comment l'utilisation de la transformée de Fourier permet de montrer l'existence d'une fonction $u : [0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions (7.2), (7.3) et (7.4), et d'obtenir une expression explicite de cette solution en fonction de la donnée initiale $f \in \mathcal{S}$.

C.1 Heuristique

Soient $f \in \mathcal{S}$ et u une fonction satisfaisant les propriétés (7.2) et (7.3).

Une fois n'est pas coutume, nous allons nous permettre dans ce paragraphe d'effectuer des manipulations sur u sans les justifier... profitons-en ☺!

Les “définitions” et “assertions” suivantes sont donc étiquetées “étapes” pour insister sur le fait que nous ne vérifions pas que les objets considérés sont bien définis, et que nous ne démontrons pas vraiment nos assertions.

Nous avons vu que la transformée de Fourier transforme un opérateur de dérivation en un opérateur de multiplication (proposition 6.11). Cela nous amène à introduire la fonction suivante, qui est la “transformée de Fourier partielle” de u par rapport à la variable d'espace x .

Étape 7.7 *Pour chaque instant $t \in [0, T[$, on introduit la transformée de Fourier de la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto u(x, t) \in \mathbb{C}$, définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ par*

$$\hat{u}(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) e^{-ix\xi} d\lambda(x). \quad (7.5)$$

Pour que la fonction $\xi \mapsto \hat{u}(\xi, t)$ soit bien définie, il faudrait savoir que la fonction $x \mapsto u(x, t)$ est intégrable. Admettons de plus (tant qu'on y est ☺) que l'on puisse dériver sous le signe intégrale dans l'expression (7.5).

Étape 7.8 *La fonction $\hat{u}$ vérifie, pour tous $(\xi, t) \in \mathbb{R} \times [0, T[$:*

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-\xi^2 t/2}.$$

Semblant de preuve Puisque u est solution de l'équation de la chaleur on obtient, après avoir dérivé sous le signe intégrale dans (7.5),

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) e^{-ix\xi} d\lambda(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) e^{-ix\xi} d\lambda(x).$$

Dans cette dernière expression, on reconnaît la transformée de Fourier de la dérivée seconde d'une fonction (ici t est fixé). Puisque la transformée de Fourier échange dérivation et multiplication (de nouveau, on affirme ceci sans vérifier que les hypothèses sont satisfaites) on obtient, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, l'égalité

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, t) = -\frac{\xi^2}{2} \hat{u}(\xi, t).$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, que l'on sait résoudre. Il existe donc une constante c_ξ pour laquelle

$$\hat{u}(\xi, t) = c_\xi e^{-\xi^2 t/2}$$

pour tout $t \in]0, T[$. On a supposé que $u(\cdot, 0) = f$, de sorte que $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Le résultat suit. $\diamond$

Étape 7.9 *On a, pour tous $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, T[$:*

$$u(x, t) = (f * E_t)(x),$$

$$\text{où } E_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/(2t)}.$$

Semblant de preuve Observons que l'on a défini $E_t = G_{1/\sqrt{t}}$. Rappelons que $\hat{E}_t : \xi \mapsto e^{-\xi^2 t^2/2}$ (voir l'exercice 6.15).

Le résultat de l'étape précédente s'écrit donc $\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) \hat{E}_t(\xi)$ pour tous $0 < t < T$ et $\xi \in \mathbb{R}$.

Fixons désormais $0 < t < T$. Les fonctions f et E_t appartenant à $\mathcal{S}$, il suit de la proposition 7.3 l'égalité $\mathcal{F}(f * E_t) = \hat{f} \hat{E}_t$.

Si l'injectivité de la transformée de Fourier s'applique (attention, on ne sait pas que l'application $x \mapsto u(x, t)$ appartient à $\mathcal{S}$), on en déduit pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'égalité cherchée

$$u(x, t) = (f * E_t)(x). \quad \diamond$$

C.2 Solution explicite pour l'équation de la chaleur

Il reste à démontrer que l'expression obtenue dans le paragraphe précédent, par des procédés qui semblent raisonnables mais qui n'ont pas été justifiés, fournit effectivement une solution au problème.

Autrement dit, il faut montrer que l'expression

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (f * E_t)(x) \quad \text{lorsque } 0 < t < T \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned}$$

définit une fonction u sur le produit $\mathbb{R} \times [0, T[$, qui vérifie les propriétés (7.2), (7.3) et (7.4). Ce n'est pas difficile, mais nous nous contenterons de donner quelques points de repère sans rentrer dans les détails des estimations.

- Chaque fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}$, pour $0 < t < T$, est bien définie et elle appartient à l'espace de Schwarz (convoluée de deux fonctions f et E_t appartenant à $\mathcal{S}$.)

- On montre ensuite, en utilisant bien sûr les théorèmes sur les intégrales dépendant d'un paramètre, que la restriction de u à l'ouvert $\mathbb{R} \times]0, T[$ admet des dérivées partielles d'ordre 2 (voire même de tous ordres) continues, et que ces dérivées s'obtiennent en dérivant sous l'intégrale l'expression

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-(x-y)^2/(2t)} d\lambda(y).$$

Il nous faut, pour pouvoir appliquer les théorèmes 4.29 et 4.34, avoir dominé les intégrands. Pour cela on commencera par montrer que, pour une fonction polynômiale $(z, s) \mapsto g(z, s)$, le produit $g(z, 1/t)e^{-z^2/(2t)}$ est borné dans tout domaine $\mathbb{R} \times [\varepsilon, T]$ où $\varepsilon > 0$.

- Une fois $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ exprimés sous forme intégrale, on constate facilement que u est bien solution de l'équation de la chaleur.

- Le fait que u soit continue "jusqu'au bord", c'est-à-dire sur le produit $\mathbb{R} \times [0, T[$, avec valeur au bord $u(\cdot, 0) = f$ est conséquence de la proposition 7.6. $\square$

8. Les espaces L^p

A L'espace L^1

Nous avons déjà remarqué à plusieurs reprises que, lorsqu'il s'agit d'intégrer, on peut remplacer une fonction intégrable par une autre fonction qui lui est égale presque partout.

Nous allons formaliser cette remarque en introduisant l'espace "quotient" L^1 , qui remplacera avantageusement l'espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions intégrables.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate des propositions 3.6 et 4.20. Il exprime que l'application $f \in \mathcal{L}^1 \rightarrow \int |f| d\lambda \in [0, \infty[$ est presque une norme sur $\mathcal{L}^1$. La seule chose qui lui manque pour être vraiment une norme est d'être "définie", au sens où l'on voudrait que $\int |f| d\lambda = 0$ (si et seulement si $f = 0$ en chaque point. En effet :

Lemme 8.1 *Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ une partie mesurable.*

L'application $\tilde{n} : f \in \mathcal{L}^1(B) \mapsto \int_B |f| d\lambda \in [0, \infty[$ vérifie les propriétés suivantes :

positivité : *pour $f \in \mathcal{L}^1(B)$, on a $\tilde{n}(f) \geq 0$ et $\tilde{n}(f) = 0$ si et seulement si $f = 0$ p.p. ;*

inégalité triangulaire : *pour $f, g \in \mathcal{L}^1(B)$, on a $\tilde{n}(f+g) \leq \tilde{n}(f) + \tilde{n}(g)$;*

homogénéité : *pour $f \in \mathcal{L}^1(B)$ et $t \in \mathbb{R}$, on a $\tilde{n}(tf) = |t| \tilde{n}(f)$.*

Pour construire un espace vectoriel normé à partir de l'espace $(\mathcal{L}^1(B), \tilde{n})$, on va simplement identifier deux fonctions intégrables $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(B)$ dès lors qu'elles sont égales p.p. Dans ce cas, on a les égalités $\int_B |f_1 - f_2| d\lambda = 0$, et $\int_B f_1 d\lambda = \int_B f_2 d\lambda$.

Définition 8.2 **L'espace $L^1(B)$.**

Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ une partie mesurable. Pour une fonction intégrable $f \in \mathcal{L}^1(B)$, on note $[f]$ la classe des fonctions intégrables associées à f , c'est-à-dire

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}^1(B) \mid g = f \text{ p.p.}\} \subset \mathcal{L}^1(B).$$

L'espace $L^1(B)$ est alors défini comme l'ensemble des classes de fonctions intégrables, soit

$$L^1(B) = \{[f] \mid f \in \mathcal{L}^1(B)\}.$$

La fonction $f \in \mathcal{L}^1(B)$ est un représentant de la classe $[f]$. Les autres représentants de la classe $[f]$ sont les fonctions $g \in \mathcal{L}^1(B)$ telles que $g = f$ p.p.

Remarque 8.3 En termes mathématiques, l'espace $L^1(B)$ est obtenu comme l'espace quotient de $\mathcal{L}^1(B)$ par la relation d'équivalence définie par

$$f \sim g \text{ si et seulement si } f = g \text{ p.p.}$$

Si cette notion d'espace quotient vous inquiète, pensez simplement qu'on considère comme "égales" deux fonctions dès lors qu'elles sont égales hors d'un ensemble négligeable.

Exemple 8.4 On l'égalité $[\mathbf{1}_{[a,b]}] = [\mathbf{1}_{]a,b]}]$ dans $L^1(\mathbb{R})$ pour tous réels $a \leq b$.

La fonction indicatrice des rationnels, soit $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, est un représentant de la classe nulle dans $L^1(\mathbb{R})$, i.e. $[f] = [0]$ (car $f = 0$ p.p.).

Exercice 8.5 On dit qu'une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dense lorsque tout réel est limite d'une suite d'éléments de A . Par exemple, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $N \subset \mathbb{R}$ une partie négligeable.
 - (a) Montrer que N ne contient aucun intervalle non réduit à un point.
 - (b) En déduire que $A := \mathbb{R} \setminus N$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ une fonction continue et intégrable. Montrer que la classe $[f]$ admet un unique représentant continu, à savoir f .

Proposition 8.6 L'espace vectoriel normé $L^1(B)$. Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ mesurable.

1. L'espace $L^1(B)$ est muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel complexe.
2. Pour $[f] \in L^1(B)$, on sait définir son intégrale par

$$\int_B [f] d\lambda := \int_B f d\lambda \in \mathbb{C},$$

où $f \in \mathcal{L}^1(B)$ est n'importe quelle fonction dans la classe $[f]$.

3. L'application $n : [f] \in L^1(B) \mapsto \int_B [|f|] d\lambda \in [0, \infty[$ est bien définie et vérifie les propriétés suivantes :

positive et définie : pour $[f] \in L^1(B)$ on a $n([f]) \geq 0$, avec égalité $n([f]) = 0$ si et seulement si $[f] = 0$;

inégalité triangulaire : pour $[f], [g] \in L^1(B)$, on a l'inégalité $n([f] + [g]) \leq n([f]) + n([g])$;

homogénéité : pour $[f] \in L^1(B)$ et $t \in \mathbb{C}$, on a $n([tf]) = |t| n([f])$.

En d'autres termes, n est maintenant une norme sur $L^1(B)$.

Preuve 1. Si $f_1 = f_2$ p.p. et $g_1 = g_2$ p.p., on a encore $af_1 + bg_1 = af_2 + bg_2$ p.p. pour tout couple de complexes (a, b) . On définit donc $a[f] + b[g] \in L^1(B)$ comme la classe $[af + bg] \in L^1(B)$ de n'importe quelle fonction $af + bg \in \mathcal{L}^1(B)$ avec $f \in [f]$ et $g \in [g]$.

2. Si les fonctions intégrables f_1 et f_2 sont égales p.p., leurs intégrales sont égales. L'intégrale de $[f]$ est donc bien définie comme la valeur *commune* des intégrales de $f \in \mathcal{L}^1(B)$, pour $f \in [f]$.

3. Conséquence du lemme 8.1 et de la définition de $L^1(B)$. $\square$

Remarque 8.7 Nous n'avons utilisé la notation $[f]$ que pour pouvoir définir soigneusement l'espace $L^1(B)$ et prouver la proposition précédente.

Maintenant que nous avons compris de quoi il s'agit, nous nous affranchirons de cette notation et désignerons simplement par $f \in L^1$ la classe $[f] \in L^1(B)$, tout en étant conscient que la fonction f n'est alors définie qu'à un ensemble négligeable près. On se permettra néanmoins de parler de la "fonction" $f \in L^1(B)$.

Remarque 8.8 Lorsque B est négligeable, l'espace $L^1(B)$ ne contient que la fonction nulle : ce n'est pas passionnant !

Notation 8.9 On désignera désormais par

$$\|f\|_1 := \int_B |f| d\lambda$$

la norme d'une (classe de) fonction(s) $f \in L^1(B)$.

Une des propriétés fondamentales de l'espace vectoriel normé $L^1(B)$ est qu'il est complet. Rappelons la définition d'un espace métrique complet. Cette notion ne nous intéressera ici que pour un espace vectoriel normé.

Définition 8.10 **Espaces complets.**

Soi (E, d) un espace métrique. On dit que cet espace est complet lorsque toute suite de Cauchy d'éléments de E converge (dans E).

En particulier, si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, il est muni de la distance associée définie par $d(f, g) = \|f - g\|$. On dit que l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est complet (ou encore est un espace de Banach) lorsque l'espace métrique associé (E, d) est complet.

La proposition suivante fournit un critère bien utile pour vérifier qu'un espace vectoriel normé est complet. Attention, ce critère n'a de sens que dans un espace vectoriel normé.

Proposition 8.11 **Critère des séries normalement convergentes.**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On suppose que toute série de E normalement convergente est convergente.

Cette hypothèse signifie que, si l'on a une suite (f_n) d'éléments de E telle que la série des normes converge, soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge dans E – autrement dit, il existe un élément $S \in E$ tel que les sommes partielles de la série convergent vers S :

$$\left\| \sum_{k=0}^n f_k - S \right\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Alors, E est complet.

Ebauche de preuve Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E . On veut montrer qu'elle converge. Il suffit pour cela (puisque'elle est de Cauchy) de montrer qu'elle admet une sous-suite convergente.

Quitte à extraire une suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (on désigne encore par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cette sous-suite), on peut supposer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $f_0 = u_0$ et $f_n = u_n - u_{n-1}$ pour $n \geq 1$ vérifie l'hypothèse $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$.

Par hypothèse, la série normalement convergente $\sum f_n$ est convergente, de limite $S \in E$. On a donc $u_n = \sum_{k=0}^n f_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$. $\square$

Théorème 8.12 Théorème de Riesz-Fischer : complétude de L^1 .

Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ mesurable. L'espace vectoriel normé $(L^1(B), \|\cdot\|_1)$ est complet.

Preuve D'après le critère de la proposition 8.11, il suffit de montrer que toute série normalement convergente dans $L^1(B)$ est convergente.

Soit donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n \in L^1(B)$. On suppose que $\sum \|f_n\|_1 < \infty$.

On introduit les sommes partielles $s_n := \sum_{k=0}^n f_k$. On cherche à utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^1(B)$ vers une certaine fonction f (à construire), c'est-à-dire que

$$\|s_n - f\|_1 := \int |s_n - f| d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Le corollaire 2.14 sur les séries de fonctions mesurables positives assure que la série de fonctions positives $\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n|$ converge simplement vers une fonction $g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ dont l'intégrale vaut

$$\|g\|_1 = \int g d\lambda = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int |f_n| d\lambda = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_1 < \infty.$$

La fonction g est donc intégrable. En particulier g est finie presque partout (proposition 4.20), c'est-à-dire en dehors d'un ensemble négligeable N .

Cela signifie que, pour tout $x \notin N$, on a $\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty$. Lorsque $x \notin N$, la série de nombres réels $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente ; on note $f(x)$ sa limite.

La fonction limite f n'est définie que presque partout (hors de N), mais elle fournit un élément de $L^1(B)$ puisque $|f| \leq g$ hors de N .

On constate qu'on a la domination $|s_n - f| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k| \leq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où g est notre fonction intégrable. Ceci permet d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(s_n - f)$ pour conclure que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - f\|_1 = 0,$$

ce qu'on voulait. $\square$

Remarque 8.13 Deux fonctions $f, g \in L^1$ sont proches, c'est-à-dire que $\|f - g\|_1$ est petit, lorsque f et g sont proches en moyenne. La différence $f(t) - g(t)$ peut être très grande en certains points, mais elle ne peut pas être grande sur une trop grosse partie (i.e. sur une partie A dont la "mesure" $\int \mathbf{1}_A d\lambda$ est trop grande).

B Les espaces L^p , pour $1 \leq p \leq \infty$

Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ une partie mesurable. Pour chaque réel $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace vectoriel $\mathcal{L}^p(B)$ des fonctions mesurables $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ de puissance p -ième intégrale, c'est-à-dire telles que $\int |f|^p d\lambda < \infty$, puis son quotient $L^p(B)$ par le sous-espace des fonctions mesurables nulles p.p. L'application

$$f \in L^p(B) \rightarrow \|f\|_p := \left(\int |f|^p d\lambda \right)^{1/p} \in [0, \infty[$$

est alors une norme sur $L^p(B)$. Le fait que $p \geq 1$ joue ici un rôle crucial.

On définit aussi l'espace vectoriel $\mathcal{L}^\infty$ des fonctions mesurables qui sont "essentiellement bornées" :

$$f \in \mathcal{L}^\infty \text{ si et seulement si il existe } M \geq 0 \text{ tel que } |f| \leq M \text{ p.p.}$$

et son quotient L^∞ par le sous-espace des fonctions mesurables nulles p.p. L'application "sup essentiel" définie par

$$f \in L^\infty \mapsto \|f\|_\infty := \inf\{M \geq 0 \mid |f| \leq M \text{ p.p.}\} \in [0, \infty[$$

est une norme sur L^∞ .

Tous ces espaces L^p pour $1 \leq p \leq \infty$ sont des espaces vectoriels normés complets.

Comme nous le verrons dans l'appendice 10 l'espace L^2 a un statut particulier : il s'agit d'un espace hilbertien (c'est le seul espace L^p qui ait cette propriété, i.e. dont la norme provienne d'un produit scalaire).

Proposition 8.14 Inégalité de Hölder.

Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ deux exposants conjugués, c'est-à-dire tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, pour toutes fonctions $f \in L^p$ et $g \in L^q$, le produit $fg \in L^1$ est intégrable et on a l'inégalité

$$\left| \int fg \, d\lambda \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Noter que $(2, 2)$ est un couple d'exposants conjugués.

Lorsque $(p, q) = (2, 2)$, on parle plutôt d'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir de nouveau l'appendice [10](#)).

9. Construction de l'intégrale de Lebesgue

Dans ce dernier chapitre, nous prouvons enfin le théorème 2.4. Il s'agit de construire l'intégrale des fonctions mesurables positives, et de démontrer qu'elle satisfait le théorème de convergence monotone.

Cela va nous demander quelques efforts. Nous allons donc commencer par expliquer comment les choses vont se passer, puis nous passerons à la construction à proprement parler.

Ce chapitre est fondamental pour la construction et la compréhension de l'intégrale de Lebesgue. Les étudiants qui envisagent de continuer plus tard en mathématiques, notamment dans des M2 où il sera question de Probabilités, ne pourront pas s'en passer.

Néanmoins, pour ce qui concerne l'année de LDD3, on peut considérer qu'il est hors programme.

A Intégration via une mesure

Soit X un ensemble. C'est la donnée d'une structure d'espace mesuré $(X, \mathcal{T}, m)$ sur X , c'est-à-dire d'une tribu $\mathcal{T}$ et d'une mesure m sur cette tribu, qui permettent de définir une théorie de l'intégration sur X .

Les notions de tribu et de mesure seront introduites dans ce cadre général au paragraphe B.

Dans l'idée de rester les plus concrets possible, nous ne construirons la théorie de l'intégration associée que lorsque l'espace mesuré $(X, \mathcal{T}, m)$ est la droite réelle $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ munie de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue (ou bien l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, muni de la tribu de ses parties, et de la mesure de comptage). Cela dit, la construction serait la même, à la virgule près, dans le cadre général.

Commençons par motiver la définition de la mesure de Lebesgue. Lors de la construction de l'intégrale de Riemann, nous avons commencé par définir l'intégrale de la fonction indicatrice d'un intervalle (borné), égale à la longueur ℓ de cet intervalle (ou, plus exactement, au produit $\ell \times 1$). On a ensuite prolongé l'intégrale de Riemann "par linéarité" aux fonctions en escaliers, puis "par continuité" aux fonctions réglées.

On souhaiterait savoir intégrer bien plus de fonctions que les fonctions réglées.

Commençons par envisager les fonctions indicatrices de parties (bornées) $A \subset \mathbb{R}$. Si l'on sait définir la “longueur” de A , notée $\lambda(A)$, on aura envie de définir l'intégrale de sa fonction indicatrice par $\int \mathbf{1}_A = \lambda(A) \times 1 = \lambda(A)$.

Malheureusement, il n'est pas possible de définir de façon cohérente la “longueur” de toutes les parties de $\mathbb{R}$, de telle sorte que la longueur de tout intervalle $[a, b]$ soit ce que l'on attend – à savoir égale à $b - a$. Ce résultat négatif est dû à Vitali en 1905. Pour savoir précisément ce que l'on entend par “cohérent”, se reporter à la définition des mesures 9.10. Cependant, pas de panique : pour construire une partie $A \subset \mathbb{R}$ à laquelle on ne sait pas affecter une longueur (on dira alors qu'elle n'est pas mesurable, ou pas borélienne), il faudra se donner beaucoup de mal – et utiliser l'axiome du choix ! Autant dire que ce ne seront pas des exemples très tangibles et, qu'en pratique, toutes les parties de $\mathbb{R}$ que nous serons amenés à rencontrer seront mesurables.

Nous allons donc en un premier temps définir les parties boréliennes de $\mathbb{R}$, ainsi que la mesure de Lebesgue (paragraphe B) dont l'existence sera admise.

Une fois définie la mesure de Lebesgue sur les parties mesurables (ou boréliennes) de $\mathbb{R}$, on dispose de l'intégrale de Lebesgue des fonctions indicatrices de parties mesurables.

On définit alors (paragraphe C) l'intégrale de Lebesgue des fonctions étagées qui sont les combinaisons linéaires positives de fonctions indicatrices de parties mesurables, puis l'intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives par approximation (paragraphe D).

B Mesures et tribus

Nous commençons par introduire le vocabulaire des tribus et des mesures dans un cadre général. Nous présentons alors l'exemple fondamental qui nous intéressera par la suite : la droite réelle $\mathbb{R}$, munie de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

On note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de toutes les parties d'un ensemble X .

Définition 9.1 Tribu, parties mesurables.

Soit X un ensemble. Une tribu sur X est une famille $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ de parties de X vérifiant les axiomes suivants :

1. *l'ensemble vide appartient à $\mathcal{T}$: $\emptyset \in \mathcal{T}$;*
2. *$\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire : si $A \in \mathcal{T}$ alors ${}^c A \in \mathcal{T}$;*
3. *$\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable : si $A_n \in \mathcal{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.*

Les parties $A \in \mathcal{T}$ sont les parties mesurables de X (pour cette tribu).

Remarque 9.2 Il suit que X lui-même appartient à $\mathcal{T}$, et que $\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrables puisque le complémentaire d'une intersection égale la réunion des complémentaires :

$${}^c(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} {}^c A_n.$$

Une tribu est a fortiori stable par union et intersection finies !

Définition 9.3 Espace mesurable.

Un espace mesurable $(X, \mathcal{T})$ est un ensemble X muni d'une tribu $\mathcal{T}$.

Commençons par deux exemples un petit peu caricaturaux (néanmoins, il faut savoir que l'on munira bien souvent $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, ou bien un ensemble fini, de la tribu discrète !)

Exemple 9.4 1. La tribu grossière sur X , définie par $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.
2. La tribu discrète, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, pour laquelle toutes les parties de X sont mesurables.

Passons à une notion plus intéressante qui sera à la base de la construction de la tribu borélienne, celle que nous utiliserons sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 9.5 Tribu engendrée.

Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ une famille de parties de X . Il existe une plus petite tribu $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ contenant $\mathcal{F}$. C'est la tribu engendrée par $\mathcal{F}$.

Preuve Considérons la famille $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ de toutes les tribus de X contenant $\mathcal{F}$, i.e. avec $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}_i \subset \mathcal{P}(X)$. Il en existe, par exemple la tribu discrète. Considérons alors $\mathcal{T} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i \subset \mathcal{P}(X)$. On vérifie que $\mathcal{T}$ est bien une tribu.

Par construction, $\mathcal{T}$ contient $\mathcal{F}$ et c'est la plus petite tribu de X ayant cette propriété. $\square$

Définition 9.6 Exemple fondamental : la tribu borélienne.

Soit $X = \mathbb{R}$, ou bien $X = \mathbb{R}^n$ (ou bien n'importe quel espace métrique). La tribu borélienne sur X est la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de X . On notera cette tribu $\mathcal{B}(X)$.

Lorsque $X = \mathbb{R}$, la tribu borélienne est aussi la tribu sur $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles ouverts.

Lorsque $X = \mathbb{R}^n$, la tribu borélienne est aussi la tribu sur $\mathbb{R}^n$ engendrée par les pavés $\prod_{i=1}^n]a_i; b_i[$.

Les parties mesurables pour la tribu borélienne sont appelés boréliens.

Remarque 9.7 On voudra être capable d'intégrer des fonctions continues. La continuité est liée à la notion d'ouvert. Il est donc raisonnable d'imposer que les ouverts soient des parties mesurables. On considère donc la plus petite tribu qui contienne tous les ouverts.

Exemple 9.8 On travaille dans $X = \mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne.

Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est un borélien.

Tout fermé de $\mathbb{R}$ est borélien.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est un borélien (comme réunion dénombrable de singletons qui sont fermés); il n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

Revenons à un ensemble quelconque X . Comme leur nom l'indique, les parties “mesurables” sont faites pour être mesurées!

Notation 9.9 On désignera par le symbole $\sqcup$ une union disjointe.

Définition 9.10 Espace mesuré, mesure.

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Une mesure sur $(X, \mathcal{T})$ est une application $m : \mathcal{T} \rightarrow [0, +\infty]$ vérifiant les axiomes suivants :

1. la partie vide est de mesure nulle, soit $m(\emptyset) = 0$
2. la mesure est σ -additive : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille dénombrable de parties mesurables de X qui sont deux à deux disjointes, alors

$$m\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(A_n).$$

La donnée $(X, \mathcal{T}, m)$ d'un espace X muni d'une tribu $\mathcal{T}$ et d'une mesure m sur cette tribu est un espace mesuré.

Remarque 9.11 Si on pense que la mesure m permet de définir la longueur (dans $\mathbb{R}$), la surface (dans $\mathbb{R}^2$)... voire le “poids” d'une partie $A \subset X$, il est bien naturel d'imposer les deux axiomes de cette définition. On ne se limite pas aux unions finies (que ce soit dans la définition des tribus ou des mesures) pour avoir par la suite de bons théorèmes de convergence!

Ne pas oublier la condition que les parties soient deux à deux disjointes dans la condition 2. Sinon, on a simplement une inégalité (voir la proposition 9.14).

La mesure d'une partie peut être égale à $+\infty$.

Rappelons la convention $a + \infty = +\infty$ pour tout $a \in [0, +\infty]$ (voir 2.1).

Définition 9.12 Une mesure sur X est finie lorsque $m(X) \in [0, +\infty[$.

C'est une mesure de probabilités lorsque $m(X) = 1$.

Exemple 9.13 Soit X un ensemble muni de la tribu discrète. On peut penser que $X = \mathbb{N}$ ou bien $X = \mathbb{R}$.

- La mesure de comptage associe à toute partie A de X son cardinal (donc $+\infty$ lorsque la partie est infinie).

- Supposons maintenant pour simplifier que $X = \mathbb{N}$, et donnons-nous une application $p : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$. L'application définie pour toute partie $A \subset \mathbb{N}$ par

$$m(A) = \sum_{n \in A} p_n$$

définit une mesure sur $\mathbb{N}$ muni de la tribu discrète. C'est une mesure finie si et seulement si la série de terme général $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Lorsque la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à 1, on retrouve la mesure de comptage.

- Proposition 9.14** 1. Une mesure est finiment additive : si $A_1, \dots, A_k$ sont des parties mesurables deux à deux disjointes, on a $m(\sqcup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k m(A_i)$.
2. Une mesure est croissante : si A, B sont mesurables avec $A \subset B$, on aura $m(A) \leq m(B)$.
3. Pour deux parties mesurables A et B quelconques, on a l'égalité $m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$.
4. Une mesure est sous-additive : pour une suite quelconque de parties mesurables, on a l'inégalité

$$m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} m(A_k).$$

Preuve 1. Compléter la famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ en posant $A_i = \emptyset$ lorsque $i \geq k+1$, et utiliser la σ -additivité de m .

2. Ecrire $B = A \sqcup (B \setminus A)$ (union disjointe) et utiliser l'additivité de la mesure.

3. On décompose en unions disjointes $A = (A \cap B) \sqcup A'$ et $B = (A \cap B) \sqcup B'$. On a alors $A \cup B = (A \cap B) \sqcup A' \sqcup B'$, d'où $m(A \cup B) = m(A') + m(B') + m(A \cap B)$, et l'égalité annoncée en ajoutant $m(A \cap B)$ aux deux membres.

4. On pose $B_0 = A_0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B_k = A_k \setminus (\cup_{i=0}^{k-1} A_i)$ de sorte que les (B_k) sont des parties mesurables de X deux à deux disjointes vérifiant $B_k \subset A_k$ et $\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} B_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$. On conclut avec la croissance de la mesure et la σ -additivité. $\square$

Remarque 9.15 Attention à ne pas écrire en général $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$, qui n'a pas de sens dans le cas où $A \cap B$ est de mesure infinie ($\infty - \infty$ est indéterminé!).

On passe maintenant à un résultat élémentaire, mais fondamental, puisqu'il contient en germe les théorèmes de convergence monotone 9.35 et de convergence dominée 4.25.

Théorème 9.16 On travaille dans un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, m)$.

1. Petit théorème de convergence monotone.

Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de parties mesurables, c'est-à-dire avec $A_k \subset A_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sup_{k \in \mathbb{N}} m(A_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n).$$

2. Petit théorème de convergence dominée.

Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties mesurables, c'est-à-dire avec $A_{k+1} \subset A_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si de plus toutes ces parties sont de mesure finie, c'est-à-dire si $m(A_0) < \infty$, alors on a

$$m\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \inf_{k \in \mathbb{N}} m(A_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_k).$$

Remarque 9.17 • Dans 1., la suite (A_k) est croissante donc la suite $(m(A_k))$ des mesures est croissante et converge vers $\sup m(A_k) \in [0, +\infty]$.

On retrouve bien 9.16.1 comme cas particulier du théorème de convergence monotone, que l'on l'applique à la suite croissante de fonctions mesurables positives $f_k := \mathbb{1}_{A_k}$ qui converge simplement vers la fonction indicatrice $f := \mathbb{1}_{\cup_k A_k}$ de la réunion des A_k .

• Dans 2., la suite (A_k) est décroissante donc la suite $(m(A_k))$ des mesures est décroissante et converge vers $\inf m(A_k) \in [0, \infty[$.

On retrouve bien 9.16.2 comme cas particulier du théorème de convergence dominée, que l'on l'applique à la suite décroissante de fonctions mesurables positives $f_k := \mathbb{1}_{A_k}$ qui converge simplement vers la fonction indicatrice $f := \mathbb{1}_{\cap_k A_k}$ de l'intersection des A_k , en remarquant que toutes les fonctions f_k sont dominées par f_0 , qui est intégrable par hypothèse puisque $m(A_0) < \infty$.

• Cela dit, nous n'avons pas le droit d'utiliser les théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée pour démontrer 9.16 : ces théorèmes n'ont pas encore été démontrés, et l'intégrale de Lebesgue n'a même pas encore été construite !

• L'hypothèse $m(A_0) < \infty$ est indispensable dans le 2. de la proposition précédente. En effet, travaillons dans $X = \mathbb{N}$ muni de la tribu discrète et de la mesure de comptage. Soit $A_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}$. On a $m(A_k) = \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pourtant $\cap A_k = \emptyset$ est de mesure nulle.

Preuve du théorème 9.16

1. On pose $B_0 = A_0$ puis $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ lorsque $k \geq 1$. Par construction, les parties (B_k) sont mesurables, deux à deux disjointes et l'on a $A_k = \sqcup_{i=0}^k B_i$ ($k \in \mathbb{N}$) et $\cup_{k=0}^{\infty} A_k = \sqcup_{k=0}^{\infty} B_k$.

On a donc $m(A_k) = \sum_{i=0}^k m(B_i)$ ($k \in \mathbb{N}$). Puis, par σ -additivité de m :

$$m\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = m\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k\right) = \sum_{i=0}^{\infty} m(B_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k m(B_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k).$$

2. Dans la preuve qui suit, on peut penser que l'espace ambiant est non plus X , mais la partie A_0 qui est de mesure finie. Faire des dessins.

On introduit la famille de parties mesurables définie par $B_0 = A_0$ et $B_k = A_0 \setminus A_k$ pour $k \geq 1$. On a donc, pour $k \geq 1$, $m(A_0) = m(A_k) + m(B_k)$. La famille (B_k) est maintenant croissante, avec $\cup_{k \in \mathbb{N}} B_k = A_0 \setminus (\cap_{k \in \mathbb{N}} A_k)$. On a donc $m(A_0) = m(\cap_{k \in \mathbb{N}} A_k) + m(\cup_{k \in \mathbb{N}} B_k)$ tandis que, d'après 1. :

$$m(\cup_{k \in \mathbb{N}} B_k) = \sup m(B_k) = \sup_{k \in \mathbb{N}} (m(A_0) - m(A_k)) = m(A_0) - \inf_{k \in \mathbb{N}} m(A_k).$$

Le résultat s'en déduit. $\square$

On introduit maintenant la mesure qui nous intéressera au premier chef.

Théorème 9.18 La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Il existe une unique mesure λ sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne et qui vérifie, pour tout intervalle ouvert :

$$\lambda(]a, b[) = b - a.$$

Il s'agit d'un théorème délicat à démontrer, tant pour l'existence que pour l'unicité, et nous l'admettons.

Exercice 9.19 Montrer qu'on a également $\lambda([a, b]) = \lambda(]a, b]) = \lambda([a, b[) = b - a$ pour tous réels $a \leq b$.

Exercice 9.20 1. Montrer que la mesure de Lebesgue est invariante par translations : si $A \subset \mathbb{R}$ est un borélien et $t \in \mathbb{R}$, on a $\lambda(A + t) = \lambda(A)$.

On pourra fixer $t \in \mathbb{R}$, et montrer que l'application

$$m_t : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto \lambda(A + t) \in [0, +\infty]$$

est une mesure sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ qui vérifie $m_t(]a, b]) = b - a$ pour tous $a < b$.

2. Montrer de même l'égalité $\lambda(-A) = \lambda(A)$ pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}$, où l'on note $-A = \{-a \mid a \in A\}$.
3. Soit $s \in \mathbb{R}$. Montrer également que $\lambda(sA) = |s| \lambda(A)$ pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}$ où $sA = \{sa \mid a \in A\}$.

Remarque 9.21 Nous disposons donc maintenant de la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On peut se demander si on ne s'est pas compliqué la vie pour rien : pourquoi avoir introduit la notion de tribu, et en particulier pourquoi se limiter à la tribu borélienne pour définir la mesure de Lebesgue ?

Reformulons la question plus précisément : est-il possible de définir une "mesure de Lebesgue" sur la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de toutes les parties de $\mathbb{R}$? Par mesure de Lebesgue, on entend une mesure $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$ définie sur la tribu de toutes les parties de $\mathbb{R}$, et qui vérifierait $m([a, b]) = b - a$ pour tout segment.

Vous vous en doutez, la réponse est non. C'est la difficulté qu'on évoquait dans le paragraphe introductif 9.A lorsqu'on disait qu'il n'est pas possible de définir de façon cohérente la "longueur" de toute partie de $\mathbb{R}$.

La production d'un contre-exemple n'est pas très difficile, mais nécessite l'utilisation de l'axiome du choix. Un contre-exemple a été donné par Vitali en 1905. Il a exhibé une partie $\mathcal{V} \subset [0, 1]$ qui vérifie les inclusions

$$[0, 1] \subset \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ -1 \leq r \leq 1}} \mathcal{V} + r \subset [-1, 2], \quad (9.1)$$

l'union étant disjointe. Si on savait définir la mesure de $\mathcal{V}$, celle-ci devrait être strictement positive (inclusion de gauche) et nulle (inclusion de droite).

On peut prendre pour $\mathcal{V}$ un ensemble de représentants des classes de $\mathbb{R}$ modulo $\mathbb{Q}$.

C Fonctions mesurables, intégrale des fonctions étagées

Dans un souci de simplification, nous nous restreignons désormais à $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ muni de sa tribu borélienne. Cependant tout ce qui suit peut être transposé mot par mot au cadre général d'un espace mesurable quelconque $(X, \mathcal{T})$, par exemple $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ comme au chapitre 5.

Dans la suite, lorsqu'on parlera de parties mesurables de $\mathbb{R}$, il s'agira de parties mesurables pour la tribu borélienne, c'est-à-dire de boréliens.

Proposition-Définition 9.22 Fonctions mesurables.

Une fonction $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow \mathbb{R}$ est dite mesurable, ou encore borélienne, si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

1. *l'image réciproque par f de tout intervalle de $\mathbb{R}$ est mesurable ;*
2. *l'image réciproque par f de tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est mesurable ;*
3. *l'image réciproque par f de tout ouvert de $\mathbb{R}$ est mesurable ;*
4. *l'image réciproque par f de tout borélien de $\mathbb{R}$ est mesurable.*

Preuve $1 \Rightarrow 2$ Est immédiat.

$2 \Rightarrow 3$ Rappelons qu'un ouvert $U \subset \mathbb{R}$ est réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts (disjoints), soit $U = \cup_{k \in \mathbb{N}} I_k$. On a donc $f^{-1}(U) = \cup_{k \in \mathbb{N}} f^{-1}(I_k)$ mesurable comme union finie ou dénombrable de parties mesurables.

$3 \Rightarrow 4$ On considère l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ dont l'image réciproque par f est mesurable, soit

$$\mathcal{T} = \{B \subset \mathbb{R} \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

On vérifie facilement que $\mathcal{T}$ est une tribu. Par hypothèse, $\mathcal{T}$ contient les ouverts. Donc $\mathcal{T}$ contient la tribu engendrée par les ouverts, c'est-à-dire contient $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, ce qu'on voulait.

4 $\Rightarrow$ 1 Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est borélien (exemple 9.8). $\square$

Exemple 9.23 • Une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable.

- Une fonction en escalier $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, prolongée par 0 hors de l'intervalle $[a, b]$, est mesurable.

- Une fonction monotone est mesurable.

- Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$. La fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ est une fonction mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire si A est mesurable.

Comme on l'a dit plus haut, nous ne nous préoccupons en pratique pas des questions de mesurabilité. En effet, il est tellement coûteux de produire une fonction non mesurable qu'on est assurés de ne pas en rencontrer une par hasard ! On se permettra donc d'admettre notamment le résultat suivant (même s'il n'est pas difficile).

Lemme 9.24 Stabilité de la mesurabilité.

Rappelons que l'espace $\mathbb{R}$ est implicitement muni de sa tribu borélienne.

1. Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions mesurables, leur somme $f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et leur produit $fg : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables.

On a également $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ mesurables.

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ mesurable ne s'annule pas, son inverse $1/f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ est mesurable.

2. Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f est mesurable.

On a vu qu'il peut être utile de savoir intégrer des fonctions à valeurs complexes, notamment lorsqu'on parle de séries de Fourier (voir le chapitre 11).

Proposition-Définition 9.25 Fonctions complexes mesurables.

Une fonction $f = u + iv : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est mesurable si et seulement si ses parties réelles $u = \operatorname{Re}(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et imaginaire $v = \operatorname{Im}(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables.

Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sont mesurables, les fonctions $f + g$, fg et $|f|$ sont mesurables.

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est mesurable, il existe une fonction mesurable $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, telle que $|h(x)| = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et telle que $f = h|f|$.

Preuve Pour la dernière assertion, on procède comme suit. Puisque f est mesurable, l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ est mesurable. Il suffit de poser $h(x) = 1$ si $x \in A$ et $h(x) = f(x)/|f(x)|$ sinon. $\square$

On est parfois amenés à manipuler des fonctions à valeurs dans $[0, +\infty]$ ou $[-\infty, +\infty]$ (qui apparaissent notamment comme limites de suites non bornées de fonctions à valeurs réelles, voir le paragraphe D par exemple).

Définition 9.26 Demi-droite achevée.

La demi-droite achevée est $[0, +\infty]$, muni de la relation d'ordre qui prolonge celle de $[0, \infty[$ et telle que $x < +\infty$ pour tout $x \in [0, \infty[$.

Ses intervalles ouverts sont les intervalles ouverts de $]0, \infty[$ ainsi que $[0, +\infty]$, $]x, \infty]$ et $[0, x[$ pour $x \in \mathbb{R}$. On définit de même les intervalles fermés, et les intervalles quelconques de $[0, +\infty]$.

Une suite (x_n) de $[0, +\infty]$ converge vers $z \in [0, +\infty]$ lorsque, pour tout intervalle ouvert $I \subset [0, +\infty]$ contenant z , on a $x_n \in I$ lorsque n est assez grand.

Une fonction $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow [0, +\infty]$ est mesurable si l'image réciproque par f de tout intervalle (ou bien de tout intervalle ouvert) de $[0, +\infty]$ est mesurable.

On a bien sûr des définitions (et des résultats) semblables dans $[-\infty, +\infty]$.

Propriété 9.27 Une partie non vide de $[0, +\infty]$ admet une borne supérieure et une borne inférieure qui sont respectivement son plus petit majorant et son plus grand minorant (dans $[0, +\infty]$).

Le lemme 9.24 se généralise comme suit.

Lemme 9.28 Stabilité de la mesurabilité (bis).

1. Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ sont deux fonctions mesurables, on a également $\max(f, g) : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ et $\min(f, g) : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ mesurables.

2. Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$. Alors f est mesurable.

3. Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables. Alors $\sup f_n : \mathbb{R} \rightarrow]-\infty, +\infty] \subset [-\infty, +\infty]$ est mesurable.

Exemple 9.29 Soit, pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f_n(x) = x^n$ si $x \geq 0$. Ces fonctions sont continues donc mesurables.

La fonction $f := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ est définie par $f(x) = 0$ si $x < 1$, $f(1) = 1$ et $f(x) = +\infty$ lorsque $x > 1$. Elle est mesurable.

D Intégrale des fonctions positives

On commence par définir l'intégrale, pour la mesure de Lebesgue λ , d'une fonction étagée sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Les fonctions étagées sont aux parties mesurables ce que les fonctions en escalier positives sont aux intervalles.

On définira ensuite l'intégrale des fonctions mesurables positives.

Définition 9.30 Fonction étagée.

Une fonction positive $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ est étagée si elle est mesurable et si elle prend un nombre fini de valeurs.

Dans ce cas, si $c_1, \dots, c_k$ sont les valeurs distinctes prises par f , on a l'égalité $f = \sum_{i=1}^k c_i \mathbb{1}_{A_i}$ où les $A_i := f^{-1}(c_i)$ sont mesurables.

Rappelons que λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Définition 9.31 Intégrale de Lebesgue d'une fonction étagée.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ une fonction étagée, et $c_1, \dots, c_k \in [0, +\infty]$ les valeurs distinctes prises par f de sorte que $f = \sum_{i=1}^k c_i \mathbb{1}_{A_i}$ où $A_i := f^{-1}(c_i)$. On définit alors (avec la convention 2.1) l'intégrale de Lebesgue de f comme

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \sum_{i=1}^k c_i \lambda(A_i) \in [0, +\infty].$$

On peut, dans l'écriture de f ou le calcul de son intégrale, se permettre d'omettre la valeur nulle lorsqu'elle est prise par f .

Proposition 9.32 Soient $d_1, \dots, d_\ell$ des réels positifs ou nuls, et $B_1, \dots, B_\ell$ des parties mesurables de $\mathbb{R}$. La fonction $\sum_{j=1}^{\ell} d_j \mathbb{1}_{B_j}$ est étagée et son intégrale vaut

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{\ell} d_j \mathbb{1}_{B_j} d\lambda = \sum_{j=1}^{\ell} d_j \lambda(B_j).$$

Preuve La petite nuance par rapport à la définition 9.31 vient de ce que l'écriture $f = \sum_{j=1}^{\ell} d_j \mathbb{1}_{B_j}$ n'est pas forcément l'écriture "canonique" $f = \sum_{i=1}^k c_i \mathbb{1}_{A_i}$ – avec $A_i := f^{-1}(c_i)$ – qui intervient dans cette définition. (On rencontre une difficulté semblable lors de la définition de l'intégrale d'une fonction en escalier).

Premier cas : Les ensembles (B_j) sont deux à deux disjoints. Dans ce cas les réels d_j sont les valeurs prises par f (mais les d_j ne sont plus forcément distincts) et on a donc pour tout $i = 1, \dots, k$

$$A_i = \bigsqcup_{\substack{1 \leq j \leq \ell \\ d_j = c_i}} B_j.$$

Ainsi on obtient par additivité de la mesure :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda &= \sum_{i=1}^k c_i \lambda(A_i) = \sum_{i=1}^k c_i \left(\sum_{\substack{1 \leq j \leq \ell \\ d_j = c_i}} \lambda(B_j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\sum_{\substack{1 \leq j \leq \ell \\ d_j = c_i}} d_j \lambda(B_j) \right) = \sum_{j=1}^{\ell} d_j \lambda(B_j). \end{aligned}$$

Second cas : Les ensembles (B_j) sont quelconques. Pour simplifier l'écriture, on se contente d'écrire la preuve lorsque $f = d_1 \mathbb{1}_{B_1} + d_2 \mathbb{1}_{B_2}$, le cas général étant similaire.

On décompose $B_1 = B'_1 \sqcup (B_1 \cap B_2)$ et $B_2 = B'_2 \sqcup (B_1 \cap B_2)$, et l'on obtient la décomposition canonique de f , soit $f = d_1 \mathbb{1}_{B'_1} + d_2 \mathbb{1}_{B'_2} + (d_1 + d_2) \mathbb{1}_{B_1 \cap B_2}$. Il vient alors par définition de l'intégrale de f , puis en regroupant :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda &= d_1 \lambda(B'_1) + d_2 \lambda(B'_2) + (d_1 + d_2) \lambda(B_1 \cap B_2) \\ &= d_1 (\lambda(B'_1) + \lambda(B_1 \cap B_2)) + d_2 (\lambda(B'_2) + \lambda(B_1 \cap B_2)) \\ &= d_1 \lambda(B_1) + d_2 \lambda(B_2). \end{aligned} \quad \square$$

Corollaire 9.33 Propriétés de l'intégrale des fonctions étagées.

1. *L'intégrale des fonctions étagées est croissante : si $f \leq g$ sont deux fonctions étagées, on a $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda$.*
2. *L'intégrale des fonctions étagées est "positivement linéaire" : si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ sont étagées et si $\alpha, \beta \geq 0$ sont deux réels positifs, on a*

$$\int_{\mathbb{R}} (\alpha f + \beta g) \, d\lambda = \alpha \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda + \beta \int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda.$$

Preuve C'est une conséquence de la proposition 9.32. Pour pouvoir l'utiliser, on commence par écrire simultanément les fonctions étagées f et g comme combinaisons linéaires d'une même famille de fonctions indicatrices.

On écrit les fonctions étagées f et g sous forme normalisée (voir la définition 9.30) $f = \sum_{i=1}^k a_i \mathbb{1}_{A_i}$ et $g = \sum_{j=1}^{\ell} b_j \mathbb{1}_{B_j}$, où les (a_i) sont les valeurs distinctes (éventuellement nulles) prises par f et les (b_j) sont les valeurs distinctes (éventuellement nulles) prises par g , de sorte que les $A_i := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = a_i\}$ sont des parties mesurables qui constituent une partition de $\mathbb{R}$, de même pour les B_j .

Les parties $(A_i \cap B_j)_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq \ell}$ sont donc deux à deux disjointes (peuvent être vides pour certaines d'entre elles), et leur réunion est $\mathbb{R}$. Sur $A_i \cap B_j$, f et g sont toutes deux constantes, respectivement égales à a_i et b_j , de sorte que

$$f = \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq \ell}} a_i \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}, \quad g = \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq \ell}} b_j \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}. \quad (9.2)$$

1. Supposons $f \leq g$. Si $A_i \cap B_j$ est non vide, la condition $f \leq g$ impose que $a_i \leq b_j$. Il suit de (9.2) que

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq \ell}} a_i \lambda(A_i \cap B_j) \leq \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq \ell}} b_j \lambda(A_i \cap B_j) = \int_{\mathbb{R}} g d\lambda.$$

2. Pour deux réels positifs $\alpha, \beta \geq 0$ on a d'après (9.2)

$$\alpha f + \beta g = \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq \ell}} (\alpha a_i + \beta b_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$$

donc, par 9.32 et en regroupant les termes :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (\alpha f + \beta g) d\lambda &= \alpha \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq \ell}} a_i \lambda(A_i \cap B_j) \right) + \beta \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq \ell}} b_j \lambda(A_i \cap B_j) \right) \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}} f d\lambda + \beta \int_{\mathbb{R}} g d\lambda. \end{aligned} \quad \square$$

Passons à l'intégrale d'une fonction mesurable à valeurs positives (ou à valeurs dans $[0, +\infty]$).

Définition 9.34 Intégrale d'une fonction mesurable positive.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive.

On définit l'intégrale de f au sens de Lebesgue par

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f d\lambda &:= \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} h d\lambda \mid \text{où } h : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty] \text{ est étagée telle que } 0 \leq h \leq f \right\} \\ &\in [0, +\infty]. \end{aligned}$$

Il suit immédiatement de la définition que l'intégrale des fonctions mesurables positives est croissante : en effet, si $f \leq g$, toute fonction $h \leq f$ vérifie également $h \leq g$. Cette propriété sera néanmoins rappelée en 9.37. Nous l'utiliserons ci-dessous dans la preuve du théorème de convergence monotone.

Théorème 9.35 Théorème de convergence monotone (Beppo Levi).

Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ une suite croissante de fonctions mesurables positives : $f_n \leq f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On définit $f := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \sup_{n \rightarrow +\infty} f_n$. Alors $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ est mesurable positive et

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda.$$

Il s'agit d'une inversion de limite et d'intégrale. La conclusion du théorème est en effet que (sous les hypothèses ci-dessus)

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda.$$

Preuve Puisque la suite (f_n) est croissante, la monotonie de l'intégrale des fonctions mesurables positives (proposition 9.37) assure que la suite des intégrales $(I_n := \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $J := \int_{\mathbb{R}} f d\lambda$, donc converge vers un réel (étendu) $I := \sup I_n \in [0, J] \subset [0, +\infty]$.

Pour obtenir le théorème, il nous reste à montrer l'inégalité $J \leq I$. Il va falloir revenir à la définition de l'intégrale de f via les fonctions étagées (définition 9.34).

Soit donc $h = \sum_{i=1}^k c_i \mathbb{1}_{A_i}$ une fonction étagée telle que $h \leq f$. On va montrer l'inégalité $\int_{\mathbb{R}} h d\lambda \leq I$. En revenant à la définition de $J := \int_{\mathbb{R}} f d\lambda$, c'est-à-dire en passant au sup sur les fonctions étagées h majorées par f , on obtiendra que $J \leq I$. Ceci terminera la démonstration.

Notre fonction étagée h vérifie $h \leq f$. On veut se donner un peu de marge. On choisit donc une constante $0 < c < 1$, de sorte que $ch(x) < f(x)$ lorsque $f(x) \neq 0$. On introduit alors, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n = \{x \in \mathbb{R} \mid ch(x) \leq f_n(x)\}.$$

C'est une suite croissante $B_n \subset B_{n+1}$ de parties mesurables de $\mathbb{R}$. Et l'on a $\mathbb{R} = \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ (d'où l'intérêt de la constante $c < 1$!)

Chacune des fonctions $h \mathbb{1}_{B_n} = \sum_{i=1}^k c_i \mathbb{1}_{A_i \cap B_n}$ est étagée, d'intégrale $\int_{\mathbb{R}} h \mathbb{1}_{B_n} d\lambda = \sum_{i=1}^k c_i \lambda(A_i \cap B_n)$. Pour $i = 1, \dots, k$, la suite de parties $(A_i \cap B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $\cup_{n \in \mathbb{N}} (A_i \cap B_n) = A_i \cap (\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = A_i$. Le petit théorème de convergence monotone 9.16 assure donc la convergence $\int_{\mathbb{R}} h \mathbb{1}_{B_n} d\lambda \rightarrow \int_{\mathbb{R}} h d\lambda$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

L'intégrale des fonctions étagées est positivement homogène et croissante. On obtient donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$c \int_{\mathbb{R}} h \mathbb{1}_{B_n} d\lambda = \int_{\mathbb{R}} ch \mathbb{1}_{B_n} d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f_n \mathbb{1}_{B_n} d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = I_n \leq I.$$

En faisant tendre n vers ∞ , il vient donc

$$c \int_{\mathbb{R}} h d\lambda \leq I.$$

Ceci étant vrai pour tout $c < 1$, il vient finalement que $\int_{\mathbb{R}} h d\lambda \leq I$. Comme expliqué plus haut, ceci termine la démonstration. $\square$

Avant de passer aux propriétés de l'intégrale des fonctions mesurables positives, observons que toute fonction de ce type peut s'obtenir comme limite croissante d'une suite de fonctions étagées. On peut même rendre cette construction explicite.

Lemme 9.36 Fonction mesurable positive comme limite croissante de fonctions étagées.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. La suite (f_n) de fonctions étagées définies par

$$f_n(x) = 2^n \text{ si } f(x) \geq 2^n \quad \text{et} \quad f_n(x) = \frac{p}{2^n} \text{ si } \frac{p}{2^n} \leq f(x) < \frac{p+1}{2^n} \leq 2^n.$$

converge en croissant vers f .

Preuve Immédiate. □

Proposition 9.37 Propriétés de l'intégrale des fonctions positives.

1. L'intégrale des fonctions mesurables positives est croissante : si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ sont deux fonctions mesurables positives telles que $f \leq g$, alors $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} g d\lambda$.
2. L'intégrale des fonctions mesurables positives est positivement linéaire.
3. Lorsque f est étagée, on retrouve l'intégrale définie précédemment.

Preuve 1. Si $f \leq g$, toute fonction étagée telle que $h \leq f$ vérifie a fortiori $h \leq g$.

2. Soient f, g deux fonctions mesurables positives. On les approche respectivement par deux suites croissantes (f_n) et (g_n) de fonctions étagées, par exemple en utilisant le lemme 9.36.

Soient $\alpha, \beta \geq 0$ deux réels. La suite de fonctions étagées $(\alpha f_n + \beta g_n)$ converge en croissant vers $\alpha f + \beta g$. Le théorème de convergence monotone et la proposition 9.33 (l'intégrale des fonctions étagées est positivement linéaire) donnent alors le résultat voulu puisque :

$$\begin{aligned} \int (\alpha f + \beta g) d\lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int (\alpha f_n + \beta g_n) d\lambda \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha \int f_n d\lambda + \beta \int g_n d\lambda \right) = \alpha \int f d\lambda + \beta \int g d\lambda. \end{aligned}$$

3. Pour h étagée avec $h \leq f$, on a en effet $\int_{\mathbb{R}} h d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f d\lambda$ avec égalité si l'on choisit $h = f$. □

Exercice 9.38 Invariance de l'intégrale : symétrie, translation, homothétie. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. Montrer, pour $x \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}^*$, les égalités

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(t) d\lambda(t) &= \int_{\mathbb{R}} f(-t) d\lambda(t) \\ \int_{\mathbb{R}} f(t) d\lambda(t) &= \int_{\mathbb{R}} f(x+t) d\lambda(t) \\ \int_{\mathbb{R}} f(t) d\lambda(t) &= |s| \int_{\mathbb{R}} f(st) d\lambda(t). \end{aligned}$$

On commencera par traiter le cas des fonctions étagées en utilisant l'exercice 9.20.

E Séries et intégrales

Dans cette section, nous évoquons rapidement le lien entre la théorie des séries numériques, et la théorie de l'intégration.

Nous nous intéressons à la théorie de l'intégration sur l'ensemble $X = \mathbb{N}$ des entiers naturels, muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de toutes ses parties et de la mesure de comptage $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, +\infty]$ définie pour toute partie $A \subset \mathbb{N}$ par $\mu(A) = \text{card}(A)$.

Une fonction $u : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$ n'est autre qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0, +\infty]$. Puisque la tribu considérée sur $\mathbb{N}$ est la tribu de toutes ses parties, toute fonction $u : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$ (ou $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$) est mesurable.

La démarche suivie dans le paragraphe D dans le cadre de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ nous permet de définir l'intégrale pour la mesure de comptage μ des fonctions étagées $u : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$ (c'est-à-dire des fonctions $u : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$ qui prennent un nombre fini de valeurs), puis de passer à l'intégrale $\int_{\mathbb{N}} u d\mu \in [0, +\infty]$ d'une fonction positive $u : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$.

Lemme 9.39 *Soit $u : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction étagée. Alors*

$$\int_{\mathbb{N}} u d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} u(n). \quad (9.3)$$

Preuve Soient $a_1, \dots, a_k \in [0, +\infty]$ les valeurs distinctes prises par u , et $A_j := \{n \in \mathbb{N} \mid u(n) = a_j\}$ pour $1 \leq j \leq k$. On a, par construction,

$$\int_{\mathbb{N}} u d\mu = \sum_{j=1}^k a_j \mu(A_j) = \sum_{j=1}^k a_j \text{card}(A_j).$$

Lorsque u prend une infinité de fois une valeur non nulle, les deux membres de l'égalité (9.3) valent $+\infty$.

Si la fonction u est nulle sauf en un nombre fini d'entiers $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{n \in \mathbb{N}} u(n)$ est une somme portant sur un nombre fini de termes, et on a bien l'égalité (9.3). $\square$

Corollaire 9.40 *Soit $u : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction positive. Alors*

$$\int_{\mathbb{N}} u d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} u(n). \quad (9.4)$$

Preuve On introduit, pour chaque entier $p \in \mathbb{N}$, la fonction tronquée $v_p : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$ définie par $v_p(n) = u(n)$ lorsque $n \leq p$ et $v_p(n) = 0$ sinon. Par construction, chaque fonction $v_p : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]$ est étagée, et la suite (v_p) converge en croissant vers u . Le résultat annoncé découle donc du théorème de convergence monotone, et de l'égalité 9.3 appliquée à chaque fonction v_p . $\square$

On obtient alors, en revenant à la définition d'une fonction intégrable, et de l'intégrale d'une telle fonction, le corollaire suivant.

Corollaire 9.41 Soit $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors u est intégrable pour la mesure de comptage si et seulement si la série de terme général (u_n) est sommable (ou absolument convergente), c'est-à-dire si et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| < \infty$. Dans ce cas, on a l'égalité

$$\int_{\mathbb{N}} u \, d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} u(n). \quad (9.5)$$

Maintenant que nous avons défini l'intégrale de Lebesgue sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, voyons comment s'expriment les grands théorèmes de la théorie de l'intégration dans ce contexte.

- Dans le chapitre 5, on a énoncé le théorème de Fubini dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Les résultats correspondants dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$, ou bien dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, sont également vrais. Enonçons l'un d'entre eux.

Proposition 9.42 Fubini-Tonelli dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

Soit $u : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ (mesurable) positive. On note $u_n(t) = u(n, t)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. On a alors l'égalité

$$\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{R}} u_n(t) \, d\lambda(t) \right) d\mu(n) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{N}} u_n(t) \, d\mu(n) \right) d\lambda(t). \quad (9.6)$$

En d'autres termes, on a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{R}} u_n(t) \, d\lambda(t) \right) = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(t) \right) d\lambda(t). \quad (9.7)$$

L'égalité (9.7) n'est autre que le corollaire 2.14 sur l'intégrale des séries de fonctions positives ! On laisse au lecteur le soin d'énoncer, et d'interpréter en termes de séries de fonctions (resp. de séries doubles), le théorème de Fubini dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$, ainsi que les deux théorèmes de Fubini dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

- De même, les théorèmes de continuité et de dérivabilité “sous le signe $\int$ ”, que l'on avait énoncés dans $\mathbb{R}$, ont des analogues sur $\mathbb{N}$ qui s'interprètent en des théorèmes de continuité et de dérivabilité “sous le signe $\sum$ ”.

10. Appendice : Espaces de Hilbert

Vous êtes familiers avec les espaces vectoriels euclidiens de dimension finie. En dimension 2, c'est votre feuille de papier ; en dimension 3, c'est l'espace dans lequel nous nous déplaçons ; et l'intuition s'étend aisément à la dimension n .

En dimension quelconque, les espaces de Hilbert généralisent ces espaces euclidiens de dimension finie. Ils constituent les espaces vectoriels normés de dimension infinie les plus simples à appréhender car leur géométrie est calquée sur celle de $\mathbb{R}^n$ euclidien.

La notion d'espace de Hilbert est fondamentale pour qui veut faire un tant soit peu d'Analyse. En effet, de nombreux espaces fonctionnels sont naturellement munis d'une structure d'espace de Hilbert et les propriétés géométriques "abstraites" des espaces de Hilbert, lues dans les espaces fonctionnels hilbertiens ad hoc, se traduisent en de profonds théorèmes d'Analyse.

Nous nous intéresserons ici aux espaces L^2 (fonctions de carré intégrable), l'objectif étant de mener à bien l'étude hilbertienne des séries de Fourier.

Pour ceux qui continueront à faire des Probabilités, mentionnons que le théorème de la projection 10.26 permet de définir la notion d'espérance conditionnelle relative à une sous-tribu.

Les espaces de Sobolev (penser que ce sont "des fonctions L^2 à dérivées L^2 "), qui interviennent dans l'étude des Equations aux Dérivées Partielles, constituent d'autres exemples d'espaces de Hilbert.

A L'espace $\mathbb{R}^n$ euclidien

Dans ce paragraphe, on reste en dimension finie, et on rappelle ce qu'est $\mathbb{R}^n$ euclidien. Commençons par rappeler la définition générale d'une norme.

Définition 10.1 Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou bien sur $\mathbb{C}$). Une norme sur E est une application $\| \cdot \| : E \rightarrow [0, \infty[$ qui vérifie les propriétés suivantes :

séparation : $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$;

homogénéité : on a $\|tx\| = |t| \|x\|$ pour tout scalaire $t \in \mathbb{R}$ (ou $t \in \mathbb{C}$) et tout vecteur $x \in E$;

inégalité triangulaire : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tous $x, y \in E$.

Un exemple fondamental est la norme associée à la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.

Définition 10.2 Structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.

On définit une norme $\| \cdot \|$ sur $\mathbb{R}^n$ en posant, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = (\sum_{j=1}^n x_j^2)^{1/2}$.

Cette norme est euclidienne, au sens où elle provient du produit scalaire (bilinéaire, symétrique et défini positif) défini par

$$(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^n x_j y_j \in \mathbb{R}.$$

On a en effet $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

B Espaces hermitiens, espaces de Hilbert

Notre objectif est de parler de séries de Fourier. Pour ce faire, il est bien plus agréable de travailler avec des fonctions à valeurs complexes. Nous généralisons donc à des espaces vectoriels complexes, et de dimension quelconque, la notion de structure euclidienne dont nous avons muni $\mathbb{R}^n$ au paragraphe précédent.

Revenons d'abord sur l'exemple de la dimension 1 pour mieux comprendre le passage des espaces vectoriels réels aux espaces vectoriels complexes.

- La norme canonique sur $\mathbb{R}$, espace vectoriel réel de dimension 1, est définie par $x \in \mathbb{R} \mapsto |x| = (x^2)^{1/2} \in [0, \infty[$.
- La norme canonique sur $\mathbb{C}$, espace vectoriel complexe de dimension 1, est définie par $z \in \mathbb{C} \mapsto |z| = (z\bar{z})^{1/2} \in [0, \infty[$.

Passons maintenant à la dimension quelconque, d'abord sur $\mathbb{C}$ puisque c'est ce qui nous intéressera dans les applications.

Définition 10.3 Produit scalaire hermitien.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Un produit scalaire hermitien sur E est une application $(x, y) \in E \times E \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{C}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. **linéaire à gauche :**

pour tout $y_0 \in E$, l'application $x \in E \mapsto \langle x, y_0 \rangle \in \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$ -linéaire ;

2. **anti-linéaire à droite :**

pour tout $x_0 \in E$, l'application $y \in E \mapsto \langle x_0, y \rangle \in \mathbb{C}$ est anti-linéaire, c'est-à-dire que pour $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$ et $y_1, y_2 \in E$, on a

$$\langle x_0, t_1 y_1 + t_2 y_2 \rangle = \bar{t}_1 \langle x_0, y_1 \rangle + \bar{t}_2 \langle x_0, y_2 \rangle$$

où $\bar{t}$ désigne bien sûr le complexe conjugué de t ;

3. **symétrie hermitienne** : on a $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ pour tous $x, y \in E$;
4. **défini positif** : on a $\langle x, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in E$ avec égalité $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Remarque 10.4 Lorsque les conditions (1) et (3) sont satisfaites, la condition (2) s'en déduit.

Exemple 10.5 Structure hermitienne canonique de $\mathbb{C}^n$.

L'expression

$$(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \mapsto \langle z, w \rangle := \sum_{j=1}^n z_j \overline{w_j} \in \mathbb{C}$$

définit un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^n$.

Dans un espace vectoriel réel E , on introduit de même la notion de produit scalaire euclidien. Il suffit, dans la définition 10.3, d'oublier les conjugaisons (qui ne servent d'ailleurs plus à rien !). On a donc la définition suivante.

Définition 10.6 Produit scalaire euclidien.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un produit scalaire euclidien sur E est une application $(x, y) \in E \times E \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. **linéaire à gauche et à droite** (on dit aussi **bilinéaire**) :
pour tout $y_0 \in E$, l'application $x \in E \mapsto \langle x, y_0 \rangle \in \mathbb{R}$ est linéaire,
pour tout $x_0 \in E$, l'application $y \in E \mapsto \langle x_0, y \rangle \in \mathbb{R}$ est linéaire ;
2. **symétrie** : on a $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ pour tous $x, y \in E$;
3. **défini positif** : on a $\langle x, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in E$ avec égalité $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Exemple 10.7 On a déjà introduit en 10.2 le produit scalaire euclidien canonique de $\mathbb{R}^n$ défini pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ par $\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^n x_j y_j$.

Proposition 10.8 Norme associée à un produit scalaire.

Lorsque l'espace vectoriel réel ou complexe E est muni d'un produit scalaire euclidien ou hermitien, on définit une norme sur E en posant

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}.$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tous vecteurs $x, y \in E$ on a l'inégalité

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Identité de Pythagore : pour deux vecteurs $x, y \in E$ orthogonaux, c'est-à-dire dont le produit scalaire $\langle x, y \rangle = 0$ est nul, on a

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Les propriétés ne seront pas démontrées dans l'ordre où elles sont énoncées. En particulier, l'inégalité triangulaire sera conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz !

Preuve Pour simplifier, nous écrivons la preuve pour un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et laissons au lecteur le soin de la ré-écrire dans le cas d'un espace vectoriel complexe.

- On commence par montrer que $\| \cdot \|$ est homogène et séparante.

Puisque le produit scalaire est défini positif, $\| \cdot \|$ est bien défini et $\|x\|$ s'annule si et seulement si $x = 0$. L'homogénéité suit de la bilinéarité du produit scalaire. On a en effet pour tous $x \in E$ et $t \in \mathbb{R}$:

$$\|tx\| = (\langle tx, tx \rangle)^{1/2} = (t^2 \langle x, x \rangle)^{1/2} = |t| \|x\|.$$

- On a, pour tous $x, y \in E$, l'identité

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2. \quad (10.1)$$

En effet, par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on a bien

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

- *Identité de Pythagore.*

Une première conséquence de l'identité (10.1), lorsqu'on la particularise à un couple x, y de vecteurs orthogonaux, est l'identité de Pythagore.

- *Inégalité de Cauchy Schwarz.*

Observons d'abord que l'inégalité de Cauchy Schwarz est triviale pour $x = 0$.

Supposons maintenant que $x \neq 0$. En rajoutant un paramètre réel t , on constate avec (10.1) que la fonction polynomiale, de degré 2,

$$P : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \|tx + y\|^2 = t^2 \|x\|^2 + 2t \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \in \mathbb{R}$$

ne prend que des valeurs positives ou nulles. Le polynôme P est de degré 2 et ne change pas de signe, donc son discriminant (réduit)

$$\Delta' := \langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$$

est négatif ou nul : nous avons démontré l'inégalité de Cauchy-Schwarz !

Inégalité triangulaire. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors, pour tous vecteurs $x, y \in E$, l'inégalité triangulaire puisque :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

□

Exemple 10.9 Norme hermitienne canonique de $\mathbb{C}^n$.

On définit une norme $\| \cdot \|$ sur $\mathbb{C}^n$ en posant, pour tout $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\|z\| = (\sum_{j=1}^n z_j \overline{z_j})^{1/2}$.

Cette norme provient du produit scalaire hermitien défini par

$$(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \mapsto \langle z, w \rangle := \sum_{j=1}^n z_j \overline{w_j} \in \mathbb{C}.$$

On a en effet $\|z\| = \langle z, z \rangle^{1/2}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^n$.

Passons maintenant à un premier exemple en dimension infinie, sur le corps des réels pour commencer.

Exercice 10.10 Suites réelles de carré sommable.

On désigne par $\ell_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles et de carré sommable, c'est-à-dire telles que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k^2 < \infty.$$

1. Soient $u = (u_k)$ et $v = (v_k)$ deux suites de $\ell_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{N})$. Montrer, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$, qu'on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'inégalité

$$\sum_{k=0}^n |u_k v_k| \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} v_k^2 \right)^{1/2}.$$

2. Montrer alors que $\ell_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{N})$ est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel réel, que l'application

$$(u, v) \in \ell_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{N}) \times \ell_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{N}) \mapsto \langle u, v \rangle := \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k v_k \in \mathbb{R} \quad (10.2)$$

est bien définie, puis qu'elle définit un produit scalaire euclidien sur $\ell_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{N})$. Expliciter la norme $\| \cdot \|_{\ell^2}$ associée.

Exercice 10.11 Suites complexes de carré sommable indexées par $\mathbb{N}$.

On désigne par $\ell^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs complexes et de carré sommable, c'est-à-dire telles que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |u_k|^2 < \infty.$$

Montrer que $\ell^2(\mathbb{N})$ est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel complexe, que l'application

$$(u, v) \in \ell^2(\mathbb{N}) \times \ell^2(\mathbb{N}) \mapsto \langle u, v \rangle := \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k \overline{v_k} \in \mathbb{C} \quad (10.3)$$

est bien définie, puis qu'elle définit un produit scalaire hermitien sur $\ell^2(\mathbb{N})$. Expliciter la norme $\| \cdot \|_{\ell^2}$ associée.

Exercice 10.12 Suites complexes de carré sommable indexées par $\mathbb{Z}$.

Même exercice avec l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ des suites complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de carré sommable indexées par $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire telles que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |u_k|^2 := \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=-n}^n |u_k|^2 < \infty.$$

Passons à la notion véritablement intéressante, celle d'espace de Hilbert.

Définition 10.13 Espace de Hilbert.

Soit E un espace vectoriel (réel ou complexe) muni d'un produit scalaire (euclidien ou hermitien) et de la norme associée.

On dit que cet espace est de Hilbert (réel ou complexe) lorsque la distance associée à la norme en fait un espace métrique complet.

Nous admettrons sans démonstration que les espaces suivants sont des espaces de Hilbert.

Exemple 10.14 Les espaces $\ell_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{N})$, $\ell^2(\mathbb{N})$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$ des exercices précédents sont des espaces de Hilbert (réel pour le premier, complexes pour les autres).

Exemple 10.15 Introduisons par contre le sous-espace vectoriel $F \subset \ell^2(\mathbb{N})$ des suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à support fini, c'est-à-dire telles qu'il existe un rang N (dépendant de la suite) tel que $u_k = 0$ lorsque $k \geq N$. L'expression (10.3) définit encore un produit scalaire hermitien sur F . Mais cela ne fait pas de F un espace de Hilbert car l'espace n'est pas complet.

Introduisons en effet les suites $f(n) := (1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, 0, \dots) \in F$ (pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$). Alors la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans F , et on peut montrer qu'elle ne converge pas dans F : moralement, sa limite - si elle en avait une - serait la suite $(1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, 1/(n+1), \dots)$, qui n'est pas dans F .

C L'espace de Hilbert L^2

On introduit l'espace $\mathcal{L}^2$ des fonctions mesurables de carré intégrable, puis (comme au chapitre 8) on passe au quotient par les fonctions nulles p.p. pour obtenir l'espace de Hilbert L^2 .

Définition 10.16 Soit $B \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable de $\mathbb{R}$.

On désigne par $\mathcal{L}^2(B)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont de carré intégrable, c'est-à-dire telles que $\int_B |f|^2 d\lambda < \infty$.

On introduit alors l'espace $L^2(B)$ des classes $[f]$ de fonctions $f \in \mathcal{L}^2(B)$ obtenu en identifiant deux fonctions de $\mathcal{L}^2(B)$ lorsqu'elles sont égales p.p.

Exercice 10.17 Comparaison des espaces L^1 et L^2 .

1. Déterminer les valeurs de $t \geq 0$ pour lesquelles on a $t \leq t^2$ (resp. $t^2 \leq t$).
2. Soit $B \subset \mathbb{R}$ mesurable de mesure finie. Dédurre de 1. que $L^2(B) \subset L^1(B)$.
3. Montrer que $C^0([0, 2\pi]) \subset L^2([0, 2\pi]) \subset L^1([0, 2\pi])$.
4. Pour chacune des fonctions de référence du paragraphe 3.G décider si elle appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et/ou à $L^2(\mathbb{R})$.
5. Parmi les espaces $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$, l'un contient-il l'autre ?

Théorème 10.18 L'espace de Hilbert $L^2(B)$.

Soit $B \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable. L'application

$$\Phi : ([f], [g]) \in L^2(B) \times L^2(B) \mapsto \langle [f], [g] \rangle := \int_B f \bar{g} \, d\lambda \in \mathbb{C}$$

est bien définie. C'est un produit scalaire hermitien sur $L^2(B)$ qui en fait un espace de Hilbert pour la norme définie par $\|f\|_2 = \left(\int_B |f|^2 \, d\lambda \right)^{1/2}$.

Bien noter que, pour définir la norme $\|\cdot\|_2$ lorsque les fonctions sont à valeurs complexes, on doit intégrer le carré du module (et pas le carré). Nous ne démontrerons pas la complétude : la preuve est semblable à celle du théorème 8.12.

Preuve Il s'agit en un premier temps de montrer que, lorsque $f, g \in \mathcal{L}^2(B)$, la fonction fg est intégrable, c'est-à-dire que $fg \in \mathcal{L}^1(B)$. Cela va résulter de ce qu'en chaque point on a l'inégalité

$$0 \leq (|f| - |g|)^2 = |f|^2 + |g|^2 - 2|fg|.$$

En effet, on a donc $2|fg| \leq |f|^2 + |g|^2$, d'où fg est intégrable car $|fg|$ est majorée par la somme de deux fonctions intégrables, qui est elle-même intégrable.

Supposons $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^2(B)$ égales p.p., et $g_1, g_2 \in \mathcal{L}^2(B)$ égales p.p. On a alors $f_1 \bar{g}_1 = f_2 \bar{g}_2$ p.p. (exercice 4.23) et donc la proposition 4.22 assure que $\int f_1 \bar{g}_1 \, d\lambda = \int f_2 \bar{g}_2 \, d\lambda$: l'application Φ est donc bien définie puisque $\Phi([f], [g])$ ne dépend pas des représentants choisis dans les classes $[f]$ et $[g]$.

Cette application Φ est linéaire à gauche et anti-linéaire à droite, par linéarité de l'intégrale. Elle est positive par croissance de l'intégrale.

Elle est définie positive car si $\Phi([f], [f]) = 0$, la proposition 4.20 assure que la fonction positive $|f|^2$ est nulle p.p., et donc que $[f] = 0$. $\square$

Remarque 10.19 Comme pour l'espace L^1 (voir la remarque 8.7), nous nous affranchirons désormais de la notation $[f]$ et désignerons simplement par $f \in L^2$ sa classe $[f] \in L^2$, tout en étant conscient que la fonction f n'est alors définie qu'à un ensemble de mesure nulle près. On se permettra néanmoins de parler de la "fonction" $f \in L^2$.

Retenir en particulier l'assertion fondamentale suivante.

Corollaire 10.20 Inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(B)$.

Soient $f, g \in L^2(B)$. Alors $fg \in L^1(B)$ et on a l'inégalité

$$\left| \int_B fg \, d\lambda \right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2. \quad (10.4)$$

Preuve Soient $f, g \in L^2(B)$. On a vu dans la preuve du théorème 10.18 que la fonction produit fg est intégrable. L'inégalité annoncée n'est autre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'espace $L^2(B)$, ici appliquée au couple de fonctions f et $\bar{g}$, puisque

$$|\Phi(f, \bar{g})| = \left| \int_B fg \, d\lambda \right| \leq \|f\|_2 \|\bar{g}\|_2 = \|f\|_2 \|g\|_2. \quad \square$$

Remarque 10.21 Deux fonctions $f, g \in L^2$ sont proches, c'est-à-dire que $\|f - g\|_2$ est petit, lorsque f et g sont proches en moyenne quadratique. La différence $f(t) - g(t)$ peut être très grande en certains points, mais elle ne peut pas être grande sur une partie de trop grosse mesure.

Exercice 10.22 Comparaison des espaces L^1 et L^2 (suite).

1. Soit $f \in L^2([0, 2\pi])$. Montrer que $f \in L^1([0, 2\pi])$, et que

$$\|f\|_1 \leq (2\pi)^{1/2} \|f\|_2.$$

2. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $L^2([0, 2\pi])$ qui converge vers $f \in L^2([0, 2\pi])$ au sens de la norme $\|\cdot\|_2$. Montrer que

$$\int_{[0, 2\pi]} f_n \, d\lambda \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{[0, 2\pi]} f \, d\lambda.$$

D Théorème de la projection dans un Hilbert

Nous ne ferons qu'effleurer le sujet de la géométrie des espaces de Hilbert, en nous limitant à ce que nous utiliserons dans le chapitre suivant pour parler de séries de Fourier. En particulier, nous énonçons une version très édulcorée du théorème de la projection, qui suffira pour notre propos.

Lemme 10.23 Base orthonormée (en dimension finie).

Soit $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel (réel ou complexe) de dimension finie n muni d'un produit scalaire (euclidien ou hermitien). Alors, on peut trouver une base $(e_1, \dots, e_n)$ de F qui soit orthonormée : les vecteurs de base sont de norme 1 et deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire que $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$, et $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ lorsque $i \neq j$.

On a, pour tous vecteurs $x, y \in F$, les décompositions $x = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j$ et $y = \sum_{j=1}^n \langle y, e_j \rangle e_j$ ainsi que les égalités $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle \langle e_j, y \rangle$ et $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^n |\langle x, e_j \rangle|^2$.

Preuve Pour construire une base orthonormée $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$, on part d'une base quelconque $(v_j)_{1 \leq j \leq n}$ de F et on lui applique le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Soit alors $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in F$ un vecteur. Pour $1 \leq i \leq n$, on effectue le produit scalaire de x avec le e_i . On obtient en utilisant la linéarité à gauche du produit scalaire, et le fait que la base (e_i) est orthonormée :

$$\langle x, e_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n x_j e_j, e_i \right\rangle = \sum_{j=1}^n x_j \langle e_j, e_i \rangle = x_i.$$

Le produit scalaire de x et y s'obtient alors en développant, et en utilisant les propriétés de semi-linéarité et symétrie hermitienne du produit scalaire ainsi que le fait que la base (e_j) est orthonormée :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_{j=1}^n \langle y, e_j \rangle e_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_j \rangle} \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle \langle e_j, y \rangle. \end{aligned}$$

On obtient l'expression de $\|x\|^2$ en particulierisant à $x = y$. $\square$

Il suit de l'existence d'une base orthonormée qu'il existe un unique modèle d'espace euclidien de dimension n .

Corollaire 10.24 Espaces euclidiens de dimension finie.

Soit $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel réel de dimension n muni d'un produit scalaire euclidien.

Alors F est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique : il existe une application linéaire bijective $j : \mathbb{R}^n \rightarrow F$ isométrique, c'est-à-dire telle que $\langle j(x), j(y) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ pour tous vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Preuve Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de F . On définit $j : \mathbb{R}^n \rightarrow F$ par $j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. L'application j convient. $\square$

On démontre de même l'énoncé correspondant en hermitien.

Corollaire 10.25 Espaces hermitiens de dimension finie.

Soit $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel complexe de dimension n muni d'un produit scalaire hermitien.

Alors F est isomorphe à $\mathbb{C}^n$ muni de sa structure hermitienne canonique : il existe une application linéaire bijective $j : \mathbb{C}^n \rightarrow F$ isométrique, c'est-à-dire telle que $\langle j(x), j(y) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ pour tous vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{C}^n$.

Lorsque l'on veut démontrer les théorèmes hilbertiens dans toute leur puissance (théorème de la projection sur un sous-espace vectoriel fermé, ou bien sur un convexe fermé, puis le théorème de représentation de Riesz etc...) l'hypothèse de complétude est indispensable : il ne suffit pas d'avoir une norme issue d'un produit scalaire.

Ici, nous resterons considérablement en retrait de ces théorèmes donc nous n'utiliserons pas la complétude. Néanmoins, nous conserverons cette hypothèse "par principe" dans nos énoncés.

Théorème 10.26 Petit théorème de la projection.

Soient E un espace de Hilbert (de dimension quelconque) et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de dimension finie.

Soit $x \in E$. Il existe un unique vecteur, noté $\pi_F(x) \in F$, tel que $x - \pi_F(x)$ soit orthogonal à tous les vecteurs de F . Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de F , on a

$$\pi_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \in F. \quad (10.5)$$

Le vecteur $\pi_F(x)$ réalise la distance de x au sous-espace F , c'est-à-dire que

$$\|x - \pi_F(x)\| = \inf_{z \in F} \|x - z\|.$$

En particulier, $\|x - \pi_F(x)\| \leq \|x\|$.

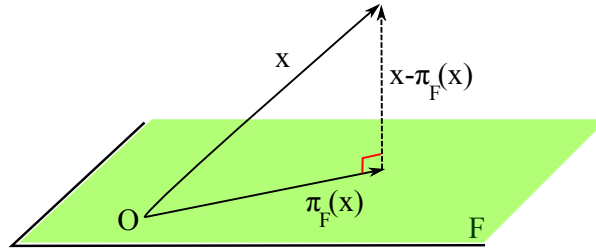


FIGURE 10.1 – Théorème de la projection

Preuve Soient $x \in E$ et $z = \sum_{j=1}^n z_j e_j$ un vecteur de F . Par anti-linéarité à droite du produit scalaire, le vecteur $x - z \in E$ est orthogonal à F si et seulement si il est orthogonal à tous les vecteurs (e_j) de la base, c'est-à-dire (puisque nous travaillons avec une base orthonormée, et que le produit scalaire est linéaire à gauche) si et seulement si on a, pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$\langle x - z, e_i \rangle = \langle x - \sum_{j=1}^n z_j e_j, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - z_i = 0.$$

Ceci donne l'existence et l'unicité de $\pi_F(x)$, et son expression.

Lorsque $z \in F$, les vecteurs $z - \pi_F(x) \in F$ et $x - \pi_F(x)$ sont orthogonaux. Il résulte donc de Pythagore que

$$\begin{aligned}\|x - z\|^2 &= \|(x - \pi_F(x)) + (\pi_F(x) - z)\|^2 \\ &= \|x - \pi_F(x)\|^2 + \|\pi_F(x) - z\|^2 \geq \|x - \pi_F(x)\|^2\end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $z = \pi_F(x)$.

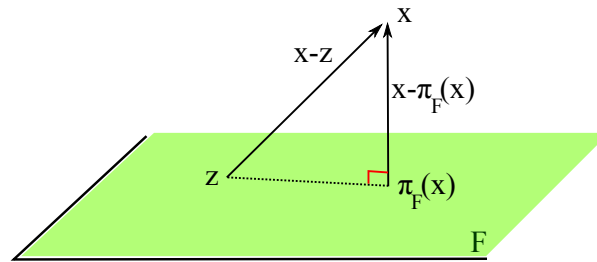


FIGURE 10.2 – Preuve du théorème de la projection

La distance de x à F est donc atteinte au point $\pi_F(x)$, et seulement en ce point. $\square$

Proposition-Définition 10.27 Opérateur de projection orthogonale.

L'application $\pi_F : E \rightarrow F$ est linéaire et continue. On l'appelle opérateur de projection orthogonale de E sur F .

Preuve La linéarité de l'application π_F se lit sur l'expression (10.5). Le théorème de Pythagore donne l'égalité $\|x\|^2 = \|x - \pi_F(x)\|^2 + \|\pi_F(x)\|^2$, d'où l'inégalité $\|\pi_F(x)\| \leq \|x\|$. La continuité suit alors de ce que π_F est linéaire. $\square$

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés aux normes provenant d'un produit scalaire. On peut remarquer que ce n'est pas le cas de toutes les normes.

Voici un exemple très élémentaire !

Exercice 10.28 Un espace non hilbertien.

Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme sup définie par $\|(x, y)\|_\infty = \sup(|x|, |y|)$.

1. Soit $m = (0, 1)$. Dessiner quelques boules $B(m, R) \subset E$ ($R > 0$).
2. Déterminer la distance du point m à la droite $\{(x, 0)\} \subset E$. En quels points cette distance est-elle atteinte ?
3. En déduire que la norme sup ne fait pas de $\mathbb{R}^2$ un espace hilbertien. (Cet espace est complet, le problème vient de ce que sa norme ne provient pas d'un produit scalaire).

Exercice 10.29 On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $E := \mathbb{R}^3$, que l'on munit de son produit scalaire canonique.

1. Déterminer l'opérateur $\pi_F : E \rightarrow F$ de projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel $F = \text{vect}(e_1)$.
2. Même question lorsque $F = \text{vect}(e_1, e_2)$.
3. Même question lorsque $F = \text{vect}(e_2 + e_3, e_1 + 2e_2)$.
On remarquera que l'on n'a pas besoin de commencer par orthonormaliser la base donnée pour F pour déterminer la projection $\pi_F(x)$ d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ – revenir si besoin à la démonstration de [10.26](#).

Exercice 10.30 Soit $F = \text{vect}(f_0, f_1)$ le sous-espace vectoriel de l'espace hilbertien $E := L^2([0, 1])$ engendré par les fonctions polynomiales définies respectivement par $f_0(t) = 1$ et $f_1(t) = t$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Soit $f_2 \in E$ la fonction définie par $f_2(t) = t^2$ pour tout $t \in [0, 1]$. Déterminer $\pi_F(g) \in F$, ainsi que la distance $d(g, F)$.

11. Appendice : Séries de Fourier

Dans ce chapitre, nous nous consacrons à l'étude des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et périodiques. Après normalisation, on pourra supposer que leur période est 2π .

Les exemples les plus simples de fonctions 2π -périodiques sont fournis par les fonctions trigonométriques élémentaires $\kappa_n : t \mapsto \cos(nt)$ ($n \in \mathbb{N}$) ou $\sigma_n : t \mapsto \sin(nt)$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Les fonctions κ_n, σ_n sont appelées harmoniques ; elles vérifient l'équation $f'' = -n^2 f$.

L'objectif des séries de Fourier est de décomposer une fonction (ou une vibration) périodique en superposition de modes élémentaires. Les séries de Fourier ont été initialement introduites par Lagrange dans la seconde moitié du 18ème siècle pour étudier l'équation des cordes vibrantes. Elles furent ensuite reprises par Fourier au milieu du 19ème siècle pour étudier l'équation de la chaleur. Depuis, cette branche des mathématiques, appelée Analyse Harmonique, a prospéré et connaît des développements qui vont bien au-delà de la motivation initiale.

On préférera ici l'écriture complexe à la décomposition selon les fonctions κ_n et σ_n (voir cependant la remarque 11.41). On travaillera donc avec des fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ à valeurs complexes, et l'on introduira les fonctions monômes trigonométriques $e_n : t \mapsto e^{int}$ ($n \in \mathbb{Z}$), ainsi que leurs combinaisons linéaires $\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}$ ($n \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{C}$) que l'on appelle polynômes trigonométriques. (On rappelle, pour tout réel t , l'égalité $e^{it} = \cos t + i \sin t$).

L'analyse harmonique d'une fonction 2π -périodique s'effectue en deux étapes : décomposition, puis recombinaison.

Décomposition : À toute fonction 2π -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ suffisamment gentille (intégrable sur une période) on associe canoniquement une série trigonométrique

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{int}$$

dont les coefficients $c_n(f)$ sont déterminés par f : c'est la série de Fourier de f . A priori, cette série est juste définie formellement, et l'on n'a aucune raison de penser qu'elle converge en aucun sens que ce soit.

Recomposition : La théorie de Fourier affirme que, lorsque la fonction f est assez régulière (en un sens à préciser) la série de Fourier de f converge (en un sens à préciser, et qui dépend de la régularité de f) et qu'elle permet de restituer la fonction initiale f . Nous démontrerons deux résultats dans cette veine : l'un concernant les fonctions de carré intégrable sur une période (théorème 11.29), et l'autre concernant les fonctions continues et de classe C^1 par morceaux (théorème de Dirichlet 11.44).

A Les espaces fonctionnels $C_{2\pi}^0$, $L_{2\pi}^1$ et $L_{2\pi}^2$.

Définition 11.1 L'espace $C_{2\pi}^0$.

On désigne par $C_{2\pi}^0$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont continues sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodiques. On le munit de la norme définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| = \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(t)|.$$

Exercice 11.2 Fonctions périodiques.

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et 2π -périodique. Montrer que f est bornée.
2. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions 2π -périodiques. Montrer que $f = g$ si et seulement si f et g coïncident sur l'intervalle $[0, 2\pi[$.
3. Soit $h : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que h se prolonge en une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -périodique si et seulement si $h(0) = h(2\pi)$. Montrer, dans ce cas, que le prolongement 2π -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de h est unique et continu.

Pour $1 \leq p < \infty$, on désigne par $\mathcal{L}_{2\pi}^p$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont 2π -périodiques mesurables et telles que $\int_{[0, 2\pi]} |f(t)|^p d\lambda(t) < \infty$. Comme en 8.2 ou 10.16, on s'intéressera plutôt aux espaces quotients $L_{2\pi}^p$.

Définition 11.3 L'espace $L_{2\pi}^1$.

On introduit l'espace vectoriel $L_{2\pi}^1$ des (classes de) fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont 2π -périodiques et intégrables sur une période, c'est-à-dire telles que $\int_{[0, 2\pi]} |f(t)| d\lambda(t) < \infty$. On le munit de la norme définie par

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} |f(t)| d\lambda(t).$$

Remarque 11.4 A moins d'être nulle presque partout, une fonction 2π -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ne sera jamais intégrable sur $\mathbb{R}$!

Lemme 11.5 Lorsque $f \in L_{2\pi}^1$, les intégrales suivantes sont bien définies et l'on a, pour tout $a \in \mathbb{R}$, les égalités

$$\int_{[0, 2\pi]} f(t) d\lambda(t) = \int_{[a, a+2\pi]} f(t) d\lambda(t).$$

En particulier,

$$\int_{[0,2\pi]} f(t) \, d\lambda(t) = \int_{[-\pi,\pi]} f(t) \, d\lambda(t).$$

Preuve La première assertion va résulter de la périodicité de f , et des propriétés d'invariance de l'intégrale par translation (proposition 3.25, ou exercice 5.32). La seconde assertion est un cas particulier de la première, correspondant à $a = -\pi$.

Supposons dans un premier temps la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ mesurable positive, et 2π -périodique. Soit $a \in \mathbb{R}$. Par positivité de f , les intégrales considérées sont alors bien définies. Introduisons $k \in \mathbb{Z}$ l'unique entier relatif tel que $2k\pi \leq a < 2(k+1)\pi \leq a + 2\pi$. On a alors, avec le changement de variable $t = s + 2\pi$, puis $t = u + 2k\pi$:

$$\begin{aligned} \int_{[a,a+2\pi]} f(t) \, d\lambda(t) &= \int_{[a,2(k+1)\pi]} f(t) \, d\lambda(t) + \int_{[2(k+1)\pi,a+2\pi]} f(t) \, d\lambda(t) \\ &= \int_{[a,2(k+1)\pi]} f(t) \, d\lambda(t) + \int_{[2k\pi,a]} f(s + 2\pi) \, d\lambda(s) \\ &= \int_{[2k\pi,2(k+1)\pi]} f(t) \, d\lambda(t) = \int_{[0,2\pi]} f(u) \, d\lambda(u) \in [0, +\infty]. \end{aligned}$$

Si maintenant $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est 2π -périodique et intégrable sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, ce qui précède appliqué à la fonction positive $|f|$ assure que f est intégrable sur l'intervalle $[a, a + 2\pi]$. L'égalité des intégrales se démontre alors avec les mêmes arguments, que l'on applique maintenant à f . $\square$

Proposition-Définition 11.6 L'espace $L^2_{2\pi}$.

On introduit l'espace vectoriel $L^2_{2\pi}$ des (classes de) fonctions 2π -périodiques $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de carré intégrable sur une période : $\int_{[0,2\pi]} |f(t)|^2 \, d\lambda(t) < \infty$. On le munit de la norme définie par

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} |f(t)|^2 \, d\lambda(t) \right)^{1/2},$$

qui en fait un espace de Hilbert.

Remarque 11.7 Le facteur $\frac{1}{2\pi}$ que nous avons introduit dans la définition des normes sur les espaces $L^1([0, 2\pi])$ et $L^2([0, 2\pi])$ ne change pas la face du monde par rapport aux définitions de 8.9 et de 10.18. Il est là à titre de normalisation, pour “compenser” la mesure de l'intervalle $[0, 2\pi]$ qui est égale à 2π . Ce facteur nous simplifiera la vie plus tard (voir le lemme 11.20). Il sera également présent dans la définition de la convolée 11.14.

Lemme 11.8 *On a les inclusions $C_{2\pi}^0 \subset L_{2\pi}^2 \subset L_{2\pi}^1$. De plus :*

- pour toute $f \in C_{2\pi}^0$, on a $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$,
- pour toute $f \in L_{2\pi}^2$, on a $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$.

Preuve Une fonction de $C_{2\pi}^0$ est bornée. Une fonction bornée est intégrable sur une partie bornée. D'où $C_{2\pi}^0 \subset L_{2\pi}^2$. La croissance de l'intégrale assure, pour $f \in C_{2\pi}^0$, qu'on a l'inégalité

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} |f|^2 d\lambda \leq \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} \|f\|_\infty^2 d\lambda = \|f\|_\infty^2.$$

L'inclusion $L_{2\pi}^2 \subset L_{2\pi}^1$, et la comparaison des normes, sont conséquences de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a en effet, pour $f \in L_{2\pi}^2$, les inégalités :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} |f| d\lambda &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} (|f| \cdot 1) d\lambda \leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{[0,2\pi]} |f|^2 d\lambda \right)^{1/2} \left(\int_{[0,2\pi]} 1 d\lambda \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} |f|^2 d\lambda \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

□

B Densité des polynômes trigonométriques

Avant de parler de séries de Fourier, nous allons montrer qu'il y a "beaucoup" de polynômes trigonométriques : plus précisément, toute fonction continue et 2π -périodique s'approche uniformément par une suite de polynômes trigonométriques (théorème 11.11). Nous en déduirons la densité des polynômes trigonométriques dans $L_{2\pi}^2$ (corollaire 11.18).

Définition 11.9 **Espaces $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_n$ des polynômes trigonométriques.**

Un polynôme trigonométrique est une combinaison linéaire à coefficients complexes des monômes trigonométriques $e_k : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{ikt} \in \mathbb{C}$, où k décrit l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

On note $\mathcal{P} \subset C_{2\pi}^0$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des polynômes trigonométriques.

Pour $n \geq 0$, on note $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel (de dimension finie) des polynômes trigonométriques de degré au plus n , c'est-à-dire qui sont combinaisons linéaires de $e_{-n}, \dots, e_0, \dots, e_n$.

La suite $(\mathcal{P}_n)_{n \geq 0}$ est croissante, et on a $\mathcal{P} = \cup_{n \geq 0} \mathcal{P}_n$.

Remarque 11.10 **Combinaisons linéaires, versus séries.**

Attention, dans la définition de l'espace $\mathcal{P}$ des polynômes trigonométriques ci-dessus, il est bien question de combinaisons linéaires – c'est-à-dire de sommes finies $\sum_{k=-n}^n c_k e_k$. Lorsqu'on parle de combinaisons linéaires, on reste dans le domaine de l'Algèbre.

Ne pas confondre avec les séries trigonométriques $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e_k$, dont il va bientôt être question. Se pose alors la question de leur convergence (donner un sens à la somme de cette série infinie) : nous entrons dans le domaine de l'Analyse.

Notre objectif dans ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 11.11 **Densité des polynômes trigonométriques dans $C_{2\pi}^0$.**

L'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes trigonométriques est dense dans $C_{2\pi}^0$: toute fonction continue et 2π -périodique peut s'écrire comme limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

Remarque 11.12 Si f n'est pas elle-même un polynôme trigonométrique, les degrés d'une suite $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques convergeant uniformément vers f tendront vers ∞ .

Remarque 11.13 Le théorème 11.11 est cousin du théorème de densité de Weierstrass, qui affirme que toute fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ est limite uniforme, sur ce segment, d'une suite de fonctions polynomiales.

Le théorème 11.11 se démontre en utilisant le procédé de convolution ainsi qu'une approximation de l'unité (notions que nous avons déjà rencontrées, dans un contexte un peu différent, au chapitre 7).

Proposition-Définition 11.14 **Convolution de fonctions 2π -périodiques.**

Soient $f, g \in C_{2\pi}^0$ deux fonctions continues et 2π -périodiques. La convolution de f et g est la fonction 2π -périodique définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} f(t) g(x - t) d\lambda(t). \quad (11.1)$$

On a, pour tous $x, a \in \mathbb{R}$, les égalités :

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= (g * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} f(x - t) g(t) d\lambda(t) \\ (f * g)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{[a, a+2\pi]} f(x - t) g(t) d\lambda(t). \end{aligned} \quad (11.2)$$

Preuve Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$, donc elle y est intégrable, et la convolution $f * g$ est bien définie. Puisque g est 2π -périodique, $f * g$ l'est également.

On fixe $x \in \mathbb{R}$. En utilisant le lemme 11.5, on obtient la première égalité dans (11.2) par le changement de variable $t \mapsto x - t$, et la seconde par périodicité des fonctions $t \mapsto f(x - t)$ et $t \mapsto g(t)$. $\square$

Exercice 11.15 Soient $f, g \in C_{2\pi}^0$. Montrer que la convolution $f * g$, dont on vient de montrer qu'elle est périodique, est continue.

1. *Première méthode.* Utiliser le fait que les deux fonctions f et g , continues et périodiques, sont donc bornées et uniformément continues pour estimer, pour $x, y \in \mathbb{R}$ proches, la différence $(f * g)(x) - (f * g)(y)$.
2. *Deuxième méthode.* Appliquer le corollaire 4.31 de continuité sous l'intégrale à la fonction définie par

$$h : (t, x) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \mapsto f(x - t)g(t) \in \mathbb{C}.$$

Lemme 11.16 Convolution avec un polynôme trigonométrique.

Soient $f \in C_{2\pi}^0$ et $p \in \mathcal{P}$ un polynôme trigonométrique. Alors la convolée $f * p$ est également un polynôme trigonométrique. Son degré est au plus égal au degré de p .

Preuve Par linéarité de l'intégrale, il suffit de traiter le cas où $p = e_n$ pour $n \in \mathbb{Z}$. On observe que alors que $f * e_n$ est un multiple (éventuellement nul) de e_n puisque

$$\begin{aligned} (f * e_n)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{in(x-t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{inx} e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \right) e^{inx}. \quad \square \end{aligned}$$

Dans le lemme 11.17, nous construisons une suite (ρ_n) de polynômes trigonométriques qui ont de belles propriétés qui en font une “approximation de l’unité”. Convoler une fonction f avec une approximation (ρ_n) de l’unité permet d’approcher f par une suite de fonctions $(\rho_n * f)$ qui sont “plus régulières” que f (dans ce cas précis, les fonctions $\rho_n * f$ seront des polynômes trigonométriques). Nous n’établirons pas de théorie générale, mais nous nous contenterons de faire fonctionner la notion d’approximation de l’unité sur notre exemple (comparer à la proposition 7.6).

La fonction $\cos$ étant paire, nous exprimerons, pour plus de commodité, les intégrales sur la période $[-\pi, \pi]$ (plutôt que sur $[0, 2\pi]$), revoir le lemme 11.5.

Lemme 11.17 Approximation de l’unité.

Il existe, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, une constante $\alpha_n > 0$ telle que le polynôme trigonométrique de degré n défini par $\rho_n(t) = \alpha_n (1 + \cos t)^n$ soit

- **normalisé d’intégrale 1** : on a $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(t) dt = 1$.

La suite (ρ_n) est alors :

- **positive** : on a $\rho_n(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$;
- **concentrée autour de 0** : pour tout $\delta \in]0, \pi]$, on a convergence $\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \rho_n(t) dt \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Preuve Le polynôme trigonométrique $\varphi_n : t \mapsto (1 + \cos t)^n$ est positif, non identiquement nul, donc son intégrale sur une période est strictement positive. On le renormalise en introduisant $\rho_n := \alpha_n \varphi_n$, où

$$\alpha_n := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) dt \right)^{-1}$$

(la notation est licite puisqu'on intègre une fonction continue sur un segment, il s'agit donc d'une intégrale de Riemann).

Ce nouveau polynôme trigonométrique ρ_n est toujours positif, et il est maintenant d'intégrale 1. Montrons qu'il vérifie également la dernière propriété.

Nous commençons par majorer la constante α_n , c'est-à-dire par minorer l'intégrale de φ_n sur une période. Comme on n'a pas d'expression explicite pour la primitive de $\varphi_n : t \mapsto (1 + \cos t)^n$, on introduit un facteur $\sin t$ pour se ramener à intégrer une fonction dont on connaît la primitive ☺! Grâce à la parité de φ_n , et puisque $0 \leq \sin t \leq 1$ sur $[0, \pi]$, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos t)^n dt &= 2 \int_0^{\pi} (1 + \cos t)^n dt \\ &\geq 2 \int_0^{\pi} (1 + \cos t)^n \sin t dt = -2 \left[\frac{(1 + \cos t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\pi} = \frac{2^{n+2}}{n+1} \end{aligned}$$

et donc

$$\alpha_n := \frac{2\pi}{\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) dt} \leq \frac{(n+1)\pi}{2^{n+1}}.$$

Soit maintenant $\delta \in]0, \pi]$. Posons $\alpha := \cos \delta$, de sorte que l'on a l'inégalité $0 \leq 1 + \cos t \leq 1 + \cos \alpha < 2$ pour tout $t \in [\delta, \pi]$. Il suit, en majorant grossièrement l'intégrale et en utilisant la majoration de α_n obtenue ci-dessus, que

$$\int_{\delta}^{\pi} \rho_n(t) dt = \alpha_n \int_{\delta}^{\pi} (1 + \cos t)^n dt \leq \alpha_n \pi (1 + \alpha)^n \leq \frac{\pi^2}{2} (n+1) \left(\frac{1 + \alpha}{2} \right)^n.$$

Puisque $0 \leq \frac{1+\alpha}{2} < 1$, le membre de droite tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ (passer au logarithme si besoin). On a donc, par parité de ρ_n :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \rho_n(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} \rho_n(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \rho_n(t) dt \\ &= 1 - \frac{2}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \rho_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \end{aligned} \quad \square$$

Preuve du théorème 11.11.

Soit $f \in C_{2\pi}^0$. On va considérer la suite de polynômes trigonométriques $p_n := f * \rho_n$, où (ρ_n) est l'approximation de l'unité construite au lemme

11.17, et l'on va montrer que la suite (p_n) converge uniformément vers f lorsque $n \rightarrow \infty$.

L'expression exacte de ρ_n ne sera plus utile : on se souviendra juste que ce sont des polynômes trigonométriques (de sorte que les p_n aussi), et que la suite (ρ_n) vérifie les propriétés énoncées en 11.17.

Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue, donc sa restriction au segment $[-2\pi, 2\pi]$ est uniformément continue. Il existe donc $\delta > 0$ tel qu'on ait $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ si $x, y \in [-2\pi, 2\pi]$ avec $|x - y| \leq \delta$. Observons que, pour $|x|, |t| \leq \pi$ on aura $|x - t| \leq 2\pi$.

Pour la valeur de δ introduite ci-dessus (et qui dépend de ε), on suppose désormais que $n \geq N$ est assez grand de sorte que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \rho_n(t) dt \geq 1 - \varepsilon$. On peut alors écrire en utilisant la normalisation $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(t) dt = 1$, que l'on a pour tout $x \in [-\pi, \pi]$:

$$\Delta_n(x) := f * \rho_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) \rho_n(t) dt,$$

puis en coupant l'intégrale en deux (intégrer sur $[-\delta, \delta]$ et en dehors) :

$$\begin{aligned} |\Delta_n(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)| \rho_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |f(x-t) - f(x)| \rho_n(t) dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \varepsilon \rho_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} 2 \|f\|_{\infty} \rho_n(t) dt \\ &\leq (1 + 2 \|f\|_{\infty}) \varepsilon, \end{aligned}$$

qui est arbitrairement petit si ε est petit.

On a donc montré que, donnée $f \in C_{2\pi}^0$, la norme sup de la différence $\|f * \rho_n - f\|_{\infty}$ est aussi petite que l'on veut pourvu que n soit choisi assez grand. C'est ce qu'on voulait. $\square$

Corollaire 11.18 Densité des polynômes trigonométriques dans $L_{2\pi}^2$.

L'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes trigonométriques est dense dans $L_{2\pi}^2$: toute fonction $f \in L_{2\pi}^2$ peut s'écrire comme limite au sens de la norme $L_{2\pi}^2$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ d'une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques, au sens où

$$\|f - p_n\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f - p_n|^2 d\lambda \right)^{1/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ce corollaire est conséquence de la densité des polynômes trigonométriques dans l'espace $C_{2\pi}^0$ que nous venons de montrer, ainsi que du résultat suivant.

Théorème 11.19 Densité de $C_{2\pi}^0$ dans $L_{2\pi}^2$.

Soit $f \in L_{2\pi}^2$. Il existe alors une suite de fonctions $g_n \in C_{2\pi}^0$ continues et 2π -périodiques qui converge vers f , au sens de la norme $L_{2\pi}^2$:

$$\|f - g_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

La preuve de ce théorème repose sur des propriétés fines de la mesure de Lebesgue (la mesure de Lebesgue est “régulière” : un borélien de mesure finie s’approche bien, au sens de la mesure, par des ouverts et par des compacts). Il s’agit d’un résultat difficile que nous admettrons.

Preuve du corollaire 11.18. Soient $f \in L_{2\pi}^2$ et $\varepsilon > 0$. On veut trouver un polynôme trigonométrique $p \in \mathcal{P}$ tel que $\|f - p\|_2 \leq \varepsilon$. En appliquant alors cette construction par exemple à la suite $\varepsilon_n = 1/n$, on obtiendra ainsi une suite de polynômes trigonométriques $(p_n)_{n \geq 1}$ satisfaisant $\|f - p_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

D’après le théorème 11.19, il existe une fonction $g \in C_{2\pi}^0$ telle que $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon$.

Appliquons maintenant le théorème 11.11 à la fonction continue g . Il existe un polynôme trigonométrique $p \in \mathcal{P}$ qui approche uniformément g à ε près : $\|g - p\|_\infty \leq \varepsilon$. A fortiori, p approche bien g en norme L^2 sur une période puisque

$$\|g - p\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g - p|^2 d\lambda \right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon^2 d\lambda \right)^{1/2} \leq \varepsilon.$$

L’inégalité triangulaire donne alors

$$\|f - p\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - p\|_2 \leq 2\varepsilon.$$

La fonction f est donc approchée à 2ε près en norme L^2 par un polynôme trigonométrique, c’est ce qu’on voulait montrer. $\square$

C La théorie L^2 des séries de Fourier

Nous allons voir que la famille de fonctions $e_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définies par $e_n(t) = e^{int}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ est orthonormée dans $L_{2\pi}^2$.

Dans certaines limites (attention il faudra être bien précis : voir l’énoncé du théorème 11.29), cette famille va jouer le rôle d’une base orthonormée pour l’espace vectoriel de dimension infinie $L_{2\pi}^2$. Mais ici il ne s’agira pas d’une base algébrique où tout vecteur est une unique combinaison linéaire (finie) des vecteurs de base. Ce sera une “base hilbertienne” (qui n’est pas une base au sens usuel), et tout vecteur s’écrira de façon unique comme somme d’une série infinie convergente faisant intervenir les vecteurs (e_n) . Voir également la remarque 11.32.

Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de $L^2_{2\pi}$, défini par $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} f \bar{g} d\lambda$.

Lemme 11.20 *La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée dans $L^2_{2\pi}$. Cela signifie qu'on a, pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq m$:*

$$\|e_n\|_2 = 1 \text{ et } \langle e_n, e_m \rangle = 0.$$

Preuve On a

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} e_n(t) \overline{e_m(t)} d\lambda(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} e^{i(n-m)t} d\lambda(t),$$

d'où le résultat puisque pour $n \neq m$ entiers, la fonction $t \mapsto e^{i(n-m)t}$ est d'intégrale nulle sur une période. $\square$

Définition 11.21 Coefficients de Fourier.

A toute fonction $f \in L^2_{2\pi}$ on associe la suite $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ de ses coefficients de Fourier, définie pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par

$$c_n(f) = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} f(t) e^{-int} d\lambda(t).$$

Exercice 11.22 Coefficients de Fourier d'un polynôme trigonométrique.

Déterminer les coefficients de Fourier d'un polynôme trigonométrique $\sum_{k=-n}^n \gamma_k e_k$.

Remarque 11.23 Fourier sur $L^1_{2\pi}$.

L'expression $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} f(t) e^{-int} d\lambda(t)$ qui permet de définir les coefficients de Fourier de f a un sens dès lors que $f \in L^1_{2\pi}$. Par contre, les coefficients de Fourier de $f \in L^1_{2\pi}$ ne s'interprètent alors plus comme des produits scalaires. Nous n'en dirons pas plus sur la théorie de Fourier dans $L^1_{2\pi}$ qui, dès qu'on cherche à aller au-delà des définitions et des remarques élémentaires, est considérablement plus délicate que la théorie hilbertienne dans $L^2_{2\pi}$.

Définition 11.24 Série de Fourier.

La série de Fourier d'une fonction $f \in L^2_{2\pi}$ est la série de fonctions

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e_k.$$

Remarque 11.25 Nous ne disons encore rien de cette série de fonctions $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e_k$. En particulier, on ne sait pour le moment pas si elle converge en quelque sens que ce soit. Cette question fera l'objet du théorème 11.29 lorsque $f \in L^2_{2\pi}$, ou bien du théorème 11.44 lorsque $f \in C^0_{2\pi}$ est de classe C^1 par morceaux.

Par contre, les sommes partielles de Fourier ci-dessous sont bien définies !

Définition 11.26 Sommes partielles de Fourier.

Soit $f \in L^2_{2\pi}$. Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, la somme $S_n(f) := \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k$ est appelée somme partielle de Fourier de f d'ordre n . C'est un polynôme trigonométrique de degré au plus n . On obtient $S_{n+1}(f)$ à partir de $S_n(f)$ en rajoutant des monômes de degrés $n+1$.

Remarque 11.27 Ne pas oublier que les monômes trigonométriques (e_n) , et donc les coefficients de Fourier $(c_n(f))$, sont indexés par $n \in \mathbb{Z}$. La somme partielle de Fourier d'ordre n , soit $S_n(f)$, est obtenue par une somme indexée entre $-n$ et n . De même pour la série de Fourier.

C'est le résultat suivant qui fait que la théorie L^2 des séries de Fourier est si plaisante.

Proposition 11.28 Interprétation géométrique de $S_n(f)$.

Soient $f \in L^2_{2\pi}$. Soit $n \geq 0$. La somme partielle de Fourier $S_n(f)$ d'ordre n de f est la projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{P}_n \subset L^2_{2\pi}$. En particulier, la distance de f à $\mathcal{P}_n$ vaut

$$d(f, \mathcal{P}_n) = \|f - S_n(f)\|_2.$$

Preuve Désignons par $\pi_n : L^2_{2\pi} \rightarrow \mathcal{P}_n$ la projection orthogonale de l'espace de Hilbert $L^2_{2\pi}$ sur le sous-espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{P}_n$ (voir 10.27). Puisque la famille $(e_{-n}, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{P}_n$, la formule (10.5) du théorème 10.26 nous donne une expression explicite pour la projection orthogonale d'une fonction $f \in L^2_{2\pi}$ sur $\mathcal{P}_n$. En revenant à la définition 11.21 des coefficients de Fourier de f , on obtient donc

$$\pi_n(f) = \sum_{k=-n}^n \langle f, e_k \rangle e_k = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k.$$

Le théorème 10.26 nous donne également l'égalité

$$d(f, \mathcal{P}_n) = \|f - \pi_n(f)\|_2 = \|f - S_n(f)\|_2.$$

□

L'objectif principal de ce chapitre est le résultat suivant.

Théorème 11.29 Séries de Fourier dans $L^2_{2\pi}$, identité de Parseval.

Pour $f \in L^2_{2\pi}$, la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$ converge vers f dans $L^2_{2\pi}$, c'est-à-dire en moyenne quadratique :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n(f)\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k\|_2 = 0. \quad (11.3)$$

De plus, on a l'identité de Parseval

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2. \quad (11.4)$$

On résume (11.3) en disant que f est somme, au sens L^2 c'est-à-dire en moyenne quadratique, de sa série de Fourier $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n$.

Exemple 11.30 Une fonction créneau.

Soit la fonction impaire $g \in L^2_{2\pi}$ définie par $g(t) = 1$ lorsque $t \in [0, \pi]$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que $c_n(g) = \frac{2}{i\pi n}$ lorsque $n \in \mathbb{Z}$ est impair et que $c_n(g) = 0$ lorsque n est pair. On a donc, pour tout entier $n \geq 0$,

$$S_n(g) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

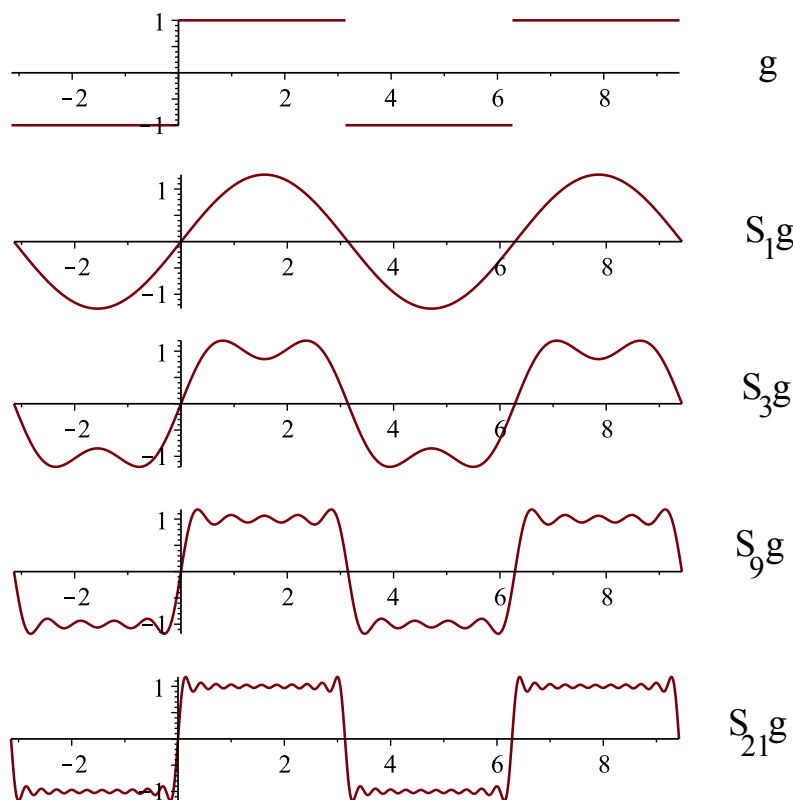


FIGURE 11.1 – Le graphe de la fonction créneau g (exemple 11.30), puis de quelques sommes partielles de Fourier $S_1(g)$, $S_3(g)$, $S_9(g)$ et $S_{21}(g)$.

Nous traçons page 141 le graphe de g ainsi que de quelques unes de ses sommes de Fourier. On voit apparaître un phénomène frappant, appelé phénomène de Gibbs. Au voisinage de chaque discontinuité de g , c'est-à-dire en tout point de $\pi\mathbb{Z}$, la différence $S_n g - g$ a de “grandes” oscillations dont l’amplitude admet une limite strictement positive lorsque $n \rightarrow \infty$.

Cependant, ces oscillations ont lieu sur de petites zones, ce qui n'empêche pas la convergence de $S_n g$ vers g en moyenne quadratique (théorème 11.29) !

Remarque 11.31 Lorsque $f \in C_{2\pi}^0$ est une fonction continue 2π -périodique, elle appartient *a fortiori* à $L_{2\pi}^2$ donc elle est somme, au sens L^2 , de sa série de Fourier. Attention, l'énoncé précédent 11.29 ne dit pas qu'il y a convergence simple de la suite des sommes partielles $S_n(f)$ vers f (revoir la remarque 10.21). De fait, on peut construire des fonctions continues $f \in C_{2\pi}^0$ telles qu'en un certain point $x_0 \in \mathbb{R}$ la suite des valeurs $S_n(f)(x_0)$ soit non bornée ! Par contre, lorsque f est suffisamment régulière, tout se passe bien (théorème 11.44).

Preuve du théorème 11.29.

- Le corollaire 11.18 affirme que la fonction f est limite, dans $L_{2\pi}^2$, d'une suite (p_k) de polynômes trigonométriques. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - p_{k_0}\|_2 \leq \varepsilon$. Désignons par $\ell \in \mathbb{N}$ le degré du polynôme trigonométrique p_{k_0} , voir 11.9. On a donc

$$d(f, \mathcal{P}_\ell) := \inf_{g \in \mathcal{P}_\ell} \|f - g\|_2 \leq \|f - p_{k_0}\|_2 \leq \varepsilon.$$

La suite $(\mathcal{P}_n)$ de sous-espaces vectoriels de $L_{2\pi}^2$ est croissante : pour $n \geq \ell$, on a $\mathcal{P}_\ell \subset \mathcal{P}_n$, donc $d(f, \mathcal{P}_n) \leq d(f, \mathcal{P}_\ell)$ et la proposition 11.28 assure donc que

$$\|f - S_n(f)\|_2 = d(f, \mathcal{P}_n) \leq d(f, \mathcal{P}_\ell) \leq \varepsilon.$$

On a donc bien démontré que $\|f - S_n(f)\|_2 \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

- L'égalité de Parseval s'en déduit. En effet, puisque la famille (e_n) est orthonormée, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|S_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2.$$

Par ailleurs l'inégalité triangulaire assure que

$$\left| \|f\|_2 - \|S_n(f)\|_2 \right| \leq \|f - S_n(f)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi, on a bien

$$\|f\|_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2. \quad \square$$

Remarque 11.32 La famille (e_n) n'est PAS une base (algébrique, i.e. au sens usuel des espaces vectoriels) de $L_{2\pi}^2$. Seuls les polynômes trigonométriques s'écrivent comme combinaisons linéaires (qui sous-entend somme finie) des (e_n) . Pour une fonction $f \in L_{2\pi}^2$ quelconque, on a besoin d'une série infinie.

Le corollaire suivant du théorème 11.29 est immédiat, mais fondamental. Il affirme qu'une fonction de $L^2_{2\pi}$ est connue dès qu'on connaît la suite $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ de ses coefficients de Fourier. En particulier, une fonction $f \in L^2_{2\pi}$ est nulle si et seulement si tous ses coefficients de Fourier sont nuls.

Corollaire 11.33 Injectivité de Fourier dans $L^2_{2\pi}$.

Soient $f, g \in L^2_{2\pi}$ deux fonctions qui ont les mêmes coefficients de Fourier, c'est-à-dire telles que $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Alors $f = g$.

Remarque 11.34 Dans ce contexte, se rappeler que l'égalité $f = g$ dans $L^2_{2\pi}$ signifie que deux représentants quelconques de $[f]$ et $[g]$ sont égaux presque partout.

On sait également décrire les suites $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ qui sont la suite des coefficients de Fourier d'une fonction $f \in L^2_{2\pi}$, voir le corollaire 11.42.

Remarque 11.35 Lemme de Riemann-Lebesgue et injectivité de Fourier. Lorsqu'une série numérique converge, son terme général tend vers 0. Une conséquence de l'identité de Parseval est donc que les coefficients de Fourier d'une fonction $f \in L^2_{2\pi}$ tendent vers 0 :

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} |c_n(f)| = 0.$$

Cette assertion est encore vraie, mais de démonstration plus délicate, pour les coefficients de Fourier d'une fonction $f \in L^1_{2\pi}$ (voir la remarque 11.23) : elle porte alors le nom de lemme de Riemann-Lebesgue.

De même, l'injectivité de Fourier est vraie dans $L^1_{2\pi}$: une fonction $f \in L^1_{2\pi}$ dont tous les coefficients de Fourier sont nuls est la fonction nulle (de façon équivalente, deux fonctions $f, g \in L^1_{2\pi}$ qui ont mêmes coefficients de Fourier sont égales). Mais la démonstration de ces résultats est plus délicate que dans l'espace de Hilbert $L^2_{2\pi}$.

Remarque 11.36 Dans l'exercice suivant, on va lire les symétries de $f \in L^2_{2\pi}$ sur ses coefficients de Fourier. Rappelons que les notations $f \in L^2_{2\pi}$, ou bien $f \in L^1_{2\pi}$, désignent des classes de fonctions.

La plupart du temps, on choisit de confondre une fonction $f \in \mathcal{L}^2_{2\pi}$ et sa classe $[f] \in L^2_{2\pi}$: voir les remarques 8.7 et 10.19. Il est bon de revenir sur cette subtilité avant de traiter l'exercice 11.37, où l'on repère les symétries de $f \in L^2_{2\pi}$ (il s'agit donc d'une classe de fonctions) sur ses coefficients de Fourier.

Une fonction $f \in \mathcal{L}^2_{2\pi}$ est à valeurs réelles si et seulement si elle est égale à sa conjuguée, c'est-à-dire si $f = \bar{f}$. Soit maintenant $[f] \in L^2_{2\pi}$ la classe associée. On dira que $[f]$ est à valeurs réelles si et seulement si $[f] = [\bar{f}]$. C'est le cas si et seulement si $f = \bar{f}$ p.p., ou encore si et seulement si la fonction $f \in \mathcal{L}^2_{2\pi}$ est égale p.p. à une fonction $g \in \mathcal{L}^2_{2\pi}$ qui est à valeurs

réelles. En d'autres termes, la classe $[f] \in L_{2\pi}^2$ est "à valeurs réelles" si et seulement si elle admet un représentant $g \in \mathcal{L}_{2\pi}^2$ (c'est-à-dire avec $[f] = [g]$) qui est à valeurs réelles.

On définit de même le fait que $[f] \in L_{2\pi}^2$ soit paire, ou bien impaire.

Exercice 11.37 Lire les symétries de f sur ses coefficients de Fourier.

Soit $f \in L_{2\pi}^2$.

1. Montrer que f est à valeurs réelles si et seulement si on a $c_n(f) = \overline{c_{-n}(f)}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que f est paire si et seulement si $c_n(f) = c_{-n}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
3. Montrer que f est impaire si et seulement si $c_n(f) = -c_{-n}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 11.38 Soit $f \in L_{2\pi}^2$.

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, montrer que la fonction translatée définie par $\tau_a f : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t - a) \in \mathbb{C}$ appartient à $L_{2\pi}^2$, et déterminer ses coefficients de Fourier en fonction de ceux de f .
2. Ecrire l'identité de Parseval pour la fonction $\tau_a f$, et la comparer à l'identité de Parseval pour f .

Exercice 11.39 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction 2π -périodique telle que $f(x) = x$ lorsque $-\pi < x \leq \pi$.

1. Dessiner le graphe de f , montrer que $f \in L_{2\pi}^2$ et calculer ses coefficients de Fourier.
2. Le résultat trouvé est-il conforme à ce qu'on a montré dans l'exercice 11.37?
3. En déduire la valeur de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Remarque 11.40 Changer de période.

Bien entendu, on peut considérer des fonctions T -périodiques, avec $T \neq 2\pi$! Le produit scalaire sur L_T^2 est alors défini par $\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_{[0, T]} f(t) \overline{g(t)} d\lambda(t)$, la famille orthogonale à considérer est définie pour $n \in \mathbb{Z}$ par $e_n : t \mapsto e^{in \frac{2\pi}{T} t}$ et les coefficients de Fourier de f par $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{T} \int_{[0, T]} f(t) e^{-in \frac{2\pi}{T} t} d\lambda(t)$. La série trigonométrique

$$t \longrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{in \frac{2\pi}{T} t}$$

converge alors vers f dans L_T^2 et l'identité de Parseval s'écrit

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Remarque 11.41 Séries de Fourier réelles.

Lorsque $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction 2π -périodique à valeurs réelles, et de carré sommable sur une période, on peut préférer éviter d'utiliser les

exponentielles complexes et écrire son développement en série de Fourier à l'aide des fonctions trigonométriques élémentaires réelles $\kappa_n : t \mapsto \cos nt$ et $\sigma_n : t \mapsto \sin nt$ ($n \in \mathbb{N}$).

Les résultats qu'on vient d'obtenir se traduisent alors comme suit. La fonction f est égale dans $L^2_{2\pi}$ à la somme de la série trigonométrique (qui converge en moyenne quadratique) :

$$t \mapsto a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt)), \text{ où}$$

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} f(t) d\lambda(t)$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{[0,2\pi]} f(t) \cos(nt) d\lambda(t) \quad (n \geq 1)$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{[0,2\pi]} f(t) \sin(nt) d\lambda(t) \quad (n \geq 1).$$

L'identité de Parseval s'exprime alors

$$\|f\|_2^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2).$$

La fonction est paire ssi tous les b_n sont nuls. Elle est impaire ssi tous les a_n sont nuls.

Vous savez déjà que deux espaces vectoriels euclidiens de même dimension finie sont isométriques (corollaire 10.24). De même en hermitien.

Il se trouve que les espaces de Hilbert que l'on rencontre naturellement, notamment l'espace $L^2_{2\pi}$ que nous venons d'étudier, sont tous isométriques au même modèle $\ell^2(\mathbb{Z})$. C'est le cas de tous les espaces de Hilbert de dimension infinie qui sont "séparables" (c'est-à-dire pas trop gros : on leur impose de contenir une partie dénombrable dense).

Corollaire 11.42 Isomorphisme entre $L^2_{2\pi}$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Rappelons (exercice 10.12) que $\ell^2(\mathbb{Z})$ désigne l'espace de Hilbert des suites, indexées par $\mathbb{Z}$, à valeurs complexes et de carré sommable.

L'application "Fourier"

$$\mathcal{F} : f \in L^2_{2\pi} \longrightarrow (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

qui, à une fonction 2π -périodique f qui est de carré intégrable sur une période, associe la suite $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ de ses coefficients de Fourier est linéaire. Elle réalise une bijection, et même une isométrie, entre les espaces de Hilbert $L^2_{2\pi}$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Preuve On vient de voir que l'application linéaire $\mathcal{F} : L_{2\pi}^2 \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ est bien définie, et qu'elle vérifie

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \|(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2}^2 = \|\mathcal{F}(f)\|_{\ell^2}^2$$

donc est isométrique. Il suit qu'elle est injective.

Reste à voir que $\mathcal{F}$ est surjective. Pour cela, on considère une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, et on cherche à construire une fonction $f \in L_{2\pi}^2$ dont c'est la suite des coefficients de Fourier. On brûle de prendre $f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k e_k$, mais il faut être soigneux. Il faut déjà donner un sens à l'expression de droite, c'est-à-dire montrer que la série converge dans l'espace $L_{2\pi}^2$. Ensuite, il faut vérifier qu'on a bien répondu au problème, et que cette fonction convient.

Introduisons donc la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques définis pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$S_n := \sum_{k=-n}^n \gamma_k e_k.$$

Par construction, les coefficients de Fourier des S_n vérifient $c_k(S_n) = \gamma_k$ si $|k| \leq n$ et $c_k(S_n) = 0$ sinon (voir l'exercice 11.22). Autrement dit " S_n est solution du problème jusqu'au degré n ".

On constate que la suite (S_n) est de Cauchy dans $L_{2\pi}^2$. En effet, les monômes trigonométriques (e_n) forment un système orthonormé et la suite (γ_n) est supposée de carré sommable. Il suit que, pour $p \geq n \geq 0$:

$$\begin{aligned} \|S_p - S_n\|_2^2 &= \left\| \sum_{k=-p}^{-n} \gamma_k e_k + \sum_{k=n}^p \gamma_k e_k \right\|_2^2 = \sum_{k=-p}^{-n} |\gamma_k|^2 + \sum_{k=n}^p |\gamma_k|^2 \\ &\leq \sum_{|k| \geq n} |\gamma_k|^2 \xrightarrow{n, p \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Puisque l'espace $L_{2\pi}^2$ est complet (théorème 10.18), la suite (S_n) converge vers une fonction $f \in L_{2\pi}^2$, c'est-à-dire que $\|f - S_n\|_2 \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Il reste à voir que les (γ_n) sont bien les coefficients de Fourier de f . On fixe $k \in \mathbb{Z}$. Pour $n \geq |k|$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz (ou bien l'identité de Parseval) permet d'estimer la différence :

$$|c_k(f) - \gamma_k| = |c_k(f) - c_k(S_n)| \leq \|f - S_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Il suit que $c_k(f) = \gamma_k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, ce qu'on voulait. $\square$

D La théorie ponctuelle des séries de Fourier

La théorie ponctuelle des séries de Fourier est considérablement plus difficile que la théorie hilbertienne que nous venons de voir. Nous nous contentons donc de quelques résultats élémentaires, en nous limitant aux fonctions 2π -périodiques qui sont continues et de classe C^1 par morceaux.

Définition 11.43 Fonction C^1 par morceaux.

Soit $f \in C_{2\pi}^0$ une fonction continue et périodique. On dit que f est de classe C^1 par morceaux lorsqu'il existe une subdivision $(s_0, \dots, s_k)$ de l'intervalle $[0, 2\pi]$ telle que les restrictions $f|_{[s_j, s_{j+1}]}$ de f à chacun des intervalles fermés de la subdivision soient de classe C^1 .

Cela signifie que, la fonction est de classe C^1 sur l'intervalle ouvert $]s_j, s_{j+1}[$, qu'elle admet une dérivée à droite en s_j et une dérivée à gauche en s_{j+1} , que $f'(t) \rightarrow f'_d(s_j)$ lorsque $t \in]s_j, s_{j+1}[$ converge vers s_j , et que $f'(t) \rightarrow f'_g(s_{j+1})$ lorsque $t \in]s_j, s_{j+1}[$ converge vers s_{j+1} .

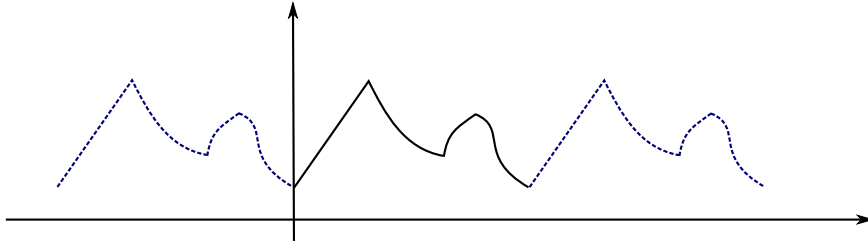


FIGURE 11.2 – Une fonction périodique et C^1 par morceaux.

Théorème 11.44 Théorème de Dirichlet.

Soit $f \in C_{2\pi}^0$ de classe C^1 par morceaux. Alors, la série de Fourier de f converge uniformément vers f , c'est-à-dire que la suite des sommes partielles de Fourier $S_n(f) := \sum_{k=-n}^n c_k(f)e_k$ converge uniformément vers f lorsque $n \rightarrow \infty$:

$$\|f - S_n(f)\|_\infty = \left\| f - \sum_{k=-n}^n c_k(f)e_k \right\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

La fin de ce paragraphe est dédiée à la preuve du théorème de Dirichlet.

On a déjà évoqué le fait que les coefficients de Fourier $c_n(f)$ d'une fonction $f \in L_{2\pi}^2$ tendent vers 0 lorsque $|n| \rightarrow \infty$ (lemme de Riemann-Lebesgue 11.35). Plus f sera régulière, plus ses coefficients de Fourier tendront rapidement vers 0. Cela résultera de la propriété suivante.

Lemme 11.45 Soit $f \in C_{2\pi}^0$ une fonction continue et de classe C^1 par morceaux. Alors sa dérivée, qui est définie en tout point où f est dérivable (c'est-à-dire, sur chaque période, en dehors d'un nombre fini de points) est une fonction bornée, donc dans $L_{2\pi}^2$, et l'on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la relation suivante entre leurs coefficients de Fourier :

$$c_n(f') = in c_n(f).$$

Preuve Cela va résulter d'une intégration par parties, pour ces intégrales de Riemann. Considérons en effet une subdivision $(s_0, \dots, s_k)$ de l'intervalle $[0, 2\pi]$ associée à f (définition 11.43). Soit $n \in \mathbb{Z}$. Puisque les termes de bord se compensent deux par deux (rappelons en effet que $f(0) = f(2\pi)$), on a :

$$\begin{aligned} 2\pi c_n(f') &= \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-int} dt = \sum_{j=0}^{k-1} \int_{s_j}^{s_{j+1}} f'(t) e^{-int} dt \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \left[f(t) e^{-int} \right]_{s_j}^{s_{j+1}} - \sum_{j=0}^{k-1} \int_{s_j}^{s_{j+1}} f(t) (-in) e^{-int} dt \\ &= in \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = 2\pi in c_n(f). \quad \square \end{aligned}$$

Corollaire 11.46 Soit $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ une suite de carré sommable. Alors, une famille satisfaisant $c_n = \frac{\gamma_n}{in}$ pour tout $n \neq 0$ est sommable.

En particulier, la famille $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier d'une fonction $f \in C_{2\pi}^0$ continue et de classe C^1 par morceaux est sommable.

Définition 11.47 Rappelons qu'une famille $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes est sommable lorsque $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| := \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{|n| \leq N} |c_n| < \infty$.

Preuve La première assertion est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ (proposition 10.8 et exercice 10.12). On a en effet

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left| \frac{\gamma_n}{in} \right| \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\gamma_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} < \infty.$$

La seconde s'en déduit en utilisant le lemme 11.45. □

Nous allons en déduire que la série de Fourier d'une fonction $f \in C_{2\pi}^0$ qui est de classe C^1 par morceaux est uniformément convergente.

Proposition 11.48 Complétude de $C_{2\pi}^0$.

L'espace $(C_{2\pi}^0, \|\cdot\|_\infty)$ des fonctions continues 2π -périodiques muni de la norme sup est un espace métrique complet.

Preuve Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $(C_{2\pi}^0, \|\cdot\|_\infty)$. Nous allons montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. La proposition 1.44 assure alors que f est continue, comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues. La fonction f est également 2π -périodique : passer à la limite lorsque $n \rightarrow \infty$ dans l'égalité $f_n(x+2\pi) = f_n(x)$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

Commençons par montrer la convergence simple de la suite (f_n) . Fixons $x \in \mathbb{R}$. L'hypothèse assure que la suite de nombres complexes $(f_n(x))$ est de Cauchy ; puisque $\mathbb{C}$ est complet, cette suite converge ; on notera $f(x)$ sa limite.

A ce stade, on a la convergence simple de la suite (f_n) vers f . Reste à montrer que la convergence est uniforme. Exprimons que la suite (f_n) est uniformément de Cauchy. Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe donc un rang N tel que l'on ait $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$ pour tous $n, m \geq N$, c'est-à-dire $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ pour tous $n, m \geq N$ et tout $x \in \mathbb{R}$. Fixons alors $n \geq N$, et faisons tendre m vers ∞ . Il vient $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ et tout $x \in \mathbb{R}$, ou encore $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ dès que $n \geq N$: la suite (f_n) converge donc uniformément vers f , comme annoncé. $\square$

Lemme 11.49 Série trigonométrique uniformément convergente.

Soit $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une suite sommable de nombres complexes : $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\gamma_k| < \infty$.

Alors la suite de polynômes trigonométriques définis par $S_n = \sum_{k=-n}^n \gamma_k e_k$ ($n \geq 0$) converge uniformément vers une fonction $g \in C_{2\pi}^0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Les coefficients de Fourier de g vérifient, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'égalité $c_k(g) = \gamma_k$.

Preuve La suite (S_n) des sommes partielles de cette série de fonctions est uniformément de Cauchy. En effet, on a pour tous $m \geq n$

$$\|S_m - S_n\|_\infty = \left\| \sum_{k=n+1}^m \gamma_k e_k \right\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^m |\gamma_k| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

L'espace $C_{2\pi}^0$ étant complet (proposition 11.48), la suite (S_n) converge donc uniformément vers une fonction continue et 2π -périodique $g \in C_{2\pi}^0$.

Calculons maintenant les coefficients de Fourier de g . Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la majoration

$$|c_k(S_n) - c_k(g)| = |c_k(S_n - g)| \leq \|S_n - g\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donc $c_k(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_k(S_n)$. Chaque fonction $S_n = \sum_{k=-n}^n \gamma_k e_k$ étant un polynôme trigonométrique, l'exercice 11.22 assure que $c_k(S_n) = \gamma_k$ dès que $n \geq |k|$. Il suit que $c_k(g) = \gamma_k$. $\square$

Maintenant que nous avons en main ces résultats préliminaires, nous pouvons passer à la preuve du théorème de Dirichlet.

Preuve du théorème de Dirichlet 11.44.

Soit $f \in C_{2\pi}^0$ de classe C^1 par morceaux.

- On a *a fortiori* $f \in L_{2\pi}^2$. La théorie hilbertienne des séries de Fourier (théorème 11.29) assure donc que la suite $(S_n f)$ converge vers f en moyenne quadratique, c'est-à-dire que $\|S_n f - f\|_2 \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

- Intéressons-nous maintenant à la convergence ponctuelle de la suite de fonctions $(S_n f)$. D'après le corollaire 11.46, la suite $(c_n(f))$ des coefficients de Fourier de f est sommable.

Le lemme 11.49 assure alors que la suite des sommes partielles de la série de Fourier de f , soit $S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k$, converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On note donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e_k(x)$ sa limite. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ (comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues) et 2π -périodique.

- Il nous reste à identifier f et g . Puisqu'on a convergence uniforme de la suite de fonctions $(S_n f)$ vers g , le lemme 11.8 assure qu'on a *a fortiori* convergence en moyenne quadratique, soit $\|S_n f - g\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Puisque l'on sait déjà que $\|S_n f - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, cela assure que $f = g$ au sens de $L_{2\pi}^2$, c'est-à-dire presque partout.

- Les deux fonctions continues $f, g \in C_{2\pi}^0$ coïncident donc presque partout. Le lemme suivant assure qu'on a $f = g$ en chaque point. $\square$

Lemme 11.50 Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions continues. On suppose que $f = g$ p.p. Alors, on a l'égalité $f = g$.

Preuve On procède par l'absurde et on suppose qu'il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x_0) - g(x_0)| = c > 0$. Par continuité de $f - g$, il existe un intervalle ouvert $c \in]a, b[$ contenant c sur lequel $|f - g| < 0$. Contradiction, cet intervalle n'étant pas négligeable. $\square$

Exemple 11.51 Une fonction en dents de scie.

Regardons ce que donne le théorème de Dirichlet pour la fonction 2π -périodique définie par $f : t \in [-\pi, \pi] \mapsto |t| \in \mathbb{R}$. Il s'agit d'une fonction continue, et de classe C^1 par morceaux.

On calcule facilement ses coefficients de Fourier. On trouve $c_0(f) = \frac{\pi}{2}$, puis $c_{2n}(f) = 0$ lorsque $n \neq 0$, et $c_{2n+1}(f) = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{(2n+1)^2}$ lorsque $n \in \mathbb{N}$. (On constate que ce résultat est cohérent avec la parité de f !)

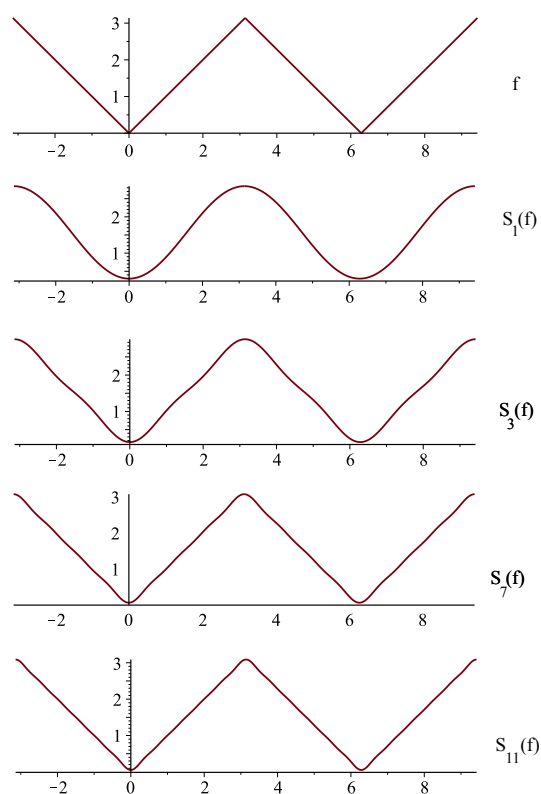


FIGURE 11.3 – Le graphe de la fonction en dents de scie f 11.51, puis de quelques sommes partielles de Fourier $S_1(f)$, $S_3(f)$, $S_7(f)$ et $S_{11}(f)$.

10. Appendice : Intégrale de Riemann

Ce chapitre ne fait pas partie intégrante du cours. C'est un texte auquel vous pouvez vous référer si vous en ressentez le besoin, ou la curiosité. On y rappelle la construction de l'intégrale de Riemann, ainsi que ses principales propriétés.

La notion d'intégrale de Riemann impropre y est évoquée pour les fonctions positives. Le cas des fonctions signées est plus subtil, et ne s'accorde pas avec la théorie de Lebesgue : méfiez-vous.

A Continuité uniforme

Une propriété plus forte que la continuité est l'uniforme continuité. Nous nous en servons pour montrer qu'une fonction continue sur un segment y est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier (proposition 10.23), fait qui est à la base de la définition de l'intégrale de Riemann.

Définition 10.1 Continuité uniforme. *Une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un espace métrique X est uniformément continue si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \eta(\varepsilon) > 0 \text{ tel que} \\ \text{si } x, y \in X \text{ vérifient } d(x, y) < \eta, \text{ alors } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Toute fonction uniformément continue est a fortiori continue.

Exercice 10.2 1. Comparer les définitions de convergence simple versus convergence uniforme ; et de continuité versus continuité uniforme.
2. Les fonctions suivantes $f : x \in \mathbb{R} \rightarrow x \in \mathbb{R}$, $g : x \in \mathbb{R} \rightarrow x^2 \in \mathbb{R}$ et $h : x \in [0, 2] \rightarrow x^2 \in \mathbb{R}$ sont-elles continues ? uniformément continues ?

Théorème 10.3 Théorème de Heine.

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, définie et continue sur un segment, y est uniformément continue.

Preuve Procédons par l'absurde. On suppose donc qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points du segment $[a, b]$ telles que $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ mais avec $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En invoquant le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut supposer (quitte à passer à une sous-suite) que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un $\alpha \in [a, b]$. La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc également vers ce point α . Par continuité de f au point α on a donc $|f(x_n) - f(\alpha)| \rightarrow 0$ et $|f(y_n) - f(\alpha)| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. L'inégalité triangulaire donne donc $|f(x_n) - f(y_n)| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. C'est une contradiction. $\square$

Exercice 10.4 Démontrer de même qu'une fonction continue $f : [c, d] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue.

Plus généralement, toute fonction continue définie sur un espace métrique compact Y est uniformément continue.

Exercice 10.5 1. Montrer que la fonction $f : x \in [0, 1] \rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ est uniformément continue.

2. En déduire que la fonction $h : x \in [0, \infty[\rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ est uniformément continue.

B Fonctions en escalier

Définition 10.6 Subdivision d'un segment.

Une subdivision $\sigma = (s_0, \dots, s_k)$ ($k \geq 1$) du segment $[a, b]$ est une famille finie de points de $[a, b]$ contenant les extrémités et rangés par ordre croissant, soit

$$s_0 = a < s_1 < \dots < s_{k-1} < s_k = b.$$

Le pas de cette subdivision est $h_\sigma := \sup_{j=0}^{k-1} |s_{j+1} - s_j|$.

Définition 10.7 Fonction en escalier.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est une fonction en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (s_0, \dots, s_k)$ du segment $[a, b]$ et des constantes $c_0, \dots, c_{k-1}$ telles que la fonction f soit constante égale à c_j sur chacun des intervalles ouverts $]s_j, s_{j+1}[$ ($0 \leq j \leq k-1$) associés à cette subdivision. On dit alors que la subdivision σ est subordonnée à la fonction en escalier f .

En posant $c = (c_0, \dots, c_{k-1})$, on notera alors $f = E(\sigma, c)$.

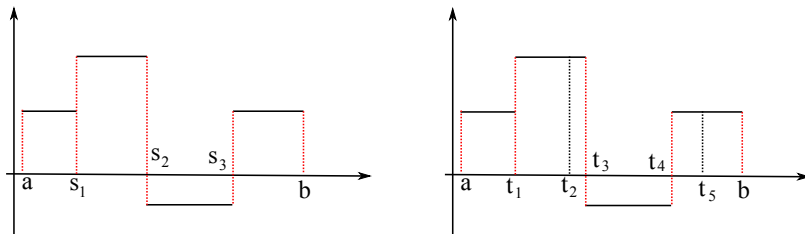


FIGURE 10.1 – Deux subdivisions subordonnées à une même fonction en escalier

Notons qu'on n'a pas précisé la valeur de f aux points (s_j) de la subdivision. En particulier, la notation $f = E(\sigma, c)$ est quelque peu abusive puisqu'elle ne prend pas en compte la valeur de f aux points s_j de la subdivision, c'est-à-dire en un nombre fini de points. Comme il s'agit de définir l'intégrale de f , cela n'aura pas d'importance.

Noter également que, pour une même fonction en escalier, on dispose d'une infinité de subdivisions subordonnées (qui doivent toutes contenir les points de discontinuité de f).

Exemple 10.8 La restriction d'une fonction en escalier sur $[a, b]$ à un sous-segment $[c, d] \subset [a, b]$ est une fonction en escalier sur $[c, d]$.

Notation 10.9 On notera $\mathcal{E}([a, b])$ l'ensemble des fonctions $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier.

Remarque 10.10 Fonction en escalier.

On se permettra de dire qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur tout $\mathbb{R}$ est en escalier s'il existe un segment $[a, b]$ tel que f soit nulle en dehors de ce segment, et tel que la restriction $f|_{[a, b]}$ soit une fonction en escalier.

Exercice 10.11 Décider, pour chacune des fonctions suivantes, s'il s'agit d'une fonction en escalier : $f = \mathbb{1}_{[0, 1]}$, $g = \mathbb{1}_{[0, 1]}$, $h = \mathbb{1}_{[0, \infty[}$ et $k = \mathbb{1}_{[0, 1]} + 2\mathbb{1}_{[1/2, 3]}$. Lorsque c'est le cas, exhiber plusieurs subdivisions subordonnées.

Exercice 10.12 Soient $I_j = [a_j, b_j]$ des segments ($1 \leq j \leq n$) et $(c_j)_{1 \leq j \leq n}$ des réels. Démontrer que la fonction $f = \sum_{j=1}^n c_j \mathbb{1}_{[a_j, b_j]}$ est en escalier.

On pourra introduire l'ensemble fini $S = \{a_j, b_j \mid 1 \leq j \leq n\}$ ainsi que $\alpha := \inf S$ et $\beta := \sup S$, et considérer la subdivision du segment $[\alpha, \beta]$ obtenue en rangeant les éléments de S par ordre croissant.

Nous terminons par quelques propositions, sans démonstration. Le lecteur intéressé pourra essayer de les démontrer, de préférence après avoir lu la preuve de la proposition 10.16 (et/ou reprendre son cours de l'an dernier).

Proposition 10.13 La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est en escalier si et seulement si

1. elle prend un nombre fini de valeurs
2. pour tout réel $c \in \mathbb{R}^*$ non nul, l'image réciproque $f^{-1}(c)$ est vide, ou bien est une union finie d'intervalles (ouverts, fermés ou semi-ouverts) bornés.

Proposition 10.14 Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est en escalier si et seulement si elle est combinaison linéaire $f = \sum_{j=1}^n c_j \mathbb{1}_{L_j}$ de fonctions indicatrices d'intervalles bornés L_j .

Proposition 10.15 La valeur absolue $|f|$ et le produit αf d'une fonction en escalier f par un réel α sont des fonctions en escalier. Une somme $f + g$ et un produit fg de fonctions en escalier sont en escalier.

En particulier, pour tout segment $[a, b]$, $\mathcal{E}([a, b])$ est un espace vectoriel.

C Intégrale de Riemann des fonctions en escalier

On veut maintenant définir l'intégrale de Riemann d'une fonction en escalier. On a déjà dit que l'intégrale d'une fonction indicatrice d'intervalle doit être égale à l'aire du rectangle qu'elle dessine. De plus, l'intégrale doit être linéaire : voir l'introduction.

Soit $f = E(\sigma, c)$ une fonction en escalier. Cette fonction s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions indicatrices d'intervalles, puisqu'on a alors $f = \sum_{j=0}^{k-1} c_j \mathbf{1}_{]s_j, s_{j+1}[} + \sum_{j=0}^k f(s_j) \mathbf{1}_{\{s_j\}}$. Nous n'aurons donc pas le choix pour définir son intégrale ! Il reste tout de même à lever une ambiguïté, puisque l'écriture $f = E(\sigma, c)$ n'est pas unique.

Proposition 10.16 *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier.*

On se donne deux subdivisions du segment $[a, b]$ subordonnées à f , soient $\sigma = (s_0, \dots, s_k)$ et $\tau = (t_0, \dots, t_\ell)$ de sorte que $f = c_j$ sur chaque intervalle $]s_j, s_{j+1}[$ (pour $0 \leq j \leq k-1$), et $f = d_i$ sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$ (pour $0 \leq i \leq \ell-1$).

Notons $I(f, \sigma) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j (s_{j+1} - s_j)$ et $I(f, \tau) = \sum_{i=0}^{\ell-1} d_i (t_{i+1} - t_i)$. Alors, on a l'égalité

$$I(f, \sigma) = I(f, \tau).$$

Admettons un instant ce résultat (élémentaire). L'ambiguïté signalée plus haut est levée, on peut donc définir l'intégrale de la fonction en escalier comme la valeur commune des $I(f, \sigma)$ pour les subdivisions subordonnées.

Définition 10.17 **Intégrale d'une fonction en escalier.**

Soient $\sigma = (s_0, \dots, s_k)$ une subdivision du segment $[a, b]$ et $c = (c_0, \dots, c_{k-1})$ des réels. L'intégrale de la fonction en escalier $f = E(\sigma, c)$ est définie par

$$\int_a^b f(t) dt := \sum_{j=0}^{k-1} c_j (s_{j+1} - s_j).$$

Remarque 10.18 Modifier la fonction en escalier f en un nombre fini de points ne change pas la valeur de son intégrale.

L'intégrale de la fonction en escalier f est l'aire "algébrique" de la portion de plan comprise entre le graphe de f et l'axe des abscisses. Cela signifie que l'aire des rectangles au-dessus des intervalles où $f \geq 0$ contribuent à l'intégrale avec un signe +, tandis que l'aire des rectangles au-dessus des intervalles où $f \leq 0$ contribuent à l'intégrale avec un signe -. Dans l'exemple de la figure 10.2, on a $I(f) = A_1 + A_2 - A_3 + A_4$, où les A_i sont les aires des rectangles.

Il est plus commode de prouver la proposition 10.16 en deux étapes.

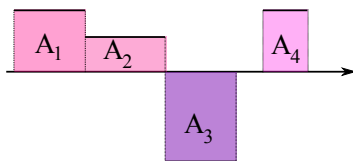


FIGURE 10.2 – Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 10.19 Soient σ et τ deux subdivisions du segment $[a, b]$.

On dit que τ est plus fine que σ lorsque tous les points de σ sont également des points de τ .

La réunion $\sigma \cup \tau$, constituée de la réunion des points de σ et des points de τ , que l'on range par ordre croissant, est encore une subdivision de $[a, b]$.

Preuve de la proposition 10.16

Premier cas : la subdivision τ est plus fine que σ . On commence par montrer que $I(f, \sigma) = I(f, \tau)$ lorsque τ est obtenue en rajoutant un seul point à σ , puis on conclut par récurrence (finie) sur le nombre de points de $\tau \setminus \sigma$. Les détails sont laissés au lecteur.

Cas général. La subdivision $\sigma \cup \tau$ est plus fine que σ , et que τ . Le cas précédent montre donc que $I(f, \sigma) = I(f, \sigma \cup \tau)$, et que $I(f, \tau) = I(f, \sigma \cup \tau)$. L'égalité $I(f, \sigma) = I(f, \tau)$ suit. $\square$

Voici les propriétés fondamentales de l'intégrale de Riemann des fonctions en escalier. Nous les retrouverons en 10.29 pour les fonctions réglées.

Remarquons qu'une fonction en escalier $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée. On rappelle la notation $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| \in [0, +\infty[$.

Proposition 10.20 Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier.

On désigne par $I : f \in \mathcal{E}([a, b]) \rightarrow \int_a^b f(t) dt \in \mathbb{R}$ l'intégrale de Riemann des fonctions en escalier définies sur le segment $[a, b]$. Alors, l'application $I : \mathcal{E}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ est :

1. **linéaire** : pour $f, g \in \mathcal{E}([a, b])$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$;
2. **positive donc croissante** : pour $f \in \mathcal{E}([a, b])$ positive, on a $I(f) \geq 0$; pour $f, g \in \mathcal{E}([a, b])$ avec $f \geq g$, on a $I(f) \geq I(g)$;
3. **continue** : pour $f \in \mathcal{E}([a, b])$, on a $|I(f)| \leq (b - a) \|f\|_\infty$;
4. **additive (relation de Chasles)** : pour $f \in \mathcal{E}([a, b])$ et $a \leq u \leq b$, on a $\int_a^b f(t) dt = \int_a^u f(t) dt + \int_u^b f(t) dt$.

Preuve 1. On choisit des subdivisions σ et τ respectivement associées aux fonctions f et g . La subdivision $\sigma \cup \tau = (x_0, \dots, x_k)$ est alors subordonnée à toute combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ de f et g .

On a donc $I(\alpha f + \beta g) = I(\alpha f + \beta g, \sigma \cup \tau)$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Supposons que $f = c_j$ sur $]x_j, x_{j+1}[$ et $g = d_j$ sur $]x_j, x_{j+1}[$. En regroupant les termes, on aura pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha f + \beta g) dt &= \sum_{j=0}^{k-1} (\alpha c_j + \beta d_j)(x_{j+1} - x_j) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \alpha c_j (x_{j+1} - x_j) + \sum_{j=0}^{k-1} \beta d_j (x_{j+1} - x_j) \\ &= \alpha \int_a^b f dt + \beta \int_a^b g dt. \end{aligned}$$

2. Supposons que la fonction en escalier f prenne des valeurs positives ou nulles. Si σ est une subdivision subordonnée à f , avec $f = E(\sigma, c)$, les c_j sont tous positifs ou nuls. Il suit alors de la définition que $I(f) \geq 0$.

Supposons maintenant que $f \geq g$. La fonction en escalier $f - g \geq 0$ est positive ou nulle. Par linéarité de l'intégrale, et la positivité, on a donc $I(f) - I(g) = I(f - g) \geq 0$, ce qu'on voulait.

3. Puisque $-\|f\|_\infty \leq f \leq \|f\|_\infty$, et $\int_a^b 1 dt = (b - a)$, cette assertion découle de la croissance et de la linéarité de l'intégrale.

4. Si $f = E(\sigma, c)$, utiliser la subdivision $\sigma \cup \{u\}$ (qui est également subordonnée à f) pour découper l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ en deux parties. $\square$

Remarque 10.21 La propriété 3. dit que l'application $I : \mathcal{E}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ (linéaire) est continue, lorsque l'espace vectoriel $\mathcal{E}([a, b])$ est muni de la norme $\sup \| \cdot \|_\infty$. On a en effet, pour toutes $f, g \in \mathcal{E}([a, b])$, la majoration

$$|I(f) - I(g)| = |I(f - g)| \leq (b - a) \|f - g\|_\infty,$$

donc $I : \mathcal{E}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne.

D Intégrale de Riemann des fonctions réglées

L'intégrale de Riemann, que nous venons de définir pour les fonctions en escaliers, s'étend facilement aux fonctions réglées et, en particulier, aux fonctions continues.

Définition 10.22 Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un segment est réglée si elle est limite uniforme, sur ce segment, d'une suite $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de fonctions en escaliers, c'est-à-dire si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0.$$

Une fonction en escalier est réglée. Donnons tout de suite d'autres exemples.

Proposition 10.23 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Si f est continue, elle est réglée.
2. Si f est continue par morceaux, elle est réglée.
3. Si f est limite uniforme de fonctions réglées, elle est réglée.
4. Si f est monotone, elle est réglée.

Avant de démontrer cette proposition, rappelons la définition suivante.

Définition 10.24 Fonction continue par morceaux.

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (s_0, \dots, s_k)$ de $[a, b]$ telle que la restriction de f à chaque intervalle $]s_j, s_{j+1}[$ de la subdivision soit continue et ait une limite finie aux bornes de cet intervalle.

Exemple 10.25 Une fonction en escalier est continue par morceaux. Les fonctions $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définies respectivement par $f(0) = g(0) = 0$, $f(x) = 1/x$ et $g(x) = \sin(1/x)$ si $0 < x \leq 1$, ne le sont pas.

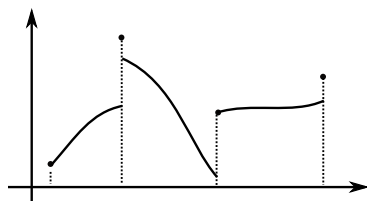


FIGURE 10.3 – Le graphe d'une fonction continue par morceaux.

Preuve de la proposition 10.23 1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Elle est alors uniformément continue d'après le théorème de Heine 10.3. Soient $\varepsilon > 0$, et le η qui lui est associé par Heine. On choisit une subdivision $\sigma = (s_0, \dots, s_k)$ de $[a, b]$ dont le pas $h_\sigma = \sup_{j=0}^{k-1} |s_{j+1} - s_j|$ est inférieur à η . La fonction en escalier définie par $g(x) = f(s_j)$ lorsque $s_j \leq x < s_{j+1}$ ($0 \leq j \leq k-1$) et $g(b) = f(b)$ satisfait $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$ (faire un dessin !)

En appliquant cette construction pour $\varepsilon = 1/n$ ($n \geq 1$), on obtient une fonction en escalier $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui approche uniformément f à $1/n$ près sur le segment $[a, b]$. La suite de fonctions en escaliers $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers f , qui est donc réglée.

2. Supposons maintenant que f est continue par morceaux. Pour simplifier, nous supposons que f est discontinue en un seul point de $]a, b[$, et donc qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ et deux fonctions continues $f_1 : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 : [c, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui coïncident avec f respectivement sur $]a, c[$ et sur $]c, b[$. Soit maintenant $\varepsilon > 0$. D'après le cas précédent, on peut trouver deux fonctions en escaliers $\psi_1 : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi_2 : [c, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui approchent respectivement

f_1 sur $[a, c]$ et f_2 sur $[c, b]$ à ε près. La fonction $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui coïncide avec ψ_1 sur $]a, c[$, avec ψ_2 sur $]c, b[$, et telle que $\psi(a) = f(a)$, $\psi(c) = f(c)$ et $\psi(b) = f(b)$ est en escalier. Par construction, ψ approche uniformément f à ε près sur l'intervalle $[a, b]$.

3. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions réglées qui converge uniformément vers $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on choisit une fonction en escalier $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\|f_n - g_n\|_\infty < 2^{-n}$. L'inégalité triangulaire assure que la suite de fonctions en escaliers $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , qui est donc réglée.

4. Preuve laissée en exercice. Attention, ce n'est pas si facile. $\square$

Proposition 10.26 1. L'ensemble des fonctions réglées sur le segment $[a, b]$ constitue un espace vectoriel, que l'on note $\mathcal{R}([a, b])$.

2. La valeur absolue $|f|$ d'une fonction réglée $f \in \mathcal{R}([a, b])$ est réglée.

3. Une fonction réglée $f \in \mathcal{R}([a, b])$ est bornée.

4. La restriction d'une fonction réglée $f \in \mathcal{R}([a, b])$ à un sous-segment $[c, d] \subset [a, b]$ est une fonction réglée $f|_{[c, d]} \in \mathcal{R}([c, d])$.

Preuve 1. Si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions réglées, respectivement limites uniformes sur $[a, b]$ des suites de fonctions en escalier $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on vérifie facilement que, pour tous réels α et β , la fonction $\alpha f + \beta g$ est limite uniforme sur $[a, b]$ de la suite de fonctions en escalier $(\alpha f_n + \beta g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et est donc réglée.

2. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ réglée est limite uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers, alors $|f|$ est limite uniforme de la suite $(|f_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ des valeurs absolues, qui sont également en escalier. Vérifiez-le!

3. Une fonction en escalier est bornée. Une limite uniforme $f = \lim f_n$, où chaque fonction f_n est bornée, est également bornée. Vérifiez-le!

4. Si f est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier, elle est a fortiori limite uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur le sous-segment $[c, d]$. La restriction de chaque fonction f_n à $[c, d]$ est encore en escalier. $\square$

Nous définissons maintenant l'intégrale de Riemann des fonctions réglées.

Proposition-Définition 10.27 Soit $f \in \mathcal{R}([a, b])$ une fonction réglée, obtenue comme limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite $f_n \in \mathcal{E}([a, b])$ de fonctions en escaliers. Alors la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt$$

existe, et ne dépend pas de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ choisie. L'intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$ est alors définie comme cette limite commune, soit

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Preuve Considérons une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier qui converge uniformément vers une fonction réglée f . On va commencer par montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des intégrales $I_n := \int_a^b f_n(t) dt$ de ces fonctions en escalier est de Cauchy. Puisque $\mathbb{R}$ est complet (proposition 1.7), cette suite convergera alors vers un réel I .

L'hypothèse est que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , soit

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Il suit par l'inégalité triangulaire que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy, soit

$$\|f_n - f_p\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } (n, p) \rightarrow \infty.$$

On déduit alors de la proposition 10.20 que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Elle converge donc vers un réel I .

Soit maintenant une autre suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers convergeant uniformément vers f . La suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des intégrales $J_n := \int_a^b g_n(t) dt$ converge donc également vers un réel J . Il reste à montrer que $I = J$.

Pour cela on introduit une troisième suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, obtenue en intercalant des termes de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On peut poser par exemple $h_{2n} = f_{2n}$, et $h_{2n+1} = g_{2n+1}$ pour tout $n \geq 0$. La suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , donc la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des intégrales $K_n := \int_a^b h_n(t) dt$ est convergente, de limite K . Puisque la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet, par construction, I et J comme valeurs d'adhérence, on a bien $I = J = K$. $\square$

Rappel 10.28 On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet α comme valeur d'adhérence lorsqu'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers α .

Par exemple, la suite définie par $u_n = (-1)^n$ ($n \in \mathbb{N}$) admet exactement deux valeurs d'adhérence, qui sont 1 et -1 .

Une suite convergente, de limite ℓ , admet ℓ pour seule valeur d'adhérence.

Nous montrons maintenant que toutes les propriétés satisfaites par l'intégrale de Riemann des fonctions en escalier (voir la proposition 10.20) sont plus généralement satisfaites pour les fonctions réglées.

Proposition 10.29 Propriétés de l'intégrale des fonctions réglées.

Soit $I : f \in \mathcal{R}([a, b]) \rightarrow \int_a^b f(t) dt \in \mathbb{R}$ l'intégrale de Riemann des fonctions réglées définies sur le segment $[a, b]$. L'application $I : \mathcal{R}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ est :

1. **linéaire** : pour $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a
 $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$;
2. **positive donc croissante** : pour $f \in \mathcal{R}([a, b])$ positive, on a $I(f) \geq 0$;
pour $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ avec $f \geq g$, on a $I(f) \geq I(g)$;
3. **continue** : pour $f \in \mathcal{R}([a, b])$, on a $|I(f)| \leq (b - a) \|f\|_\infty$.

Elle vérifie également :

4. **la relation de Chasles** : pour $f \in \mathcal{R}([a, b])$ et $a \leq u \leq b$, on a $\int_a^b f(t) dt = \int_a^u f(t) dt + \int_u^b f(t) dt$;
5. **l'inégalité triangulaire** : si $f \in \mathcal{R}([a, b])$, on a $|\int_a^b f(t) dt| \leq \int_a^b |f(t)| dt$.

Remarque 10.30 Comme l'indique son étiquette, la propriété 3. exprime la continuité de l'intégrale, pour la convergence uniforme. On a en effet par linéarité de l'intégrale $|I(f) - I(g)| \leq (b - a) \|f - g\|_\infty$ pour $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$. Voir également le corollaire 10.31.

Preuve Cette proposition découle des propriétés correspondantes pour l'intégrale de Riemann des fonctions en escalier (proposition 10.20), et de la définition de l'intégrale d'une fonction réglée 10.27.

1. Soient f et g deux fonctions réglées. On les écrit respectivement comme limites uniformes de deux suites de fonctions en escalier $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a alors d'après 10.20 (1) l'égalité $I(\alpha f_n + \beta g_n) = \alpha I(f_n) + \beta I(g_n)$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Le résultat vient en passant à la limite dans cette égalité lorsque $n \rightarrow \infty$, puisque la suite $(\alpha f_n + \beta g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $\alpha f + \beta g$.

2. Soit $f \geq 0$ une fonction réglée, limite uniforme sur $[a, b]$ de la suite de fonctions en escalier $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour $\varepsilon > 0$, on aura $f_n \geq -\varepsilon$ dès que n est assez grand, et donc $I(f_n) \geq -\varepsilon(b - a)$ par 10.20 (2) appliquée à f_n et à la fonction $-\varepsilon \mathbb{1}_{[a, b]}$. Il suit que $I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) \geq -\varepsilon(b - a)$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a la première assertion. La seconde s'en déduit en considérant la fonction positive $f - g$ et en utilisant l'additivité de l'intégrale.

3. On a $-\|f\|_\infty \mathbb{1}_{[a, b]} \leq f \leq \|f\|_\infty \mathbb{1}_{[a, b]}$, d'où $|I(f)| \leq (b - a) \|f\|_\infty$ en utilisant 2.

4. Soit $f \in \mathcal{R}([a, b])$, limite uniforme sur $[a, b]$ de la suite de fonctions en escaliers $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. A fortiori, la restriction de f à l'intervalle $[a, u]$ y est limite uniforme des restrictions des f_n à cet intervalle. De même pour l'intervalle $[u, b]$. On écrit la relation de Chasles pour les fonctions en escalier f_n (10.20.4)

$$\int_a^b f_n(t) dt = \int_a^u f_n(t) dt + \int_u^b f_n(t) dt .$$

En passant à la limite lorsque $n \rightarrow \infty$, et en revenant à la définition de l'intégrale de f sur chacun des intervalles $[a, b]$, $[a, u]$ et $[u, b]$, on obtient la relation de Chasles pour f .

5. L'encadrement $-|f| \leq f \leq |f|$, la croissance et la linéarité de l'intégrale assurent en effet que $-\int_a^b |f|(t) dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b |f|(t) dt$. $\square$

On a déjà dit (proposition 10.23) qu'une limite uniforme de fonctions réglées sur le segment $[a, b]$ est encore réglée. Que deviennent leurs intégrales ?

Corollaire 10.31 Intégrale d'une limite uniforme de fonctions réglées.

Soit $f_n \in \mathcal{R}([a, b])$ une suite de fonctions réglées, convergeant uniformément vers la fonction réglée $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Alors, on peut intervertir limite et intégrale :

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Preuve Soit $\varepsilon > 0$. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f , il existe un rang $N = N(\varepsilon)$ tel qu'on ait $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$ dès que $n \geq N$. En utilisant la proposition 10.29 (linéarité et continuité), il vient :

$$\begin{aligned} \left| \int_{[a,b]} f(t) dt - \int_{[a,b]} f_n(t) dt \right| &= \left| \int_{[a,b]} (f(t) - f_n(t)) dt \right| \\ &\leq (b-a) \|f_n - f\|_\infty \leq (b-a) \varepsilon. \end{aligned}$$

La différence $\int_{[a,b]} f(t) dt - \int_{[a,b]} f_n(t) dt$ est donc arbitrairement petite lorsque n est assez grand, ce qu'on voulait montrer. $\square$

Corollaire 10.32 Intégrale dépendant d'un paramètre.

Soit $f : [c, d] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit, pour tout $x \in [c, d]$:

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt.$$

Alors la fonction $F : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Preuve C'est une conséquence du théorème de Heine (exercice 10.4), et des propriétés de l'intégrale (continuité, ou inégalité triangulaire selon la façon dont on s'y prend pour présenter la preuve).

La fonction f étant définie et continue sur l'espace compact $[c, d] \times [a, b]$, elle y est uniformément continue. Il suit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour $x, y \in [c, d]$ avec $|x - y| \leq \eta$, on a $|f(x, t) - f(y, t)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [a, b]$. Si $|x - y| \leq \eta$, on a donc en utilisant l'inégalité triangulaire puis la croissance de l'intégrale :

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_a^b (f(x, t) - f(y, t)) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x, t) - f(y, t)| dt \leq (b-a) \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci donne bien la continuité de F . $\square$

Dans l'énoncé précédent, il est important que l'intervalle d'intégration soit compact - ne serait-ce que parce que nous parlons ici d'intégrale de Riemann ! Par contre, l'énoncé se généralise facilement comme suit.

Corollaire 10.33 Intégrale dépendant d'un paramètre (bis).

Soit $f : \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt.$$

Alors la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Preuve Le corollaire 10.32 montre que la restriction de F à tout intervalle compact $[c, d] \subset \mathbb{R}$ est continue. A fortiori, la restriction de F à tout intervalle ouvert borné $]c, d[$ est continue. La continuité étant une propriété locale, le résultat est prouvé. $\square$

Exercice 10.34 Retrouver le résultat du corollaire 10.33 comme cas particulier du théorème 4.29.

Notation 10.35 Relation de Chasles Lorsque $a \leq b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réglée, on convient de poser

$$\int_b^a f(t) dt := - \int_a^b f(t) dt.$$

Cette convention permet d'écrire la relation de Chasles sans états d'âme. Pour $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réglée, et $u, v, w \in [a, b]$ quelconques, on aura toujours

$$\int_u^v f(t) dt = \int_u^w f(t) dt + \int_w^v f(t) dt.$$

Pour conclure ce paragraphe, nous observons qu'une fonction réglée n'est pas toujours continue en chaque point, mais qu'elle est continue en beaucoup d'endroits !

Proposition 10.36 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réglée. Il existe un ensemble fini ou dénombrable $D \subset [a, b]$ tel que f soit continue en chaque point de $[a, b] \setminus D$.

Preuve On écrit la fonction réglée $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ comme limite uniforme d'une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier. Chacune de ces fonctions en escalier g_n est continue sur l'intervalle $[a, b]$ privé d'un ensemble fini de points $D_n \subset [a, b]$. La réunion $D = \cup_{n \in \mathbb{N}} D_n \subset [a, b]$ est donc un ensemble fini ou dénombrable.

Soit $x \in [a, b] \setminus D$. Par construction, on a $D_n \subset D$ pour tout entier n : chacune des fonctions g_n est donc continue au point x . La convergence uniforme de la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f assure que f est également continue au point x : ceci a été annoncé à l'exercice 1.47, démontrons ce résultat.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier n_0 tel que $\|g_{n_0} - f\|_\infty \leq \varepsilon$. La fonction g_{n_0} étant continue au point x , il existe $\eta > 0$ tel que $|g_{n_0}(x) - g_{n_0}(y)| \leq \varepsilon$

pour tout $y \in [a, b]$ tel que $|x - y| \leq \eta$. L'inégalité triangulaire donne donc, toujours pour $y \in [a, b]$ tel que $|x - y| \leq \eta$:

$$|f(x) - f(y)| \leq 2 \|g_{n_0} - f\|_\infty + |g_{n_0}(x) - g_{n_0}(y)| \leq 3\varepsilon,$$

ce qu'on voulait. $\square$

Exercice 10.37 Montrer que la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ des rationnels de $[0,1]$ n'est pas réglée. On commencera par se demander en quels points cette fonction est continue.

On a plus précisément la caractérisation suivante, dont la démonstration est un peu plus délicate. Nous nous contentons d'énoncer le résultat.

Théorème 10.38 *Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est réglée si et seulement si elle admet une limite à droite et une limite à gauche en chaque point de $[a, b]$.*

E Les insuffisances de l'intégrale de Riemann

On a vu que l'intégrale de Riemann se comporte bien vis à vis de la convergence uniforme. C'est bien ! Mais nous ne sommes pas satisfaits pour autant. On peut regretter notamment que :

1. On ne sache pas définir l'intégrale de Riemann de $h := \mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$. En effet, elle n'est pas réglée (pire, elle n'est pas Riemann-intégrable au sens du paragraphe 10.I).

Cette fonction n'a pourtant rien d'effrayant : elle est bornée, et peut s'obtenir comme limite croissante d'une suite de fonctions f_n en escaliers (valant chacune 0 partout sauf en un nombre fini de rationnels, et donc d'intégrales nulles).

On aimerait donc bien que h soit intégrable, et d'intégrale nulle !

2. Le cadre naturel pour échanger limite et intégrale au sens de Riemann soit la convergence uniforme.

En pratique, c'est une condition très restrictive, qui oblige à quelques contorsions pour traiter des exemples qui deviendront simplissimes avec les théorèmes de Lebesgue (théorèmes 2.4 (voir 9.35) et 4.25).

2. L'intégrale de Riemann ne soit naturellement définie que pour des fonctions bornées définies sur un segment (voir cependant le paragraphe F).

On suggère de rédiger l'exercice suivant en utilisant, pour commencer, l'intégrale de Riemann, puis de le traiter en utilisant l'intégrale de Lebesgue.

Exercice 10.39 Soit la suite de fonctions continues définie sur le segment $[0, \pi/2]$ par $f_n(t) = (\sin t)^n$.

1. Esquisser le graphe de f_1 , puis le graphe de f_n pour n grand.
2. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément vers 0 sur l'intervalle $[0, \pi/2]$?

3. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur tout intervalle $[0, a]$ lorsque $0 < a < \pi/2$.
4. En déduire que la suite d'intégrales $I_n := \int_0^{\pi/2} f_n(t) dt$ converge vers 0. On pourra choisir $0 < a < \pi/2$ suffisamment proche de $\pi/2$, estimer séparément $\int_0^a f_n(t) dt$ et $\int_a^{\pi/2} f_n(t) dt$, et utiliser la relation de Chasles et la question (3).

F Intégrales de Riemann impropres (fonctions positives)

L'intégrale de Riemann n'est naturellement définie que pour une fonction (assez régulière, mettons continue pour simplifier) définie sur un segment.

L'intégrale de Riemann "impropre" d'une fonction continue définie, par exemple, sur tout $\mathbb{R}$ est plus délicate à introduire (et n'est pas toujours définie). Dans ce paragraphe, on commence par le cas facile d'une fonction à valeurs positives.

Proposition 10.40 *Soit $f :]a, b[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue positive, définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$, borné ou non.*

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels tendant vers a , $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de réels tendant vers b et supposons qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les inégalités $a < a_n \leq b_n < b$.

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des intégrales de Riemann $I_n = \int_{a_n}^{b_n} f(t) dt$ est croissante. Sa limite $I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \sup I_n \in [0, +\infty]$ (finie, ou infinie) ne dépend pas des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ choisies.

L'hypothèse faite sur les suites assure que la suite des segments $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, et que sa réunion $\cup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] =]a, b[$ est l'intervalle de définition de f .

Preuve La fonction f est positive, et la suite $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ des segments est croissante. Il suit que la suite des intégrales $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Donnons-nous deux autres telles suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (avec $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissant vers a , $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissant vers b et $\alpha_n \leq \beta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Soient $J_n = \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(t) dt$, et $J = \sup J_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ pour lequel $[a_n, b_n] \subset [\alpha_p, \beta_p]$. Puisque f est positive, on a donc $I_n \leq J_p \leq J$. En passant au sup en $n \in \mathbb{N}$, il vient $I \leq J$. Les deux couples de suites jouant des rôles symétriques, on obtient $J \leq I$ d'où l'égalité $I = J$. $\square$

Définition 10.41 **Intégrale de Riemann impropre.**

Soit $f :]a, b[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue positive. L'intégrale de Riemann impropre de f est définie par

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f(t) dt \in [0, +\infty],$$

où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissant vers a , $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissant vers b , avec $a < a_n \leq b_n < b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc égalité

$$\int_{]a,b[} f \, d\lambda = \int_a^b f(t) \, dt$$

des intégrales de Lebesgue, et de Riemann généralisée, de f .

G Intégrales de Riemann semi-convergentes

Le corollaire 3.15 nous fait dire que l'intégrale de Lebesgue est plus générale que celle de Riemann. Ce propos est néanmoins à modérer à la lumière de ce qui suit. Pour simplifier l'exposition, nous supposons que les fonctions considérées sont définies sur l'intervalle $[0, \infty[$. Ce pourrait être n'importe quel intervalle non bornée à droite et/ou non borné à gauche. La fonction pourrait également n'être que continue par morceaux, on bien réglée sur chaque sous-intervalle borné de $[0, \infty[$.

Définition 10.42 Soit $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que l'intégrale (de Riemann) généralisée $\int_0^\infty f(t) \, dt$ est définie lorsque

$$\text{la limite } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) \, dt \text{ existe et est finie.} \quad (10.1)$$

Dans ce cas, on définit l'intégrale (de Riemann) généralisée (on dit également intégrale impropre) de f sur l'intervalle non borné $[0, \infty[$ comme cette limite :

$$\int_0^\infty f(t) \, dt := \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) \, dt. \quad (10.2)$$

Remarque 10.43 • Lorsque la fonction f (qui est mesurable) est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, \infty[$, le théorème de convergence dominée s'appliquera à toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs tendant vers l'infini pour montrer que l'hypothèse (10.1) est satisfaite, avec

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) \, dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{[0,x]} f \, d\lambda = \int_{[0,\infty[} f \, d\lambda.$$

Voir la proposition 3.19. On aura donc, dans ce cas, égalité de l'intégrale de Riemann généralisée et de l'intégrale de Lebesgue de f .

• Par contre, lorsque l'hypothèse (10.1) est satisfaite, on a donné un sens (10.2) à l'intégrale de f sur l'intervalle $[0, \infty[$... mais il se peut que f

ne soit pas intégrable au sens de Lebesgue sur cet intervalle (encore une peau de banane !)

On parle dans ce cas d'intégrale semi-convergente, et l'existence de la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt$ vient alors de compensations de signes (c'est le même genre de phénomène que pour une série qui est convergente sans être absolument convergente, comme $\sum_{n \geq 1} (-1)^n/n$).

• Lorsque $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, on dira que l'intégrale de Riemann généralisée de f est définie lorsque la limite

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow -\infty}} \int_y^x f(t) dt$$

existe, lorsque x et y convergent respectivement vers $+\infty$ et vers $-\infty$, indépendamment l'un de l'autre.

En particulier, la fonction $f : t \in \mathbb{R} \rightarrow t^3 \in \mathbb{R}$ n'admet pas d'intégrale de Riemann généralisée sur $\mathbb{R}$, même si $\int_{-x}^x f(t) dt = 0$ pour tout $x > 0$!

Exemple 10.44 Intégrale de Dirichlet.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = 0$ pour $t \leq 0$ et $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ pour $t > 0$. L'intégrale $\int_0^\infty f(t) dt$ est semi-convergente.

Cependant, la fonction f n'est pas intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, \infty[$.

Pour traiter cet exemple, on suggère de commencer par esquisser le graphe de f . Il faut alors utiliser les périodes de la fonction sinus, puis le fait que la série harmonique $\sum_1^\infty 1/n$ est divergente (donc f n'est pas Lebesgue intégrable) tandis que la série harmonique alternée $\sum_1^\infty (-1)^n/n$ est convergente (donc l'intégrale de Riemann $\int_0^\infty f(t) dt$ est semi-convergente).

H Sommes de Riemann

L'intégrale de Riemann d'une fonction continue peut se calculer en prenant des limites de sommes de Riemann. Dans la pratique, ce résultat ne sert pas à calculer des intégrales mais plutôt, connaissant une intégrale, à calculer des limites de sommes "rigolotes" (selon le sens de l'humour de chacun...)

Définition 10.45 Sommes de Darboux, somme de Riemann.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée définie sur un segment.

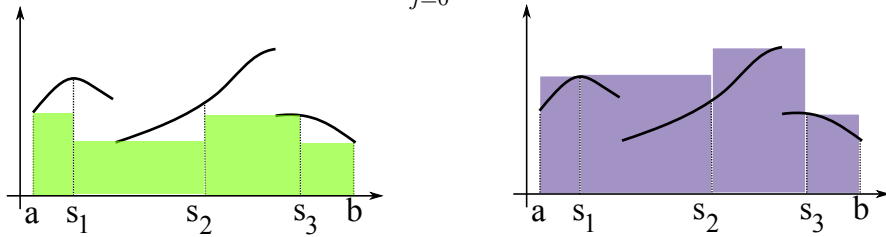
Soit $\sigma = (s_0, \dots, s_k)$ une subdivision de $[a, b]$. Les sommes de Darboux inférieure et supérieure de f associées à la subdivision σ sont définies res-

pectivement par :

$$D_\sigma(f) = \sum_{j=0}^{k-1} (s_j - s_{j-1}) \inf_{t \in [s_{j-1}, s_j]} f(t) \text{ et } D^\sigma(f) = \sum_{j=0}^{k-1} (s_j - s_{j-1}) \sup_{t \in [s_{j-1}, s_j]} f(t).$$

On se donne de plus une famille $T = (t_0, \dots, t_{k-1})$ de points de $[a, b]$ tels que $t_j \in [s_j, s_{j+1}]$. La somme de Riemann correspondante est

$$R(\sigma, T, f) = \sum_{j=0}^{k-1} (s_j - s_{j-1}) f(t_j).$$



Les sommes de Darboux inférieure et supérieure $D_\sigma(f)$ et $D^\sigma(f)$.

Proposition 10.46 Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée, et σ, τ deux subdivisions de $[a, b]$. On a

$$D_\sigma(f) \leq D^\tau(f) \quad (10.3)$$

et, pour toute somme de Riemann $R(\sigma, T, f)$ associée à σ :

$$D_\sigma(f) \leq R(\sigma, T, f) \leq D^\sigma(f). \quad (10.4)$$

Preuve Si τ est une subdivision plus fine que σ , on a

$$D_\sigma(f) \leq D_\tau(f) \leq D^\tau(f) \leq D^\sigma(f) :$$

vérifiez le ! Si σ et τ sont deux subdivisions quelconques, il suit donc que

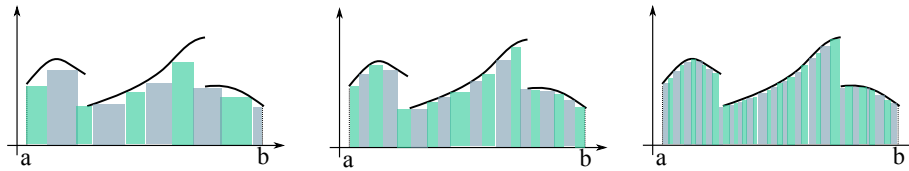
$$D_\sigma(f) \leq D_{\sigma \cup \tau}(f) \leq D^{\sigma \cup \tau}(f) \leq D^\tau(f).$$

La seconde inégalité (10.4) découle immédiatement de la définition des sommes de Riemann et de Darboux. $\square$

Proposition 10.47 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réglée. Lorsque le pas $h_\sigma := \sup_{j=0}^{k-1} |s_{j+1} - s_j|$ de la subdivision σ tend vers 0 :

1. les sommes de Darboux $D_\sigma(f)$ et $D^\sigma(f)$ convergent toutes deux vers l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$;
2. toute somme de Riemann $R(\sigma, T, f)$ associée à σ converge également vers $\int_a^b f(t) dt$.

Ceci signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision de $[a, b]$ dont le pas h_σ est inférieur à η , on a $|D_\sigma(f) - I(f)| \leq \varepsilon$ et $|D^\sigma(f) - I(f)| \leq \varepsilon$.



Convergence des sommes de Darboux $D_\sigma(f)$ vers $I(f)$ lorsque le pas tend vers 0.

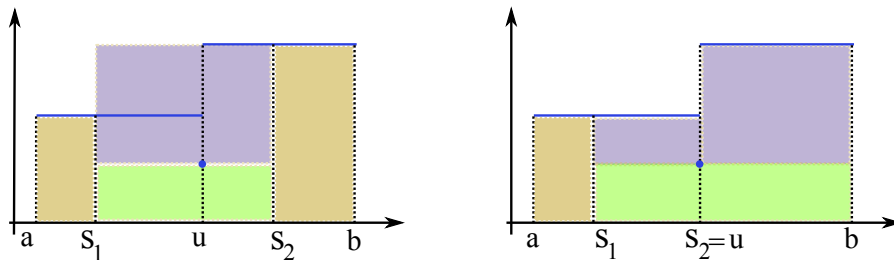
Preuve 1. On prouve d'abord la première assertion pour une fonction f en escalier.

Pour simplifier la preuve, nous supposons que f prend au plus trois valeurs, avec $f = c_1$ sur $[a, u[$, $f(u) = c_2$ et $f = c_3$ sur $]u, b]$. On pose $\delta = \sup_{1 \leq i, j \leq 3} |c_i - c_j|$. Soit $\sigma = (s_0, \dots, s_k)$ une subdivision de $[a, b]$ de pas h_σ . Notons $0 < i < k$ l'indice tel que $a = s_0 < \dots < s_i < u \leq s_{i+1} < \dots < s_k = b$.

Soit $[s_j, s_{j+1}]$ ($0 \leq j \leq k-1$) l'un des intervalles de la subdivision. Si la fonction f est constante sur cet intervalle, ce qui est le cas lorsque $j \neq i$ (ainsi que $j \neq i+1$ dans le cas où $u = s_{i+1}$), cet intervalle apporte la même contribution à $D^\sigma(f)$ et à $D_\sigma(f)$. Voir la figure ci-dessous où l'on a indiqué en bistre, pour deux subdivisions associées à f , les intervalles qui apportent la même contribution à $D_\sigma(f)$ et à $D^\sigma(f)$. On a donc

$$|D^\sigma(f) - D_\sigma(f)| \leq \delta((s_{i+1} - s_i) + (s_{i+2} - s_{i+1})) \leq 2\delta h_\sigma,$$

majorant qui tend vers 0 avec le pas.



Preuve de la proposition 10.47.(1) (en bleu, le graphe de f).

On en déduit alors la propriété pour les fonctions réglées par limite uniforme.

2. Cette deuxième assertion est conséquence de la première, ainsi que de l'encadrement (10.4). $\square$

La plupart du temps, on considérera des sommes de Riemann ou de Darboux associées à des subdivisions régulières, c'est-à-dire telles que, pour $j = 0, \dots, k$, on ait $s_j = a + j \frac{b-a}{k}$.

Exercice 10.48 Montrer que la $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j^2}{n^2}$ existe et la calculer.

I Fonctions Riemann-intégrables

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. D'après la remarque 10.46, on observe l'inégalité suivante entre le sup des sommes de Darboux inférieures et l'inf des sommes de Darboux supérieures :

$$\sup_{\sigma} D_{\sigma}(f) \leq \inf_{\sigma} D^{\sigma}(f),$$

l'inf et le sup étant pris sur toutes les subdivisions σ de l'intervalle $[a, b]$.

On peut alors définir l'intégrale de Riemann dans un cadre plus général que celui des fonctions réglées.

Définition 10.49 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. On dit qu'elle est Riemann-intégrable si et seulement si on a l'égalité

$$\sup_{\sigma} D_{\sigma}(f) = \inf_{\sigma} D^{\sigma}(f).$$

Dans ce cas, l'intégrale de Riemann de f est définie comme étant cette valeur commune

$$\int_a^b f(t) dt := \sup_{\sigma} D_{\sigma}(f) = \inf_{\sigma} D^{\sigma}(f).$$

On vérifie aisément que l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables sur l'intervalle $[a, b]$ constitue un espace vectoriel sur lequel l'intégrale est linéaire, positive, croissante et continue, et que l'intégrale de Riemann vérifie la relation de Chasles (comme dans la proposition 10.29).

Exercice 10.50 Montrer que la fonction indicatrice des rationnels de $[0, 1]$, soit $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$, n'est pas Riemann-intégrable.

On a la caractérisation suivante des fonctions Riemann-intégrables.

Définition 10.51 Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est négligeable si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir A par une famille finie ou dénombrable d'intervalles (I_k) tels que $\sum \ell(I_k) \leq \varepsilon$, ℓ désignant la longueur de l'intervalle.

En termes de la mesure de Lebesgue λ , dire que A est négligeable équivaut à dire qu'il existe une partie mesurable (i.e. borélienne) $N \subset \mathbb{R}$ de mesure nulle, c'est-à-dire avec $\lambda(N) = 0$, et contenant A .

Théorème 10.52 Théorème de Riemann.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Cette fonction est Riemann-intégrable si et seulement si l'ensemble de ses points de discontinuité est négligeable.

Index

- $0 \cdot \infty$, 24
- $\mathbb{1}$, 16
- $\mathcal{B}(X)$, 105
- $C_{2\pi}^0$, 133
- C^1 , 75
- $\mathcal{E}([a, b])$, 156
- $E(\sigma, c)$, 155
- $\mathcal{F}f$, 80
- $\hat{f}$, 80
- $\overline{\mathcal{F}f}$, 81
- G , 84
- $\mathcal{L}^1$, 35, 36
- $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1$, 35
- $\mathcal{L}^1(B)$, 35
- L^1 , 97, 99
- $L_{2\pi}^1$, 133
- $\mathcal{L}^2$, 125
- L^2 , 126
- $L_{2\pi}^2$, 134
- L^p , 101
- L^∞ , 101
- $\mathcal{P}, \mathcal{P}_n$, 135
- $\mathcal{P}(X)$, 104
- $\mathcal{R}([a, b])$, 161
- $\mathcal{S}$, 85
- $S_n(f)$, 142
- $\mathcal{T}$, 104
- $\mathcal{F}$, 147
- $\int_{\mathbb{R}^n} f$, 68
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$, 141
- $\liminf$, 30
- φ_M , 76
- J_φ , 75
- $a_n(f), b_n(f)$, 146
- $c_n(f)$, 141
- $[f]$, 97
- $\|f\|_1$, 99
- $\|f\|_2$, 126
- $\|f\|_\infty$, 17, 19, 101, 133
- $\|f\|_p$, 101
- f^+ , 33
- f^- , 33
- f_a , 82
- χ , 82
- $\ell^2(\mathbb{N})$, 124
- $\ell^2(\mathbb{Z})$, 125, 147
- $\ell_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{N})$, 124
- $\tau_s f$, 82
- $\sqcup$, 106
- $\int_a^b f(t) dt$, 39
- $\int_B f d\lambda$, 41
- $\int_B f(t) d\lambda(t)$, 41
- anti-linéaire, 121
- approximation de l'unité, 137
- approximation de l'unité, 93
- base orthonormée, 127
- borélien, 105
- borne inférieure, 12
- borne supérieure, 11
- caractère, 82
- cardinal, 20
- changement de variable, 40
- coefficients de Fourier, 141
- combinaisons linéaires, 135

- compact (espace métrique), 13
- complet (espace métrique), 13, 99, 125, 126, 150
- concentration, 29
- continue par morceaux, 160
- continue C^1 par morceaux, 149
- continuité, 18
- continuité sous l'intégrale, 63
- continuité uniforme, 154
- convergence simple, 15
- convergence uniforme, 17, 170
- convolution, 90, 136
- critère séquentiel de continuité, 18
- dénombrable, 20
- dérivation sous l'intégrale, 64
- degré d'un polynôme
 - trigonométrique, 135
- demi-droite achevée, 112
- dense, 98
- difféomorphisme, 75
- domination, 61, 62
- ensemble triadique de Cantor, 59
- espace de Banach, 99
- espace de Hilbert, 125, 134
- espace de Schwartz, 85
- espace euclidien, 121, 122
- espace hermitien, 121, 124
- espace mesuré, 106
- espace mesurable, 105
- évanescence, 29
- fonction étagée, 113
- fonction borélienne, 110
- fonction complexe mesurable, 111
- fonction définie p.p., 70
- fonction en escalier, 155, 156
- fonction indicatrice, 16
- fonction intégrable, 33, 36
- fonction intégrable (sur $\mathbb{R}^n$), 68
- fonction mesurable, 110
- fonction réglée, 159
- fonction Riemann-intégrable, 172
- fonctions équivalentes, 49
- gaussienne, 84, 92
- identité de Pythagore, 122
- inégalité de Cauchy-Schwarz, 122, 127
- inégalité de Hölder, 102
- inégalité triangulaire, 35, 36
- injectivité de Fourier, 145
- intégrale d'une fonction complexe, 36
- intégrale d'une fonction réelle, 33
- intégrale dépendant d'un
 - paramètre, 164, 165
- intégrale de Dirichlet, 169
- intégrale semi-convergente, 168
- inversion de Fourier, 84, 86, 89
- jacobien (déterminant), 75
- jacobienne (matrice), 75
- lemme de Fatou, 28, 30, 55
- lemme de Riemann-Lebesgue, 145
- limite inférieure, 30
- majorant, 11
- mesurable (partie), 104
- mesure, 106
- mesure d'une partie, 57
- mesure de comptage, 106
- mesure de Lebesgue, 109
- mesure de probabilité, 106
- mesure finie, 106
- minorant, 12
- négligeable, 57, 58, 72
- norme, 17, 98, 99, 120, 159
- norme euclidienne, 121, 122
- norme hermitienne, 122, 124
- p.p., 59
- Parseval (identité de), 142
- partie négative, 33
- partie positive, 33
- pas d'une subdivision, 155, 160
- polynôme trigonométrique, 135

- positivement linéaire, 114
- presque partout, 59
- procédé d'orthogonalisation de Schmidt, 127
- produit scalaire euclidien, 121, 122
- produit scalaire hermitien, 121, 124
- propriétés fonctionnelles, 82, 83, 86, 91
- relation de Chasles, 162, 165
- représentant, 97
- σ -additif, 106
- série de Fourier, 141, 142, 149
- série normalement convergente, 99
- séries de fonctions, 27
- segment, 13
- sommable (famille), 150
- somme de Riemann, 169
- sommes de Darboux, 169
- sommes partielles de Fourier, 142, 149
- subdivision, 155
- subdivision plus fine, 158
- subdivision subordonnée, 155
- suite de Cauchy, 13
- théorème de Beppo Levi, 115
- théorème de Bolzano-Weierstrass, 13
- théorème de convergence dominée, 54, 61, 69
- théorème de convergence dominée (petit), 108
- théorème de convergence monotone, 22, 115
- théorème de convergence monotone (petit), 107
- théorème de convergence monotone (sur $\mathbb{R}^n$), 68
- théorème de Dirichlet, 149
- théorème de Fubini, 73
- théorème de Fubini-Tonelli, 71
- théorème de Heine, 154
- théorème de la projection, 129
- théorème de Riesz-Fischer, 100
- théorème du changement de variable, 77
- transformée de Fourier, 64
- transformée de Fourier, 80
- tribu, 104
- tribu borélienne, 105
- tribu discrète, 105
- tribu engendrée, 105
- tribu grossière, 105