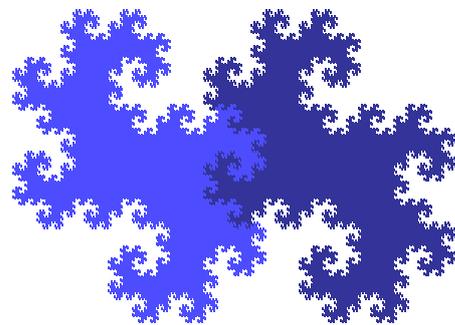
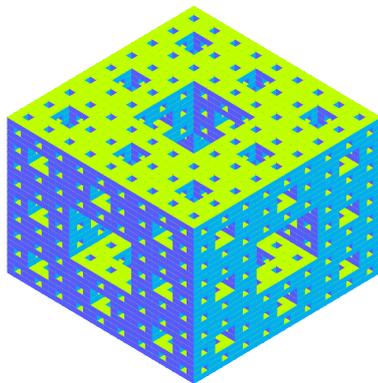


Donjons et Dragons

Fractales, pour une introduction à
l'Analyse Fonctionnelle



Mag357 – Magistère (L3)

Université Paris-Saclay

D. Hulin 2021-22

Manuel du joueur

L'analyse fonctionnelle est apparue au tout début du XX^{ème} siècle. A l'origine l'idée était raisonner géométriquement sur des espaces de fonctions pour obtenir, au travers d'un cadre abstrait unifié, des outils pour s'attaquer à des problèmes divers - notamment la résolution d'équations intégrales.

L'analyse fonctionnelle intervient maintenant dans une large palette de mathématiques et de leurs applications.

Vous avez déjà fait de l'analyse fonctionnelle, peut-être même sans le savoir ! Prenons pour exemple le théorème de représentation de Riesz dans les Hilbert. On prononce les mots projection, orthogonal, hyperplan : c'est de la géométrie. Et on a décrit le dual de l'espace fonctionnel L^2 .

L'analyse fonctionnelle est très présente, notamment en théorie des EDP et en analyse de Fourier. Et que dire de la mécanique quantique sans espaces de Hilbert ?

Dans ce cours introductif, nous étudierons quelques grands classiques d'analyse fonctionnelle parmi les plus abordables : les théorèmes de Baire, de Hahn-Banach et d'Ascoli, la compacité faible (Banach-Alaoglu), ainsi que la construction de mesures par les mesures extérieures pour en déduire le théorème de représentation de Riesz-Markov.

Vous l'aurez compris : l'analyse fonctionnelle n'est pas un but en soi, c'est un outil. Le thème que nous avons choisi pour illustrer ces résultats, et qui donne une unité à ce cours, est géométrique. L'objectif est d'étudier des objets que, dans le langage courant, on appelle des "Fractales". Les exemples que nous fréquenterons sont pour l'essentiel des compacts auto-similaires de l'espace euclidien.

Deux exemples apparaissent en couverture. A droite, les célèbres Dragons jumeaux. A gauche, l'éponge de Menger¹.

¹Promue Donjon à l'occasion du confinement.

Aide de jeu

Les compacts auto-similaires seront introduits au chapitre 4.

Leur construction repose sur le théorème d'Ascoli, qui décrit les parties compactes de $C^0(X, \mathbb{R})$ où X est un espace métrique compact (chapitre 3).

Pour étudier ces compacts auto-similaires, on souhaite leur associer une dimension (dimension de Hausdorff, chapitre 7).

La définition de la dimension de Hausdorff repose sur les mesures de Hausdorff qui seront introduites au chapitre 7.

Au préalable, nous apprendrons au chapitre 5 comment construire une mesure à l'aide d'une mesure extérieure. Ceci nous permettra de démontrer, au chapitre 6, le théorème de représentation de Riesz-Markov (description du dual de $C^0(X, \mathbb{R})$, pour X métrique compact).

Nous voudrions évidemment être capables de déterminer la dimension de Hausdorff d'exemples explicites ! Cela passera par associer à un compact auto-similaire une mesure invariante, ce que nous ferons au chapitre 9.

La construction de cette mesure invariante repose sur un résultat de compacité faible, pour la boule unité du dual d'un evn séparable, qui est fondamental : c'est le théorème de Banach-Alaoglu du chapitre 8.

On étendra ultérieurement ce résultat de compacité faible à un evn qui n'est plus supposé séparable. Dans ce cas, la boule unité du dual n'est plus métrisable, mais reste faiblement compacte. C'est donc l'occasion de parler un peu de topologie générale, au chapitre 10.

Avant de commencer à étudier ses propriétés de compacité, on aura montré au chapitre 2 le théorème de Hahn-Banach, qui assure que le dual continu d'un evn est bien fourni...

Le premier chapitre est consacré au théorème de Baire, et à ses acolytes (théorèmes de Banach-Steinhaus et de l'application ouverte) concernant les applications linéaires entre espaces de Banach.

Un chapitre 0 nous met le pied à l'étrier, avec quelques rappels sur les espaces de Hilbert et les séries de Fourier.

Stratégie

Pour *acquérir de l'expérience...* il vous faudra travailler régulièrement le cours. Pour chaque notion, avoir quelques exemples (ou contre-exemples) en poche. Pour chaque démonstration, en comprendre d'abord la structure globale, dégager les points forts (à quel moment a-t-on fait un pas décisif ?) puis revenir ensuite sur les détails. Et bien sûr préparer tous les exercices qui vous seront proposés au cours de l'année, même ils n'apparaissent pas dans ce polycopié.

Quelques *apartés*, sur fond gris, proposent des remarques ou bien des compléments hors programme.

Grimoires

Le Gall *Intégration, probabilités et processus aléatoires*

Briane-Pagès *Théorie de l'intégration*

Pour tout ce qui concerne la théorie de la mesure

Quéffelec *Topologie*

Pour la distance de Hausdorff et la dimension de Hausdorff

Rudin *Analyse réelle et complexe*

Pour le théorème de Baire et consorts, le théorème de Hahn-Banach et le théorème de représentation de Riesz

Quéffelec-Zuily *Éléments d'analyse pour l'agrégation*

Pour la compacité faible

Falconer *Fractal geometry*

Barnsley *Fractals everywhere*

Comme leur nom l'indique...

Les illustrations de ce polycopié ont été réalisées selon les cas avec :
Maple, Luatex et Tikz, ou encore avec Inkscape pour les dessins moins “techniques”.

Je signale aussi que le package `pst-fractal` de Latex fournit clés en main quelques exemples classiques pour lesquels on peut jouer sur les paramètres. Voir

[http://ctan.math.washington.edu/tex-archive/
graphics/pstricks/contrib/pst-fractal/doc/pst-fractal-doc.pdf](http://ctan.math.washington.edu/tex-archive/graphics/pstricks/contrib/pst-fractal/doc/pst-fractal-doc.pdf)

Scénario

0	Espaces de Hilbert, séries de Fourier	9
A	Espaces de Hilbert	9
B	Bases hilbertiennes	12
C	Motivation pour l'analyse de Fourier	17
D	Espaces de fonctions 2π -périodiques	18
E	Théorie hilbertienne des séries de Fourier	19
F	Séries de Fourier dans $L^1_{2\pi}$ ou $C^0_{2\pi}$	21
F.1	Série de Fourier d'une fonction continue	21
F.2	Série de Fourier d'une fonction intégrable	21
G	Coefficients et séries de Fourier dans $L^1_{2\pi}$	22
1	Le théorème de Baire	27
A	Le lemme de Baire	27
B	Le théorème de Banach-Steinhaus	30
C	Le théorème de l'isomorphisme de Banach	31
D	Le théorème de l'application ouverte	32
E	Le théorème du graphe fermé	34
2	Le théorème de Hahn-Banach	36
A	Formes linéaires continues	36
B	Le théorème de Hahn-Banach	37
C	Un premier prolongement	39
D	Preuve du théorème de Hahn-Banach	40
3	Compacité dans les espaces fonctionnels	43
A	Compacité	43
B	Equicontinuité	45
C	Le théorème d'Ascoli	47
D	Convergence faible-*, une première visite	49
4	Distance de Hausdorff	50
A	Compacts auto-similaires	50
B	Distance de Hausdorff	51
C	Compacité (suite)	53
D	Etude de l'espace $(\mathcal{K}(X), d_H)$	54
E	Attracteur d'un IFS	55
F	Quelques autres exemples	58

5	Mesures extérieures	60
A	La mesure de Lebesgue	60
B	Mesures extérieures	61
C	Des mesures extérieures aux mesures	63
D	Mesures extérieures métriques	65
6	Le théorème de Riesz-Markov	69
A	Formes linéaires positives sur $C^0(X)$	69
B	Un peu de topologie	71
C	Régularité des mesures	72
D	Mesures boréliennes et fonctions continues	74
E	Preuve du théorème de Riesz-Markov positif	74
F	Le théorème de représentation de Riesz-Markov	78
7	Mesures et dimension de Hausdorff	81
A	Vers les mesures de Hausdorff	82
B	Mesures extérieures sur un espace métrique	83
C	Mesures de Hausdorff	84
D	Les mesures de Hausdorff sur \mathbb{R}^d	85
E	Dimension de Hausdorff	88
F	Premiers exemples	90
F.1	Majorer la dimension de Hausdorff	90
F.2	Minorer la dimension de Hausdorff	91
F.3	Dimension de similitude	91
8	Mesures invariantes pour un IFS	93
A	Principe de répartition de masse	93
B	Compacité faible-*, cas séparable	95
C	Mesures de probabilité sur X compact	97
D	Mesure invariante pour un IFS	99
D.1	Action d'un IFS sur les mesures de probabilité	99
D.2	Distance de Hutchinson	101
D.3	Mesure invariante pour un IFS sur \mathbb{R}^d	104
9	Dimension de Hausdorff : exemples	106
A	Le modèle du décalage	106
A.1	Majoration de $\dim_H(\mathcal{C}_p, d_{\mathbb{R}})$	108
A.2	Minoration de $\dim_H(\mathcal{C}_p, d_{\mathbb{R}})$	108
B	Codage	110
B.1	Dimension de similitude d'un IFS	110
B.2	Majoration de $\dim_H K$	111
C	Compacts auto-similaires : séparation stricte	113
C.1	Topologie de l'attracteur	114
C.2	Dimension de Hausdorff des compacts auto-similaires	116
D	Séparation de Moran	116
10	Topologie générale	121
A	Topologie	121
B	Fermés, voisinages, suites, continuité	122
C	Topologie initiale, topologie finale	125

	C.1	Topologie produit	125
	C.2	Topologie quotient	127
D		Espaces vectoriels topologiques	128
E		Compacité	130
F		Topologie faible-*	133
	F.1	Dual d'un evn séparable	134
	F.2	Dual d'un evn quelconque	135
G		Embuscades	137
	G.1	Critères séquentiels	137
	G.2	Borel-Lebesgue versus Bolzano-Weierstrass	138

Personnages



Joseph Lagrange
1736–1813



Joseph Fourier
1768–1830



Peter Dirichlet
1805–1859



Léopold Fejér
1880–1959



David Hilbert
1862–1943



Giulio Ascoli
1843–1896



Félix Hausdorff
1868–1942



René Baire
1874–1932



Hugo Steinhaus
1887–1972



Hans Hahn
1879–1934



Stefan Banach
1892–1945



Constantin Caratheodory
1873–1950



Frigyes Riesz
1880–1956



Helge von Koch
1870–1924



Waclaw Sierpinski
1882–1969



Andrei Tychonov
1906–1993

0. Espaces de Hilbert, séries de Fourier

 EN guise d'introduction, nous revenons rapidement sur les espaces de Hilbert qui vous ont été introduits au premier semestre. La notion fondamentale de base hilbertienne nous permettra de montrer qu'il y a (essentiellement) un seul espace de Hilbert à isométrie près !

Nous poursuivrons avec la théorie hilbertienne des séries de Fourier : tout y est facile et naturel. Puis nous sortirons du cadre hilbertien : les choses ne se passent plus aussi bien... Nous nous contenterons d'évoquer quelques questions concernant les séries de Fourier de fonctions continues, ou intégrables, auxquelles le théorème de Baire nous permettra de répondre au chapitre 1.

A Espaces de Hilbert

Nous commençons par rappeler les définitions et les premières propriétés des espaces de Hilbert. S'agissant de rappels, les démonstrations sont juste évoquées.

Définition 0.1. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{C} . Un produit scalaire hermitien sur E est une application $(x, y) \in E \times E \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{C}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. **linéaire à gauche :**

pour tout $y_0 \in E$, l'application $x \in E \mapsto \langle x, y_0 \rangle \in \mathbb{C}$ est \mathbb{C} -linéaire ;

2. **anti-linéaire à droite :**

pour tout $x_0 \in E$, l'application $y \in E \mapsto \langle x_0, y \rangle \in \mathbb{C}$ est anti-linéaire, c'est-à-dire que pour $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$ et $y_1, y_2 \in E$, on a

$$\langle x_0, t_1 y_1 + t_2 y_2 \rangle = \bar{t}_1 \langle x_0, y_1 \rangle + \bar{t}_2 \langle x_0, y_2 \rangle$$

où \bar{t} désigne bien sûr le complexe conjugué de t ;

3. **symétrie hermitienne :** on a $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ pour tous $x, y \in E$;

4. **défini positive :** on a $\langle x, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in E$ avec égalité $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Noter que, si les conditions (1) et (3) sont satisfaites, la condition (2) s'en déduit.

Définition 0.2. Sur un espace vectoriel réel E , on a de même la notion de produit scalaire euclidien $(x, y) \in E \times E \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$, où la condition de symétrie hermitienne devient une simple symétrie :

(12)'. **bilinéarité :** l'application $(x, y) \in E \times E \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$ est bilinéaire ;

3'. **symétrie :** on a $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ pour tous $x, y \in E$.

Exemple 0.3. L'expression $(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \mapsto \langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j \in \mathbb{C}$ définit un produit scalaire hermitien sur \mathbb{C}^n . C'est la structure hermitienne canonique de \mathbb{C}^n .

Proposition 0.4. Lorsque l'espace vectoriel réel ou complexe E est muni d'un produit scalaire euclidien ou hermitien, on définit une norme sur E en posant

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}.$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tous vecteurs $x, y \in E$ on a l'inégalité

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Identité de Pythagore : pour deux vecteurs $x, y \in E$ orthogonaux, c'est-à-dire dont le produit scalaire $\langle x, y \rangle = 0$ est nul, on a

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Preuve Nous ne redonnons pas la preuve. Rappelons simplement que Cauchy-Schwarz se démontre en utilisant la positivité de $t \in \mathbb{C} \mapsto \|x + ty\|^2 \in \mathbb{R}$, et que l'inégalité triangulaire est conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. \square

Définition 0.5. Soit H un espace vectoriel (réel ou complexe) muni d'un produit scalaire (euclidien ou hermitien) et de la norme associée.

On dit que cet espace est de Hilbert lorsque la distance associée à la norme en fait un espace métrique complet.

Exemple 0.6. • L'espace $\ell_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{N})$ des suites $u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles et de carré sommable, c'est-à-dire telles que $\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k^2 < \infty$, muni du produit scalaire euclidien défini par $\langle u, v \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k v_k$, est un espace de Hilbert réel.

• L'espace $\ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{N})$ des suites $u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs complexes et de carré sommable, c'est-à-dire telles que $\sum_{k \in \mathbb{N}} |u_k|^2 < \infty$, muni du produit scalaire hermitien défini par $\langle u, v \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k \bar{v}_k$, est un espace de Hilbert complexe.

• De même pour les espaces $\ell_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{Z})$ et $\ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ de suites (réelles ou complexes) indexées par \mathbb{Z} et de carré sommable.

• Le théorème de Riesz-Fischer affirme plus généralement que, si X est un espace mesuré, l'espace $L^2(X)$ des fonctions mesurables (réelles, ou complexes) de carré intégrable est un espace de Hilbert (réel, ou complexe) pour le produit scalaire défini par $\langle f, g \rangle = \int_X f(t) \overline{g(t)} dt$. Les espaces de suites $\ell^2(\mathbb{N})$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$ correspondent à \mathbb{N} ou \mathbb{Z} munis de la mesure de comptage. On retiendra également les deux cas particuliers fondamentaux suivants :

★ L'espace $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, muni du produit scalaire défini par $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt$ et de la norme associée $\|f\|_2 = (\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt)^{1/2}$, est un espace de Hilbert.

★ L'espace $L_{2\pi}^2$ des fonctions 2π -périodiques sur \mathbb{R} , de carré intégrable sur une période, est un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$. La norme associée est $\|f\|_2 = (\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt)^{1/2}$.

• Les espaces de Sobolev $H^m(U)$ que vous rencontrerez en EDP. Ce sont les fonctions définies sur un ouvert U de \mathbb{R}^n , qui sont de carré intégrable "ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $m \in \mathbb{N}$."

Ce qui fait la magie des espaces de Hilbert, c'est le théorème de la projection. Nous en déduisons le théorème de représentation de Riesz, puis l'existence de bases hilbertiennes. Nous nous limitons ici à ce dont nous aurons besoin dans ce cours, à savoir le théorème de projection sur un sous-espace vectoriel fermé. On laisse au lecteur le soin de revoir le théorème de projection sur un convexe fermé.

Théorème 0.7. *Soient H un espace de Hilbert, et $F \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé (non réduit à $\{0\}$).*

Pour tout $x \in H$, il existe un unique vecteur $v := \pi_F(x) \in F$ qui réalise la distance de x à F , c'est-à-dire tel que $d(x, F) = \|v - x\|$. Ce vecteur $v \in F$ est caractérisé par la condition $\langle v - x, z \rangle = 0$ pour tout $z \in F$, ou encore $(v - x) \perp F$.

L'application $\pi_F : H \rightarrow F$ est linéaire et de norme 1. On l'appelle l'opérateur de projection orthogonale de H sur F .

Preuve L'existence et l'unicité sont conséquences de l'identité du parallélogramme :

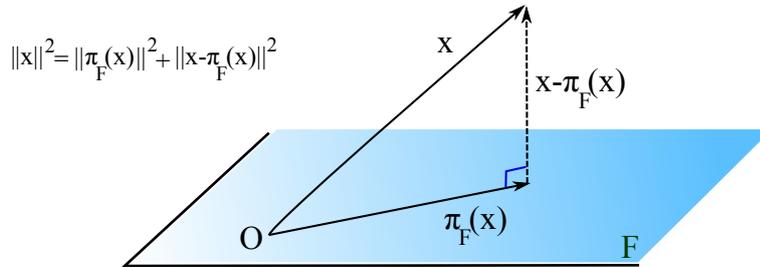
$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \quad \text{pour tous } u, v \in H.$$

Cette identité assure qu'une suite minimisante $u_n \in F$ telle que $\|x - u_n\| \rightarrow d(x, F)$ est de Cauchy, donc converge vers un élément $v \in F$, puisque H est complet. D'où l'existence d'un élément le plus proche de x dans F .

Elle montre également que si $v_1, v_2 \in F$ distincts vérifient $\|x - v_1\| = \|x - v_2\|$, alors le milieu $(v_1 + v_2)/2 \in F$ est strictement plus proche de x , d'où l'unicité. \square

On en tire la conséquence immédiate suivante.

Corollaire 0.8. *Soit $F \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé du Hilbert H . Alors on a la somme directe orthogonale $H = F \oplus F^\perp$. Noter que, si $x = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in F^\perp$, l'égalité de Pythagore dit que $\|x\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.*



Le théorème de représentation de Riesz, pour le dual d'un espace de Hilbert, s'en déduit.

Corollaire 0.9. *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit $\ell : H \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire continue sur H . Il existe un unique vecteur $u \in H$ tel que l'on ait $\ell(x) = \langle x, u \rangle$ pour tout $x \in H$. De plus, on a égalité des normes $\|\ell\| = \|u\|$.*

Preuve Conséquence du corollaire 0.8 appliqué au noyau $F = \ker \ell$. \square

B Bases hilbertiennes

Les bases algébriques sont bien commodes en dimension finie. En dimension infinie elles deviennent essentiellement inutilisables. En particulier un espace de Banach, si il n'est pas de dimension finie, est tout de suite de dimension non dénombrable (voir l'exercice 1.4). Pour un espace de Hilbert, on introduira donc la notion, bien plus utile, de base hilbertienne.

Définition 0.10. Une famille de vecteurs $(e_i)_{i \in I}$ d'un espace vectoriel E constitue une base (algébrique) de cet espace vectoriel si tout vecteur x de E s'écrit, de façon unique, comme combinaison linéaire $x = \sum_{i \in I} a_i e_i$ de vecteurs de cette famille.

Rappel 0.11. Rappelons que, par définition, une combinaison linéaire $\sum_{i \in I} a_i e_i$ est toujours à support fini : tous les a_i sont nuls, sauf un nombre fini d'entre eux. On est dans le domaine de l'algèbre, pas dans celui de l'analyse !

Dans un souci de simplification, nous nous limiterons au cadre des espaces de Hilbert séparables (le plus utile) pour introduire la notion de base hilbertienne. La notion de séparabilité interviendra à plusieurs reprises dans ce cours (chapitres 3 et 7).

Définition 0.12. Un espace métrique est séparable lorsqu'il contient une partie dénombrable dense.

Mentionnons un premier exemple fondamental, que nous retrouverons par la suite, mais que nous proposons dès maintenant comme exercice.

Exercice 0.13. Un espace métrique compact est séparable (voir le lemme 3.8).

Tous les espaces de Hilbert usuels sont séparables.

Exemple 0.14. • Un espace de Hilbert E de dimension finie est séparable. En effet, si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E , la famille $\text{vect}_{\mathbb{Q}}(e_1, \dots, e_n)$ des combinaisons linéaires à coefficients rationnels (si le corps de base $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou à coefficients dans $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) est dénombrable et dense dans E .

• Les espaces de Hilbert $\ell_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{N})$ ou $\ell_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{Z})$ sont séparables.

En effet, l'ensemble dénombrable $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}$ des suites à support fini et à coefficients rationnels est dense dans $\ell_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{N})$ (resp. $\ell_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{Z})$).

Les espaces $\ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{N})$ et $\ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z})$ sont également séparables.

• Les espaces $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sont séparables.

Si les fonctions sont à valeurs réelles, l'ensemble $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}$ des combinaisons linéaires à coefficients rationnels de fonctions indicatrices d'intervalles compacts $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$ est dénombrable. La régularité de la mesure de Lebesgue assure qu'il est dense dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Raisonement analogue pour $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

• L'espace $L^2_{2\pi} \sim L^2([0, 2\pi])$ est séparable. Comme ci-dessus.

• Les espaces de Sobolev $H^m(U)$ sont également séparables.

Même s'ils sont moins présents dans notre quotidien, il existe néanmoins des espaces de Hilbert non séparables.

Exemple 0.15. Soit I un ensemble d'indices. On introduit l'ensemble $\ell^2(I)$ des familles $u = (u_i)_{i \in I}$ de réels (ou de complexes) indexées par I , et qui sont de carré sommable, c'est-à-dire telles que

$$\sum_{i \in I} |u_i|^2 := \sup \left\{ \sum_{i \in F} |u_i|^2 \mid F \subset I \text{ fini} \right\} < \infty.$$

Noter que le support $\{i \in I \mid u_i \neq 0\}$ de $u \in \ell^2(I)$ est dénombrable (pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $I_n = \{i \in I \mid |u_i| \geq 1/n\}$ est en effet fini).

L'ensemble $\ell^2(I)$ est un espace vectoriel réel (ou complexe). L'application

$$(u, v) \in \ell^2(I) \times \ell^2(I) \mapsto \sum_{i \in I} u_i \bar{v}_i \in \mathbb{C}$$

est un produit scalaire et la norme associée fait de $\ell^2(I)$ un espace de Hilbert. L'espace $\ell^2(I)$ est séparable si et seulement si I est fini ou dénombrable.

Pour éviter d'énoncer deux fois les mêmes résultats, on suppose désormais que le corps de base est \mathbb{C} . Les énoncés réels sont semblables, ainsi que les démonstrations. On commence par rappeler ce qui se passe en dimension finie, qui nous servira de modèle.

Lemme 0.16. Soit E un espace de Hilbert complexe de dimension finie. Alors E possède une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ orthonormée, c'est-à-dire dont tous les vecteurs sont de norme 1 et sont deux à deux orthogonaux :

$$\|e_i\|^2 = 1 \text{ et } \langle e_i, e_j \rangle = 0 \text{ pour tous } 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Ce choix de base orthonormée induit une isométrie linéaire

$$j : (z_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n \mapsto \sum_{i=1}^n z_i e_i \in E,$$

où \mathbb{C}^n est muni de sa structure hermitienne canonique (exemple 0.3). Lorsque $z = \sum_{i=1}^n z_i e_i$ et $w = \sum_{i=1}^n w_i e_i$, on a en effet les égalités

$$\|z\|^2 = \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \text{ et } \langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i.$$

Il n'y a donc, à isométrie près, qu'un seul espace de Hilbert complexe de dimension n .

Preuve On part d'une famille génératrice, et on lui applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. \square

Les bases orthonormées sont bien commodes, notamment pour décrire l'opérateur de projection orthogonale.

Exemple 0.17. Soit $E \subset H$ un sous-espace vectoriel de dimension finie de l'espace de Hilbert H . Alors E est fermé dans H . En effet, toutes les normes sur l'espace vectoriel de dimension finie E étant équivalentes, elles en font un espace complet. Ainsi, E est complet pour la norme induite par celle de H , il est donc fermé dans H .

On vérifie facilement que, si (e_0, \dots, e_n) est une base orthonormée de E , la projection orthogonale d'un vecteur $x \in H$ sur E est

$$p_E(x) = \sum_{i=0}^n \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Nous généralisons en 0.19, pour des espaces de Hilbert de dimension infinie, la notion de base orthonormée. Attention, il ne s'agira plus de base algébrique. Nous entrons dans le domaine de l'analyse : les sommes finies laissent la place à des séries.

Définition 0.18. Soit E un espace vectoriel normé. Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est totale lorsque le sous-espace vectoriel $\text{vect}(e_i) \subset E$ qu'elle engendre est dense dans E . Cet espace engendré $\text{vect}(e_i) \subset E$ est, par définition, l'ensemble des combinaisons linéaires (finies... voir le rappel 0.11) des (e_i) .

Théorème-Définition 0.19. Soit H un espace de Hilbert, et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormée. Cette famille constitue une base hilbertienne de H si elle satisfait l'une des conditions équivalentes suivantes :

1. la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale ;
2. **égalité de Parseval** : pour tout $x \in H$, on a $\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, e_n \rangle|^2$;
3. pour tout $x \in H$, on a $x = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \langle x, e_n \rangle e_n$;
4. la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthonormée maximale.

Dans 3, on note $x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$. La convergence de cette série, au sens de la norme de H , fait partie de l'énoncé. On observe que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ est commutativement convergente (on peut réordonner la somme, elle convergera toujours vers la même limite, ici x).

Exercice 0.20. Pour $n \in \mathbb{N}$ on introduit la suite test $u^n = (u_k^n)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ définie par $u_k^n = 1$ si $k = n$ et $u_k^n = 0$ sinon. Montrer que la famille $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ constitue une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N})$.

Exhiber de même une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Remarque 0.21. Soit une famille orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans l'espace de Hilbert H . Pour $n \in \mathbb{N}$, soit le sous-espace vectoriel $E_n = \text{vect}(e_0, \dots, e_n)$. La suite (E_n) est une suite croissante de sous-espaces vectoriels de dimension finie de H . Soit $x \in H$. La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant supposée orthonormée, la projection orthogonale de $x \in H$ sur E_n est $p_{E_n}(x) = \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle e_k$ (exemple 0.17).

L'identité de Pythagore (corollaire 0.8) s'écrit

$$\|x\|^2 = \|p_{E_n}(x)\|^2 + \|x - p_{E_n}(x)\|^2. \quad (1)$$

On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité :

$$\|p_{E_n}(x)\|^2 = \sum_{k=0}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

La série positive $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, e_n \rangle|^2$ est donc convergente, de somme $S_x \leq \|x\|^2$: c'est l'**inégalité de Bessel** (voir la proposition 0.26). Lorsque la famille orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale, cette inégalité devient une égalité (c'est l'égalité de Parseval du théorème 0.19).

Preuve du théorème 0.19

• 1 \Rightarrow 2 Dire que la famille (e_n) est totale équivaut à dire que la réunion croissante $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, qui est un sous-espace vectoriel de E (eh oui !¹), est dense dans H .

Soit $x \in H$. On a donc $d(x, E_n) \searrow_{n \rightarrow \infty} 0$, où $d(x, E_n) = \|x - p_{E_n}(x)\|$. Il suit alors de Pythagore (voir la remarque 0.21) l'égalité

$$S_x := \sum_0^\infty |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2.$$

• 2 \Rightarrow 3 L'identité (1), avec l'hypothèse 2, assurent que

$$\|x - \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

On a donc convergence $p_{E_n}(x) \rightarrow x$ pour tout $x \in H$, lorsque $n \rightarrow \infty$. On notera alors $x = \sum_{k=0}^\infty \langle x, e_k \rangle e_k$, cette série convergeant vers x pour la norme hilbertienne.

• 3 \Rightarrow 4 Soit v un vecteur orthogonal à tous les $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a alors $v = 0$ (il ne peut donc pas être de norme 1 !)

• 4 \Rightarrow 1 On considère l'espace vectoriel fermé engendré par les $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, soit $F = \overline{\text{vect}(E_n \mid n \in \mathbb{N})}$. Si $F \subsetneq H$ était un sous-espace vectoriel strict de H , son orthogonal F^\perp ne serait pas réduit à 0 et contiendrait un vecteur unitaire v qui, par construction, serait orthogonal à tous les $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La famille $\{(e_n)_{n \in \mathbb{N}}\} \cup \{v\}$ serait donc une famille orthonormale. \square

Ce qui est bien sympathique, c'est que tout espace de Hilbert admet des bases hilbertiennes !

¹Une réunion quelconque de sev n'est pas toujours un sev...

Théorème 0.22. *Soit H un espace de Hilbert séparable et de dimension infinie. Il admet alors une base hilbertienne dénombrable $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Rappelons que le cas de la dimension finie a été réglé au lemme 0.16.

Preuve Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable, que l'on suppose dense dans l'espace de Hilbert H . En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à cette famille on obtient une nouvelle famille (a priori finie ou dénombrable) $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et qui est maintenant orthonormée. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un entier $K \leq k$ tel que $\text{vect}(u_0, \dots, u_k) = \text{vect}(e_0, \dots, e_K)$.

La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc totale. Elle est dénombrable puisque $\dim H$ n'est pas finie, et c'est une base hilbertienne de H . \square

Mentionnons que, lorsque l'espace H n'est pas séparable, il admet également une base hilbertienne mais celle-ci n'est alors plus dénombrable (la définition est semblable à 0.19, mais fait intervenir des familles sommables et non des séries). Par exemple, les suites test constituent encore une base hilbertienne de $\ell^2(I)$, même lorsque I n'est plus dénombrable.

Exemple 0.23. Les monômes trigonométriques définis pour $n \in \mathbb{Z}$ par $e_n(t) = e^{int}$ forment une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$ (voir le paragraphe 0.E).

Exercice 0.24. Les fonctions de Hermite

On considère la transformée de Fourier $\mathcal{F} : f \in L^1(\mathbb{R}) \mapsto \hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ définie, pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$, par $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi xt} dx$. Pour $G : x \mapsto e^{-\pi x^2}$, on a $\hat{G} = G$.

On rappelle que le théorème de Plancherel étend $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$ en une isométrie $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$. L'opérateur \mathcal{F} satisfait la formule d'inversion de Fourier $\mathcal{F}(\mathcal{F}f) = f^\vee$, et donc $\mathcal{F}^4 = \text{Id}$.

1. Montrer que la famille $(h_n(x) = x^n e^{-\pi x^2})_{n \in \mathbb{N}}$ est totale dans $L^2(\mathbb{R})$.
Indication : si $f \in L^2(\mathbb{R})$ est orthogonale à toutes les $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ montrer, par un argument de convergence dominée, que la transformée de Fourier de la fonction intégrable $g \in L^1(\mathbb{R})$ définie par $g(x) = e^{-\pi x^2} f(x)$ est nulle.
2. Soit $E_n = \text{vect}(h_0, \dots, h_n)$, pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{F}(E_n) = E_n$.
3. Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On obtient une base hilbertienne $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^2(\mathbb{R})$.

Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que H_n est le produit de $G : x \mapsto e^{-\pi x^2}$ par un polynôme de degré n , puis l'égalité $\hat{H}_n = (-i)^n H_n$.

Indication : remarquer que H_n et $\mathcal{F}(H_n)$ appartiennent à $E_n \cap E_{n-1}^\perp$, puis déterminer le coefficient de proportionnalité en ne regardant que le terme "de plus haut degré" dans $\mathcal{F}(H_n)$.

On a ainsi "diagonalisé" l'opérateur Fourier dans une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

L'existence de bases hilbertiennes assure que deux espaces de Hilbert (sur \mathbb{R} , resp. sur \mathbb{C}) séparables de dimension infinie sont isométriques ! En particulier, les espaces de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ ou $L^2_{2\pi}$ ne sont que deux avatars de l'espace de suites $\ell^2(\mathbb{N})$.

Corollaire 0.25. Soit H un espace de Hilbert (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) séparable de dimension infinie. Le choix d'une base hilbertienne $\mathcal{B} = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ identifie isométriquement H et l'espace modèle $\ell_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{N})$, par l'application linéaire

$$I_{\mathcal{B}} : x \in H \mapsto (\langle x, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{N})$$

d'inverse

$$I_{\mathcal{B}}^{-1} : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{N}) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n \in H.$$

Lorsque la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est plus supposée totale, on a la proposition suivante, dont la preuve est laissée au lecteur (voir la remarque 0.21).

Proposition 0.26. Soient H un espace de Hilbert, et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormée. On désigne par

$$F = \overline{\text{vect}(e_n \mid n \in \mathbb{N})} \subset H$$

le sous-espace vectoriel fermé engendré par cette famille. Alors :

1. **inégalité de Bessel** : pour tout $x \in H$, on a $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$;
2. pour tout $x \in H$, on a $p_F(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \langle x, e_n \rangle e_n$.

C Motivation pour l'analyse de Fourier

On va s'intéresser aux fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont périodiques. Après normalisation, on pourra supposer que leur période est 2π . Ces fonctions passent au quotient en des fonctions définies sur l'espace quotient $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, qui s'identifie au cercle \mathbb{S}^1 par l'application $t \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \mapsto e^{it} \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$.

Parmi les fonctions 2π -périodiques, les fonctions $e_n : t \mapsto e^{int} \in \mathbb{C}$ (pour $n \in \mathbb{Z}$) joueront un rôle particulier. Ce sont les harmoniques de rang n ; elles vérifient l'équation $(e_n)'' = -n^2(e_n)$.

L'objectif des séries de Fourier est de décomposer une fonction (ou une vibration) périodique en superposition de modes élémentaires. Les séries de Fourier ont été initialement introduites par Lagrange dans la seconde moitié du 18ème siècle pour étudier l'équation des cordes vibrantes. Elles furent ensuite reprises par Fourier au début du 19ème siècle pour étudier l'équation de la chaleur. Depuis, cette branche des mathématiques, appelée Analyse Harmonique, a prospéré et connaît des développements qui vont bien au-delà de la motivation initiale.

L'analyse harmonique d'une fonction 2π -périodique s'effectue en deux étapes : décomposition, puis recomposition.

Décomposition : A toute fonction 2π -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ suffisamment gentille (intégrable sur une période) on associe canoniquement une série trigonométrique

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{int}$$

dont les coefficients $c_n(f)$ sont déterminés par f : c'est la série de Fourier de f . A priori, cette série est juste définie formellement, et l'on n'a aucune raison de penser qu'elle converge en aucun sens que ce soit.

Recomposition : La théorie de Fourier affirme que, lorsque la fonction f est assez régulière (en un sens à préciser) la série de Fourier de f converge (en un sens à préciser, et qui dépend de la régularité de f) et qu'elle permet de restituer la fonction initiale f .

Notre objectif premier étant autre, nous ne ferons qu'effleurer ce sujet passionnant, laissant même de côté des théorèmes très élémentaires. Nous nous limiterons donc à la théorie des séries de Fourier des fonctions de carré intégrable, illustration magnifique et simplissime de la notion de base hilbertienne. Nous nous contenterons ensuite de constater que les choses se compliquent de façon inattendue dès que l'on sort de ce cadre hilbertien.

D Espaces de fonctions 2π -périodiques

Pour une fonction 2π -périodique f , la périodicité ainsi que l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation assurent, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'égalité des intégrales suivantes lorsque f est mesurable positive ou bien mesurable et intégrable sur les compacts (c'est-à-dire intégrable sur une période) :

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \int_a^{a+2\pi} f(t) dt.$$

On utilisera la mesure de Lebesgue normalisée $\frac{dt}{2\pi}$, pour laquelle une période $[0, 2\pi]$ est de mesure 1, et qui définit donc une mesure de masse 1 sur le cercle \mathbb{S}^1 . L'avantage de cette normalisation apparaîtra à la proposition 0.31.

Définition 0.27. On introduit l'espace $C_{2\pi}^0$ des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont continues 2π -périodiques. Il s'identifie à $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$. Cet espace, muni de la norme sup définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$, est un espace de Banach.

Proposition-Définition 0.28. Soit $L_{2\pi}^2$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont mesurables, 2π -périodiques, et de carré intégrable sur une période. Cet espace $L_{2\pi}^2$ est un espace de Hilbert pour la norme définie par

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Preuve En effet $L_{2\pi}^2$ s'identifie naturellement à $L^2([0, 2\pi])$, dont vous avez déjà vu que c'est un espace de Hilbert. La norme sur $L_{2\pi}^2$ provient bien entendu du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt. \quad \square$$

Remarque 0.29. On définit plus généralement, pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L_{2\pi}^p$ des fonctions mesurables 2π -périodiques de puissance p -ième intégrable sur une période, que l'on munit de la norme

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

De même on introduit l'espace $L_{2\pi}^\infty$ des fonctions mesurables 2π -périodiques qui sont essentiellement bornées, muni de la norme "sup essentiel". Tous ces espaces sont de Banach. On a, pour $1 \leq p \leq q \leq \infty$ les inclusions

$$C_{2\pi}^0 \subset L_{2\pi}^\infty \subset L_{2\pi}^q \subset L_{2\pi}^p \subset L_{2\pi}^1 \quad (2)$$

avec l'inégalité $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ pour toute $f \in L_{2\pi}^q$ (la mesure $\frac{dt}{2\pi}$ est normalisée pour avoir une masse totale 1). De plus $C_{2\pi}^0 \subset L_{2\pi}^p$ est dense pour tout $1 \leq p < \infty$ (c'est une conséquence de la régularité de la mesure le Lebesgue).

E Théorie hilbertienne des séries de Fourier

Définition 0.30. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $e_n : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{int} \in \mathbb{C}$ le n -ième monôme trigonométrique. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n = \text{vect}(e_{-n}, \dots, e_0, \dots, e_n)$ l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré au plus n . On désigne par \mathcal{P} l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques. On a donc $\mathcal{P} = \text{vect}(e_n \mid n \in \mathbb{Z}) = \cup_{n \in \mathbb{N}} \nearrow \mathcal{P}_n$.

Proposition 0.31. La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L_{2\pi}^2$.

Rappelons au préalable l'énoncé du théorème de Stone-Weierstrass.

Théorème 0.32. Le théorème de Stone-Weierstrass

Soit X un espace métrique compact. Soit $\mathcal{A} \subset C^0(X, \mathbb{C})$ une sous-algèbre unitaire, stable par conjugaison, et qui sépare les points. Alors $\mathcal{A} \subset (C^0(X, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ est dense.

Preuve de la proposition 0.31 Notre normalisation de la mesure assure que la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée. On a en effet, pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$:

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} e^{-imt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt$$

donc $\langle e_n, e_m \rangle = 0$ si $n \neq m$ et $\langle e_n, e_n \rangle = 1$.

Il reste à voir que la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est totale dans $L^2_{2\pi}$ ou, en d'autres termes que le sous-espace vectoriel $\mathcal{P} \subset L^2_{2\pi}$ est dense. La régularité de la mesure de Lebesgue assure que le sous-espace vectoriel $C^0_{2\pi} \subset L^2_{2\pi}$ est dense, pour la norme hilbertienne $\|\cdot\|_2$.

Par ailleurs, le théorème de Stone-Weierstrass s'applique pour montrer que l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques $\mathcal{P} \subset C^0_{2\pi}$ est dense pour la norme uniforme, et donc pour la norme $\|\cdot\|_2$ puisqu'on a l'inégalité $\|\varphi\|_2 \leq \|\varphi\|_\infty$ pour toute fonction $\varphi \in C^0_{2\pi}$.

Reprenons ce qui vient d'être dit. Soit $f \in L^2_{2\pi}$ et $\varepsilon > 0$. On choisit d'abord $g \in C^0_{2\pi}$ telle que $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon$. On choisit ensuite $h \in \mathcal{P}$ tel que $\|h - g\|_\infty \leq \varepsilon$. Il suit que $\|h - g\|_2 \leq \varepsilon$, et donc que $\|h - f\|_2 \leq 2\varepsilon$, ce qui achève la preuve. \square

Dans l'exercice suivant, nous utilisons un procédé de convolution, plutôt que le théorème de Stone-Weierstrass, pour montrer la densité $\mathcal{P} \subset L^2_{2\pi}$.

Exercice 0.33. 1. Montrer qu'il existe une suite de réels positifs $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour lesquels la suite de fonctions définie par $h_n(t) = c_n (1 + \cos t)^n$ est une approximation de l'unité dans $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$.

2. Soit $f \in L^2_{2\pi}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'expression, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$(f * e_n)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e_n(x - t) dt$$

définit une fonction $f * e_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui est un polynôme trigonométrique.

3. Retrouver la densité de $\mathcal{P} \subset L^2_{2\pi}$.

La théorie hilbertienne des séries de Fourier va se déduire immédiatement du théorème 0.19, appliqué à la base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de $L^2_{2\pi}$ constituée des monômes trigonométriques.

Définition 0.34. Soient $f \in L^2_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Le n -ième coefficient de Fourier de f est défini comme le produit scalaire

$$c_n(f) = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt. \quad (3)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, la n -ième somme partielle de Fourier de f est

$$S_n f = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k \in \mathcal{P}_n.$$

Interprétons géométriquement l'opérateur $f \in L^2_{2\pi} \mapsto S_n f \in \mathcal{P}_n$.

Lemme 0.35. Pour $f \in L^2_{2\pi}$, la n -ième somme partielle de Fourier de f est la projection orthogonale de f sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{P}_n = \text{vect}(e_k, |k| \leq n)$, soit

$$S_n f = p_{\mathcal{P}_n}(f).$$

Preuve Conséquence immédiate de l'exemple 0.17, puisque la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée. \square

Théorème 0.36. Théorie L^2 des séries de Fourier

Soit $f \in L^2_{2\pi}$. La série de Fourier de f , soit

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$$

converge vers f en moyenne quadratique, c'est-à-dire pour la norme $\| \cdot \|_2$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n(f)\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \sum_{-n}^n c_k(f) e_k\|_2 = 0,$$

et on a l'identité de Parseval

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Preuve Application immédiate du théorème 0.22. \square

Remarque 0.37. Rappelons que la convergence dans L^2 n'implique pas la convergence ponctuelle, ni même p.p. La seule chose qu'on puisse dire est qu'il existe une suite extraite de $(S_n f)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge presque partout.

F Séries de Fourier dans $L^1_{2\pi}$ ou $C^0_{2\pi}$

F.1 Série de Fourier d'une fonction continue

Lorsque $f \in C^0_{2\pi}$ est une fonction continue 2π -périodique, elle appartient *a fortiori* à $L^2_{2\pi}$ donc le théorème 0.36 assure que f est somme au sens L^2 de sa série de Fourier, c'est-à-dire que $\|S_n f - f\|_2 \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$. Il est bien naturel de se poser la question de la convergence simple, ou uniforme, des sommes partielles de Fourier $S_n f = \sum_{|k| \leq n} c_k(f) e_k$ vers f .

Malheureusement, on n'a en général même pas convergence simple. Pire, les sommes partielles $S_n f$ peuvent être non bornées en un point !

En effet, un exemple explicite d'une fonction continue $f \in C^0_{2\pi}$ pour laquelle $\sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n f(0)| = \infty$ a été donné par du Bois-Reymond en 1876.

Pour notre part nous utiliserons le théorème de Banach-Steinhaus 1.7 pour prouver, cette fois-ci de façon abstraite, c'est-à-dire sans la construire explicitement, l'existence d'une telle fonction. Voir l'exercice 1.10.

F.2 Série de Fourier d'une fonction intégrable

Soit $f \in L^1_{2\pi}$. La définition (3) des coefficients de Fourier de f , soit

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

pour $n \in \mathbb{Z}$, fait encore sens (chaque fonction e_n étant bornée, le produit $f e_{-n}$ est intégrable) même si elle ne s'interprète plus dans ce cadre plus général comme un produit scalaire. On peut donc de nouveau définir les sommes partielles de Fourier de f , soient $S_n f = \sum_{|k| \leq n} c_k(f) e_k$, et se poser la question de leur convergence vers f , cette fois-ci au sens de la norme $\| \cdot \|_1$.

Malheureusement (?) les choses peuvent mal se passer de nouveau. Nous verrons en effet à l'exercice 1.10 qu'il existe des fonctions $f \in L^1_{2\pi}$ pour lesquelles $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n f\|_1 = \infty$.

G Coefficients et séries de Fourier dans $L^1_{2\pi}$

Pour obtenir les exemples cités dans le paragraphe précédent, où la série de Fourier d'une fonction continue ou bien simplement intégrable se refuse à converger correctement (c'est-à-dire en tout point, resp. en norme L^1) vers ladite fonction, nous devons au préalable étudier l'application "coefficients de Fourier".

Lemme 0.38. de Riemann-Lebesgue

Soit $f \in L^1_{2\pi}$. On a $|c_n(f)| \rightarrow 0$ lorsque $|n| \rightarrow \infty$.

L'application $\kappa : f \in L^1_{2\pi} \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$ est linéaire et continue de norme 1.

On a désigné par $c_0(\mathbb{Z})$ l'espace des suites indexées par \mathbb{Z} qui tendent vers 0 à l'infini, que l'on munit de la norme sup. C'est une partie fermée de l'espace $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ des suites bornées.

Preuve L'application $\kappa : L^1_{2\pi} \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z})$, bien définie, est linéaire. Elle est continue de norme au plus 1 puisqu'on a, pour toute $f \in L^1_{2\pi}$, l'inégalité

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) e^{-int}| dt = \|f\|_1.$$

Sa norme est 1 puisque $\|e_n\|_1 = 1$ avec $|\kappa(e_n)|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Montrons maintenant que κ prend bien ses valeurs dans le sous-espace vectoriel $c_0(\mathbb{Z}) \subset \ell^\infty(\mathbb{Z})$. C'est vrai pour les polynômes trigonométriques puisque $c_n(e_k) = 1$ lorsque $n = k$ et $c_n(e_k) = 0$ sinon. Par densité de \mathcal{P} dans $L^1_{2\pi}$ (raisonner comme dans la proposition 0.31), et continuité de $\kappa : L^1_{2\pi} \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z})$, on obtient que $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$ pour toute $f \in L^1_{2\pi}$ puisque $c_0(\mathbb{Z}) \subset \ell^\infty(\mathbb{Z})$ est fermé. \square

Remarque 0.39. Vous avez vu un résultat analogue, et de même nom, en intégrale de Fourier. Les analogies ne s'arrêtent pas là, voir notamment ci-dessous l'injectivité de Fourier.

Ce n'est pas surprenant. En effet, que l'on étudie les séries de Fourier ou bien la transformée de Fourier, il s'agit dans les deux cas d'"analyse harmonique" sur un groupe. Le groupe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ dans le premier cas, le groupe \mathbb{R} dans le second.

Le résultat suivant est fondamental.

Proposition 0.40. Injectivité de Fourier.

L'application linéaire $\kappa : f \in L^1_{2\pi} \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{Z})$ est injective.

Par contre, l'application $\kappa : L^1_{2\pi} \rightarrow c_0(\mathbb{Z})$ n'est pas surjective (exercice 1.13).

Remarque 0.41. L'application $\kappa_2 : f \in L^2_{2\pi} \mapsto (c_n(f)) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ étant une bijection isométrique, nous la savions injective.

L'injectivité de Fourier sera démontrée un peu plus loin. Commençons par en établir un corollaire.

Corollaire 0.42. Soit $f \in L^1_{2\pi}$.

- *Si il existe une fonction $g \in L^1_{2\pi}$ telle que $S_n f \rightarrow g$ dans $L^1_{2\pi}$, alors $f = g$ p.p. (ou dans $L^1_{2\pi}$).*
- *Si il existe une fonction $g \in C^0_{2\pi}$ telle que $S_n f \rightarrow g$ uniformément, alors $f = g$ dans $L^1_{2\pi}$ et f admet donc un représentant continu.*

C'est le cas lorsque la condition $\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n(f)| < \infty$ est satisfaite, en particulier lorsque f est de classe C^1 , ou même continue et de classe C^1 par morceaux.

Preuve • Supposons que $S_n f \rightarrow g$ dans $L^1_{2\pi}$. L'application κ étant continue, on a convergence des coefficients de Fourier $c_k(S_n f) \rightarrow c_k(g)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Puisque $c_k(S_n f) = c_k(f)$ lorsque $n \geq |k|$ (et vaut 0 sinon), il suit que $c_k(f) = c_k(g)$ pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$. L'injectivité de Fourier assure alors que $f = g$.

• Les sommes partielles de Fourier $S_n f$ sont continues. Si elles convergent uniformément, leur limite g est également continue. De plus, $S_n f \rightarrow g$ convergeant *a fortiori* dans $L^1_{2\pi}$, le point précédent assure que $f = g$ p.p..

Supposons la fonction f de classe C^1 . Une intégration par parties, qui ne fait pas intervenir de "termes de bord" puisque les fonctions que l'on intègre sont périodiques, donne pour tout entier $n \in \mathbb{Z}^*$ l'égalité

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{in} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-int} dt$$

et donc

$$|c_n(f)| = \frac{1}{|n|} |c_n(f')|.$$

La fonction dérivée f' est continue, donc elle est *a fortiori* dans $L^2_{2\pi}$. L'inégalité de Hölder donne alors

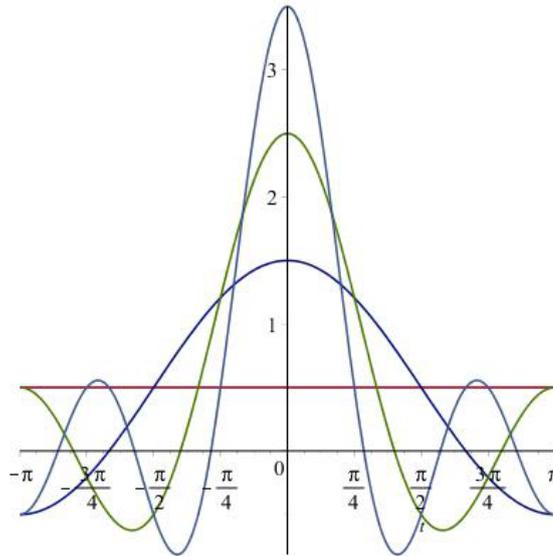
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |c_n(f)| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{|n|} |c_n(f')| \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 \right)^{1/2} < \infty$$

puisque d'après Parseval on a $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 = \|f'\|_2^2$. La démonstration, dans le cas d'une fonction continue et C^1 par morceaux, est semblable et nous laissons au lecteur le soin de vérifier les détails. \square

Pour démontrer l'injectivité de Fourier, nous allons introduire le noyau de Féjer. Nous commencerons par définir le noyau de Dirichlet. L'introduction de ces noyaux, c'est-à-dire l'expression des sommes partielles de Fourier ainsi que des sommes de Fejer en termes de convolées, peut sembler anodine au premier abord. Il n'en n'est rien. Au-delà de la notation condensée qu'elle nous offre, elle nous permet de changer de point de vue et de penser en termes d'opérateurs de convolution et d'approximation de l'unité, ce qui sera crucial pour démontrer les propriétés du corollaire 0.47, ou des exercices 1.10 et 1.13.

Définition 0.43. Le noyau de Dirichlet d'ordre $n \in \mathbb{N}$ est le polynôme trigonométrique $D_n \in \mathcal{P}_n$ défini par $D_n = \sum_{|k| \leq n} e_k$. Il vérifie, pour tout $t \in \mathbb{R}$ (avec $t \not\equiv 0 [2\pi]$) l'égalité

$$D_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}.$$



Les noyaux de Dirichlet D_n pour $0 \leq n \leq 3$.

Lemme 0.44. On a, pour toute $f \in L^1_{2\pi}$ et tout entier $n \geq 0$, l'égalité $S_n f = D_n * f$.

La convolée est bien sûr définie en utilisant la mesure renormalisée $dt/2\pi$.

Preuve Par définition de la convolée, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (D_n * f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t) dt = \sum_{|k| \leq n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e_k(x-t) dt \\ &= \sum_{|k| \leq n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} e^{ikx} dt = \sum_{|k| \leq n} c_k(f) e_k(x) \\ &= S_n f(x). \end{aligned} \quad \square$$

On a signalé qu'il pouvait arriver que la série de Fourier d'une fonction intégrable f ne converge pas vers cette fonction. Que faire lorsqu'une série ne converge pas ? On essaye d'y remédier en la régularisant par des moyennes de Césaro. C'est ce que nous allons faire, en introduisant les sommes de Féjer de f .

Définition 0.45. Soit $f \in L^1_{2\pi}$. Pour $n \geq 1$, la n -ième somme de Féjer de f est la moyenne de ses n premières sommes de Fourier, soit

$$\sigma_n f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k f.$$

On a $\sigma_n f = K_n * f$, où le noyau de Féjer est $K_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k$. De plus on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \not\equiv 0 [2\pi]$, l'égalité

$$K_n(x) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \right)^2.$$

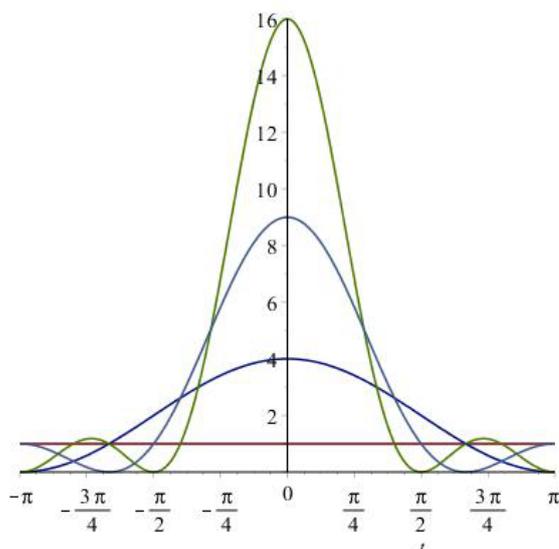
La dernière expression de K_n (que nous laissons au lecteur le soin de vérifier), assure que K_n prend des valeurs positives. On a bien mieux.

Lemme 0.46. La suite (K_n) constitue une approximation de l'unité.

Preuve On vient de voir que K_n prend des valeurs positives. Il est d'intégrale 1 comme chacun des D_k . Il reste à voir que la masse de K_n (son intégrale) se concentre près de l'origine. Il sera plus simple d'intégrer de $-\pi$ à π , plutôt que sur $[0, 2\pi]$. Soit $0 < \delta < \pi$. On a

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{\pi} K_n(t) dt &= \frac{1}{n} \int_{\delta}^{\pi} \left(\frac{\sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \right)^2 dt \leq \frac{1}{n} \int_{\delta}^{\pi} \left(\frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} \right)^2 dt \\ &\leq \frac{1}{n} \int_{\delta}^{\pi} (\sin(\delta/2))^{-2} dt \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

La parité de K_n permet de conclure. □



Les noyaux de Féjer K_n pour $1 \leq n \leq 4$.

Corollaire 0.47. Si $f \in C_{2\pi}^0$, la suite $(\sigma_n f)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f . Si $f \in L_{2\pi}^1$, la suite $(\sigma_n f)$ converge vers f au sens de la norme $\|\cdot\|_1$.

On observe que la famille des noyaux de Féjer (K_n) permet, comme dans l'exercice 0.33 mais avec une approximation de l'unité plus naturelle, de retrouver les théorèmes de densité vus à la proposition 0.31, sans passer par le théorème abstrait de Stone-Weierstrass.

Corollaire 0.48. L'espace \mathcal{P} des polynômes trigonométriques est dense dans $C_{2\pi}^0$ pour la norme uniforme. Il est également dense dans chaque espace $L_{2\pi}^p$, lorsque $1 \leq p < \infty$, pour la norme $\|\cdot\|_p$.

Preuve Soit, par exemple, une fonction $f \in L_{2\pi}^1$. Alors la suite $(\sigma_n f)$ est une suite de polynômes trigonométriques, et on a $\|\sigma_n f - f\|_1 \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. \square

Pour conclure cette trop succincte introduction aux séries de Fourier, il nous reste à montrer l'injectivité de Fourier.

Preuve du théorème 0.40

Supposons que tous les coefficients de Fourier de $f \in L_{2\pi}^1$ soient nuls. Alors $\sigma_n f = 0$ pour tout $n \geq 1$ tandis que $\|\sigma_n f - f\|_1 \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. \square

1. Le théorème de Baire

 A motivation initiale de Baire, au tout début du XXème siècle, était l'étude des points de continuité des fonctions. Mais le champ des applications de ce théorème s'est depuis considérablement élargi.

En dépit de l'extrême simplicité de sa preuve, le théorème de Baire a désormais – notamment à travers ses comparses, les théorèmes de Banach-Steinhaus et de l'application ouverte – d'innombrables applications dans des domaines très variés, qui en font un théorème incontournable de l'Analyse Fonctionnelle.

Nous commençons donc ce cours avec lui, même si il n'interviendra que marginalement par la suite.

A Le lemme de Baire

Théorème 1.1. de Baire *Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ouverts denses de X .*

Alors l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ est encore une partie dense de X .

Avant de passer à la démonstration, quelques remarques. On commence par noter que l'énoncé suivant est équivalent au lemme de Baire, au sens où chacun se déduit de l'autre sans effort.

Corollaire 1.2. Enoncé "dual" du théorème de Baire

Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de fermés d'intérieurs vides de X .

Alors, la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est encore d'intérieur vide dans X .

Preuve On remarque qu'une partie $A \subset X$ est dense dans X si et seulement si son complémentaire est d'intérieur vide dans X . En effet, on a l'égalité $\overline{A} = X$ si le plus petit fermé contenant A est X , c'est-à-dire si et seulement si le plus grand ouvert contenu dans ${}^c A$ est vide.

On note ensuite que le complémentaire d'une intersection est égal à la réunion des complémentaires, soit ${}^c(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} {}^c A_i$.

L'équivalence des énoncés du théorème 1.1 et du corollaire 1.2 suit. \square

Examinons quelques exemples pour nous convaincre que chacune des hypothèses, dans l'un ou l'autre de ces énoncés, est bien indispensable... histoire de ne pas en oublier lorsqu'on voudra les utiliser.

- Remarque 1.3.**
1. X doit être complet, puisque $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$ s'écrit comme réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides, mais $X = \mathbb{Q}$ n'est pas d'intérieur vide *dans lui-même*.
 2. Il doit s'agir d'ouverts (pour le premier énoncé, ou de fermés pour le second). En effet \mathbb{R} , qui est bien complet, s'écrit comme l'union $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ de deux parties d'intérieurs vides, mais ces parties ne sont pas fermées.
 3. Enfin, il doit s'agir d'unions (ou d'intersections) dénombrables... par exemple $\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$ s'écrit comme réunion quelconque de fermés d'intérieurs vides !

Preuve du théorème de Baire

On veut montrer que notre intersection dénombrable $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ d'ouverts denses est encore dense, c'est-à-dire qu'elle rencontre tout ouvert non vide $V \subset X$. Pour cela, nous allons construire, par approximations successives, un point dans $V \cap (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n)$.

On commence par montrer, par récurrence sur p , que l'ouvert V rencontre chacune des intersections finies $(U_0 \cap \dots \cap U_p)$.

Amorçons la récurrence. Puisque l'ouvert U_0 est dense, il rencontre V selon un ouvert non vide. Il existe donc une boule $B_f(a_0, r_0) \subset V \cap U_0$ (nous prenons soin de considérer une boule fermée pour la suite des événements). On peut bien sûr choisir r_0 tel que $0 < r_0 \leq 1$.

Démontrons l'hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}$, et supposons que l'on a construit une boule fermée $B_f(a_p, r_p) \subset V \cap (U_0 \cap \dots \cap U_p)$ avec $0 < r_p \leq 2^{-p}$. L'ouvert U_{p+1} étant dense, son intersection avec la boule ouverte $B(a_p, r_p)$ est un ouvert non vide et l'on construit de nouveau une boule fermée

$$B_f(a_{p+1}, r_{p+1}) \subset B(a_p, r_p) \cap U_{p+1} \subset V \cap (U_0 \cap \dots \cap U_{p+1}),$$

où l'on peut maintenant choisir r_{p+1} tel que $0 < r_{p+1} \leq 2^{-p-1}$.

Il reste à conclure. Puisque la série $\sum 2^{-p}$ est convergente, la suite $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy (utiliser l'inégalité triangulaire). L'espace X étant supposé complet, cette suite converge donc vers un point $\alpha \in X$.

Pour localiser plus précisément α on remarque que, lorsque $p \geq n$, on a $a_p \in B_f(a_n, r_n) \subset V \cap (U_0 \cap \dots \cap U_n)$, et donc (c'est là que l'intérêt d'avoir pris une boule fermée apparaît) notre limite α vérifie également $\alpha \in B_f(a_n, r_n) \subset V \cap (U_0 \cap \dots \cap U_n)$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a finalement $\alpha \in V \cap (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n)$, ce qui achève la démonstration. \square

Voici, en exercice, une illustration immédiate du théorème de Baire.

Exercice 1.4. Soit E un espace vectoriel normé.

1. Soit $F \subsetneq E$ un sous-espace vectoriel strict de E . Montrer que F est d'intérieur vide.
2. On suppose que E est un espace de Banach. Montrer que si E n'est pas de dimension finie, sa dimension n'est pas dénombrable.
On pourra procéder par l'absurde, introduire une base algébrique $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E , ainsi que les sous-espaces vectoriels $E_n = \text{vect}(e_0, \dots, e_n)$.
3. Existe-t-il une norme sur l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes qui en fasse un espace de Banach ?

Remarque 1.5. Attention à ne pas confondre les notions de base algébrique, celle qui intervient dans l'exercice 1.4, et de base hilbertienne...

Certains espaces de Hilbert de dimension infinie (ceux que vous fréquentez habituellement, par exemple $\ell^2(\mathbb{N})$, $L^2_{2\pi}$ ou bien encore $L^2(\mathbb{R})$) admettent des *bases hilbertiennes* qui sont dénombrables. Cela ne les empêche pas d'être complets !

Par exemple, la famille des $(e_n(t) = e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée et totale dans $L^2_{2\pi}$. C'est donc une base hilbertienne pour cet espace de Hilbert. Mais ce n'est pas une base algébrique, car l'espace vectoriel qu'elle engendre est le sous-espace $\mathcal{P} \subsetneq L^2_{2\pi}$ formé des polynômes trigonométriques.

Applications linéaires continues

Les illustrations du théorème de Baire que nous avons choisi de proposer dans les paragraphes suivants **B**, **C** et **D** concernent les applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés (ou evn).

Rappelons les propriétés élémentaires, mais fondamentales, suivantes pour lesquelles on renvoie, si besoin, au cours de Topologie.

Lemme 1.6. Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

• Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue
2. f est continue en l'origine
3. f est bornée sur la boule unité.

• L'application linéaire $f : E \rightarrow F$ est continue si et seulement si elle est lipschitzienne. Dans ce cas, sa meilleure constante de Lipschitz est sa norme $\|f\|$, définie par

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|f(x)\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \|f(x)\|.$$

B Le théorème de Banach-Steinhaus

Théorème 1.7. de Banach-Steinhaus

Soient E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé et une famille $f_i : E \rightarrow F$ ($i \in I$) d'applications linéaires continues. Alors,

1. soit il existe $x \in E$ tel que $\sup_{i \in I} \|f_i(x)\| = \infty$;
2. soit $\sup_{i \in I} \|f_i\| < \infty$.

Ces deux cas sont exclusifs. En effet, dans le cas (2), les applications linéaires f_i sont toutes M -lipschitziennes, avec $M := \sup_{i \in I} \|f_i\| < \infty$, et on a pour tout $i \in I$ et tout $x \in E$ la majoration $\|f_i(x)\| \leq \|f_i\| \|x\| \leq M \|x\|$.

Avant de démontrer ce résultat, énonçons un corollaire frappant. Vous savez que, en général, la continuité n'est pas préservé par convergence simple. Et pourtant...

Corollaire 1.8. Soient E un Banach, F un evn et $f_n : E \rightarrow F$ une suite d'applications linéaires continues. Si cette suite (f_n) converge simplement vers $f : E \rightarrow F$, alors la limite est linéaire et continue.

Preuve La linéarité est préservée par convergence simple, c'est banal. Ce qui l'est moins, c'est que le théorème de Banach-Steinhaus assure que, sous ces hypothèses, toutes les f_n sont M -lipschitziennes pour une même constante M , donc f également par passage à la limite. \square

Preuve de Banach-Steinhaus On suppose qu'on n'est pas dans le cas (1). On introduit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$A_n = \{x \in E \mid \sup_{i \in I} \|f_i(x)\| \leq n\},$$

de sorte que $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Chaque A_n est un fermé de E , puisque toutes les f_i sont continues. Puisque nous avons supposé que $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, et comme E n'est pas d'intérieur vide dans lui-même... le théorème de Baire assure qu'un au moins des A_n n'est pas d'intérieur vide. On a donc une boule ouverte $B(x, r) \subset A_n$ sur laquelle toutes les f_i prennent des valeurs en norme majorée par n . N'oublions pas que les f_i sont linéaires : en écrivant $B(0, r) = B(x, r) - x$ on obtient donc $f_i(-x) = -f_i(x)$, puis $\|f_i(y)\| \leq 2n$ pour tout $y \in B(0, r)$. Les applications linéaires f_i sont de norme au plus $2n/r$: on est donc dans le cas (2). \square

Remarque 1.9. On suppose, sous les hypothèses du théorème 1.7, qu'on est dans le cas (1). Alors le sous-espace vectoriel

$$A_\infty = \{x \in E, \sup_{i \in I} \|f_i(x)\| < \infty\} \subsetneq E$$

est un sous-espace vectoriel strict. Il est donc d'intérieur vide. Il suit que son complémentaire $\{x \in E, \sup_{i \in I} \|f_i(x)\| = \infty\}$ est dense.

Dans l'exercice suivant, on illustre le théorème de Banach-Steinhaus par un résultat concernant les séries de Fourier, déjà évoqué au paragraphe 0.F.1.

Exercice 1.10. Non convergence des séries de Fourier

1. Rappeler la définition du noyau de Dirichlet D_n , et montrer que $\|D_n\|_1 \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
2. (a) Déterminer la norme de l'application linéaire $g \in C_{2\pi}^0 \mapsto S_n g(0) \in \mathbb{C}$.
 (b) En déduire qu'il existe des fonctions $g \in C_{2\pi}^0$ pour lesquelles la suite $(S_n(g)(0))$ n'est pas bornée, et ne converge donc certainement pas vers la valeur $g(0)$ de g en 0.
3. Montrer de même qu'il existe des fonctions $g \in L_{2\pi}^1$ pour lesquelles la suite $(S_n(g))$ n'est pas bornée dans $L_{2\pi}^1$, et ne converge donc a fortiori pas vers g dans $L_{2\pi}^1$.

Exercice 1.11. Complétude et Banach-Steinhaus

1. On munit l'espace $C^0([0, 1])$ de la norme définie par $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$. Cet espace est-il complet ?
2. Montrer que chaque forme linéaire $\lambda_n : f \mapsto n \int_0^{1/n} f(t) dt$ est continue sur $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_1)$.
3. Montrer que la suite de formes linéaires continues (λ_n) converge simplement, et déterminer sa limite λ .
4. La forme linéaire λ est-elle continue sur $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_1)$? Commenter à la lumière du théorème de Banach-Steinhaus.

C Le théorème de l'isomorphisme de Banach

Rappelons qu'une application continue bijective entre deux espaces métriques n'est pas toujours un homéomorphisme (exemple ?). Et pourtant...

Théorème 1.12. de l'isomorphisme de Banach

Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire continue et bijective.

Alors, f est bicontinue (c'est donc un isomorphisme d'evn).

On propose tout de suite une illustration du théorème de l'isomorphisme de Banach, de nouveau dans le thème des séries de Fourier.

Exercice 1.13. On considère l'application "coefficients de Fourier" définie par $\kappa : f \in L_{2\pi}^1 \mapsto (c_n(f)) \in c_0(\mathbb{Z})$. On rappelle que le noyau de Dirichlet D_n vérifie $\|D_n\|_1 \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$ (exercice 1.10).

1. Montrer que $\kappa : (L_{2\pi}^1, \|\cdot\|_1) \rightarrow (c_0(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_\infty)$ est une application linéaire continue.
2. Montrer que $\|\kappa(D_n)\|_\infty = 1$ pour tout $n \geq 0$.
3. L'application κ est-elle surjective ?

Exercice 1.14. Complétude et isomorphisme de Banach

On munit l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ des suites de carré sommable des normes définies par $\|u\|_2 = (\sum |u_n|^2)^{1/2}$ et $\|u\|_\infty = \sup |u_n|$.

1. Montrer que $(\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$ est complet. Est-ce que l'espace $(\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet ?
2. Montrer que l'application $\text{Id} : (\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2) \rightarrow (\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ est linéaire continue bijective. Cette application est-elle bicontinue ?

Exercice 1.15. 1. Soient X et Y deux espaces métriques homéomorphes. Si X est complet, l'espace Y est-il toujours complet ?

2. Soit $f : E \rightarrow F$ un isomorphisme (c'est-à-dire une application linéaire bijective et bicontinue) entre deux espaces vectoriels normés. Si E est un espace de Banach, F est-il également complet ?

Le théorème de l'isomorphisme de Banach découlera du théorème plus général, dit de l'application ouverte, qui est l'objet du paragraphe suivant.

D Le théorème de l'application ouverte

Définition 1.16. Une application $f : X \rightarrow Y$ entre deux espaces métriques est ouverte lorsque l'image par f de tout ouvert de X est un ouvert de Y .

Exemple 1.17. Un projecteur $p : (x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \mapsto x \in \mathbb{R}^k$ est une application (linéaire) ouverte.

Par contre, une injection linéaire $i : x \in \mathbb{R}^k \mapsto (x, 0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ n'est pas ouverte (sauf si $n = k$...)

Propriété 1.18. Soit $f : X \rightarrow Y$ une bijection entre deux espaces métriques.

1. f est ouverte si et seulement si sa réciproque f^{-1} est continue.
2. f est un homéomorphisme si et seulement si f est continue et ouverte.

Exercice 1.19. L'application $t \in [0, 1[\mapsto e^{2i\pi t} \in \mathbb{S}^1$ est continue et bijective, mais elle n'est pas ouverte.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce paragraphe, qui concerne de nouveau les applications linéaires.

Théorème 1.20. de l'application ouverte Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire continue.

Si f est surjective, alors c'est une application ouverte.

Le théorème d'isomorphisme de Banach se déduit très facilement du théorème de l'application ouverte.

Preuve du théorème 1.12 Puisque f est linéaire continue et bijective, le théorème 1.20 assure qu'elle est ouverte. C'est donc que f est bicontinue. \square

Avant d'aborder la preuve du théorème de l'application ouverte, revenons sur la notion d'application ouverte dans le cas spécifique qui nous intéresse, à savoir celui des applications linéaires. Dans ce cas linéaire, l'application est ouverte si et seulement si elle est ouverte en l'origine.

Lemme 1.21. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et $f : E \rightarrow F$ linéaire. Alors f est ouverte si et seulement si il existe un rayon $r > 0$ tel que $B_F(0, r) \subset f(B_E(0, 1))$.*

Preuve Le sens direct est immédiat. Montrons la réciproque. Soit donc $U \subset E$ un ouvert non vide. On veut voir que son image est ouverte. Soit donc $x \in U$. Il existe un rayon $\rho > 0$ tel que $B(x, \rho) \subset U$. Par linéarité de f , on a

$$f(B(x, \rho)) = f(x + \rho B(0, 1)) = f(x) + \rho f(B(0, 1)) \supset B(f(x), \rho r).$$

Ainsi $f(U)$ est voisinage de tous ses points, c'est donc un ouvert. \square

Remarque 1.22. A la lumière de ce lemme, revenons sur la signification du théorème de l'application ouverte.

Supposons que f soit surjective. Cela signifie que, pour tout $y \in F$, il existe (au moins) un $x \in E$ (que l'on ne contrôle a priori pas) avec $y = f(x)$.

On en déduit, avec le théorème 1.20, que l'application f est ouverte. Il existe donc un rayon $r > 0$ tel que, pour tout $y \in F$, il existe un $x \in E$ de norme $\|x\| \leq \|y\|/r$ tel que $f(x) = y$: autrement dit, on a quantifié uniformément l'hypothèse de surjectivité.

Bien sûr, si f n'est pas bijective l'ensemble $f^{-1}(y) = \{x + \ker f\}$ des préimages de y est un sous-espace affine non trivial de E , et est non borné.

Avant d'aborder la preuve, rappelons le résultat élémentaire suivant.

Exercice 1.23. 1. Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé. Montrer que $\overline{A + B} \subset \overline{A} + \overline{B}$.
2. Montrer que $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z} \subsetneq \overline{\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}}$ (il n'y a donc pas égalité dans (1) en général).

Preuve du théorème de l'application ouverte

• *Etape 1 : on montre qu'il existe $r > 0$ avec $B_F(0, r) \subset \overline{f(B_E(0, 1))}$.*

Puisque f est surjective on écrit

$$F = f(E) = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} f(B(0, n)) = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{f(B(0, n))}.$$

L'intérêt de faire intervenir les adhérences des images $f(B(0, n))$ est que, F étant supposé complet, on peut alors utiliser le lemme de Baire : l'un de ces fermés est d'intérieur non vide et il existe donc $y \in F$, $\rho > 0$ et un entier n tels que $B(y, \rho) \subset \overline{f(B(0, n))}$. Par linéarité de f , on a $-y \in \overline{f(B(0, n))}$ d'où

$$B(0, \rho) \subset \overline{f(B(0, n))} + \overline{f(B(0, n))} \subset \overline{f(B(0, 2n))}.$$

Le résultat annoncé suit par homogénéité de f , avec $r = \rho/2n$.

- *Etape 2 : on montre que $B_F(0, r) \subset f(B_E(0, 2))$.*

On a donc $B_F(0, r) \subset \overline{f(B_E(0, 1))}$. On veut se débarasser de l'adhérence, quitte à prendre l'image d'une boule plus grosse. Pour cela, on va procéder par approximations successives.

Soit donc $z \in F$ avec $\|z\| < r$. La première étape assure qu'il existe $x_1 \in E$ avec $\|x_1\| < 1$ et $\|z - f(x_1)\| < r/2$.

On construit alors par récurrence une suite $(x_n) \in E$ avec $\|x_n\| < 2^{-n+1}$ et telle que $\|z - f(x_1) - \dots - f(x_n)\| < 2^{-n}r$.

La série $\sum x_k$ est normalement convergente dans le Banach E , elle converge donc vers $x \in E$. L'inégalité triangulaire assure que $\|x\| < 2$, tandis que la continuité de l'application f assure que $f(x) = z$. \square

E Le théorème du graphe fermé

Du théorème de l'isomorphisme de Banach, nous déduisons maintenant le théorème du graphe fermé. Ce théorème se révèle être un outil très commode pour montrer la continuité d'une application linéaire entre deux espaces de Banach.

Définition 1.24. *Le graphe d'une application $f : X \rightarrow Y$ est l'ensemble*

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}.$$

Lemme 1.25. *Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue entre deux espaces métriques. Alors son graphe \mathcal{G}_f est fermé dans le produit $X \times Y$.*

Preuve On se donne une suite $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ de points du graphe, donc avec $y_n = f(x_n)$. On suppose que cette suite converge vers $(x, y) \in X \times Y$. Ceci signifie que $x_n \rightarrow x$ et $y_n \rightarrow y$. Par continuité de f , il vient donc $y = \lim y_n = \lim f(x_n) = f(x)$. Autrement dit, la limite $(x, y) \in X \times Y$ appartient au graphe de f . \square

Exemple 1.26. Par contre, il existe des applications $f : X \rightarrow Y$ entre espaces métriques, dont le graphe est fermé, et qui ne sont pas continues. Considérer par exemple la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = 1/x \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Et pourtant...

Théorème 1.27. du graphe fermé

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces de Banach. Alors f est continue si et seulement si son graphe est fermé.

Avant de passer à la démonstration de ce théorème, expliquons ce qu'il nous apporte, en pratique, pour démontrer la continuité d'une application linéaire.

Remarque 1.28. Si on veut montrer qu'une application f est continue, on doit normalement considérer une suite (x_n) convergeant vers x . Il faut alors :

1. montrer que la suite $(f(x_n))$ converge
2. puis montrer que sa limite $\lim f(x_n)$ est bien $f(x)$.

Si on utilise le théorème du graphe fermé, on part d'une suite $((x_n, f(x_n)))$ de points du graphe, qui converge vers (x, y) dans le produit ; c'est-à-dire que l'on sait déjà que $x_n \rightarrow x$ ET que $f(x_n) \rightarrow y$. Et il n'y a plus qu'à montrer que $y = f(x)$, c'est-à-dire à identifier la limite de la suite $(f(x_n))$.

Preuve du théorème 1.27

Le sens direct est le lemme 1.25.

On passe à la réciproque, qui est la partie intéressante. On munit $E \times F$ de la norme définie par $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$, et qui induit la topologie produit. L'hypothèse est que le graphe $G_f \subset E \times F$ est fermé. Comme G_f est un sous-espace vectoriel de l'espace de Banach produit $E \times F$, cela fait que G_f lui-même est un espace de Banach. Considérons la restriction à G_f de la projection sur le premier facteur, soit

$$p : (x, f(x)) \in G_f \mapsto x \in E .$$

L'application $p : G_f \rightarrow E$ est une application linéaire continue et bijective entre deux espaces de Banach. Elle est donc bicontinue par le théorème 1.12. Autrement dit, il existe une constante $c > 0$ telle que $\|(x, f(x))\| \leq c \|x\|$ pour tout $x \in E$. A fortiori, on a $\|f(x)\| \leq c \|x\|$ pour tout $x \in E$, ce qu'on voulait. \square

2. Le théorème de Hahn-Banach

 EN sait, en dimension finie, que toute forme linéaire est continue. En dimension infinie ce n'est plus vrai. Et il n'est pas si facile de prouver l'existence de formes linéaires continues sur un espace vectoriel normé abstrait de dimension infinie... C'est la tâche à laquelle nous nous attelons dans ce chapitre.

A Formes linéaires continues

On notera $E' = \mathcal{L}_c(E)$ le “dual continu” de l'espace vectoriel normé E , c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E .

Par la suite, on dira simplement “dual” en sous-entendant le fait que l'on ne considère, sur un espace vectoriel normé, que des formes linéaires continues.

Définition 2.1. *L'expression*

$$\|\ell\| = \sup_{\|x\|=1} |\ell(x)| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\ell(x)|$$

définit une norme sur E' qui en fait un espace de Banach.

Une forme linéaire ℓ est continue si et seulement si elle est lipschitzienne, et alors $\|\ell\|$ est la meilleure constante de Lipschitz de ℓ (lemme 1.6).

Remarque 2.2. Dire que $\|\ell_n - \ell\| \rightarrow 0$ signifie que la suite de formes linéaires continues $\ell_n \in E'$ converge vers $\ell \in E'$, uniformément sur les parties bornées (voir l'exercice 8.6).

Remarque 2.3. Tout ce qui précède est plus généralement valide pour des applications linéaires $\ell : E \rightarrow F$ entre deux espaces vectoriels normés, la complétude de $\mathcal{L}_c(E, F)$ nécessitant cependant que F soit lui-même complet.

Par contre, le théorème de Hahn-Banach ne concerne que les formes linéaires continues.

Avant d'aborder le théorème de Hahn-Banach, qui étudie le dual d'un espace vectoriel normé quelconque, revenons sur l'exemple élémentaire, mais fondateur, d'un espace de Hilbert.

Exercice 2.4. Soit H un espace de Hilbert réel. On note H' son dual, et on introduit son bidual $H'' := (H')' = \mathcal{L}_c(H', \mathbb{R})$ (qui est donc le dual du dual).

1. Rappeler l'énoncé et la démonstration du théorème de représentation de Riesz (description de H').
2. Montrer que le dual de H sépare les points (pour tout $x \neq y$ dans H il existe $\ell \in H'$ telle que $\ell(x) \neq \ell(y)$).
3. Critère de densité.
 - (a) Montrer qu'un sous-espace vectoriel $F \subset H$ est dense ssi son orthogonal $F^\perp = \{y \in H \mid \langle x, y \rangle = 0 \text{ pour tout } x \in F\}$ est réduit à 0.
 - (b) Montrer qu'un sous-espace vectoriel $F \subset H$ est dense ssi la seule forme linéaire continue $\ell \in H'$ telle que $\ell|_F = 0$ est la forme nulle.
4. Soit $x \in H$. On note $i_x : \ell \in H' \mapsto \ell(x) \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $\mathcal{I} : x \in H \mapsto i_x \in H''$ est une bijection isométrique.

B Le théorème de Hahn-Banach

Théorème 2.5. de Hahn-Banach Soient E un espace vectoriel normé réel, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel et $\ell : F \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Il existe une forme linéaire continue $\tilde{\ell} : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui prolonge ℓ . Mieux, on peut choisir $\tilde{\ell}$ de norme minimale, c'est-à-dire telle que $\|\tilde{\ell}\| = \|\ell\|$.

Dans le théorème de Hahn-Banach, il n'y a en général pas unicité du prolongement de norme minimale.

Le fait que la norme d'un prolongement soit au moins celle de la forme linéaire initiale est immédiat. Nous l'énonçons sous forme d'un exercice.

Exercice 2.6. Soient $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue sur l'evn E , et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors la norme de la restriction $\lambda|_F$ vérifie $\|\lambda|_F\| \leq \|\lambda\|$.

Nous reportons la preuve aux paragraphes suivants, pour énoncer d'emblée des conséquences du théorème de Hahn-Banach. On comparera les résultats qui suivent à ceux de l'exercice 2.4.

Le théorème de Hahn-Banach est un théorème de prolongement. Il suit de ce théorème que l'espace vectoriel normé E admet beaucoup de formes linéaires continues. En particulier, on a les corollaires suivants.

Corollaire 2.7. Le dual sépare les points

Pour $x \neq y$ dans un espace vectoriel normé E , il existe une forme linéaire continue $f \in E'$ avec $f(x) \neq f(y)$.

Preuve On introduit le vecteur $z = x - y \neq 0$. On considère la forme linéaire $\ell : \mathbb{R}z \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\ell(tz) = t$. Cette forme linéaire ℓ , définie sur une droite vectorielle, est bien sûr continue! Le théorème de Hahn-Banach nous apprend qu'elle se prolonge en une forme linéaire continue $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. On a, par construction, $f(z) = f(x) - f(y) = 1$. \square

Corollaire 2.8. Critère de densité de Hahn-Banach

Soient E un espace vectoriel normé et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors F est dense dans E si et seulement si toute forme linéaire continue $f \in E'$, nulle sur F , est identiquement nulle.

Remarque 2.9. Ce corollaire fournit un critère de densité très utile!

Pour pouvoir l'appliquer, il faudra cependant bien souvent disposer d'une description explicite du dual E' . C'est une motivation de plus pour décrire le dual d'un espace vectoriel normé. Rappelons les exemples suivants, à connaître :

- dual d'un espace de Hilbert (théorème de représentation de Riesz) ;
- dual des espaces ℓ^p ou L^p lorsque $1 \leq p < \infty$;
- dual de $C^0(X)$ pour X métrique compact (théorème de représentation de Riesz-Markov, que nous étudierons au chapitre 6).

Preuve Le sens direct est immédiat, par prolongement des identités.

Prouvons la réciproque. Nous supposons que F n'est pas dense dans E , et nous voulons construire une forme linéaire continue f sur E , non identiquement nulle, mais qui s'annule sur F et donc sur l'adhérence \overline{F} . Pour construire f , nous choisissons un vecteur $x \in E \setminus \overline{F}$ et considérons le sous-espace vectoriel $G = \overline{F} \oplus \mathbb{R}x$ de E , ainsi que la forme linéaire $\ell : G \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\ell|_{\overline{F}} = 0$ et $\ell(x) = 1$. Il faut dans un premier temps vérifier que ℓ est continue. Puisque x n'appartient pas au fermé \overline{F} , on a $d(x, \overline{F}) = \inf_{y \in \overline{F}} \|x - y\| > 0$. On a donc, pour $t \neq 0$ et $y \in \overline{F}$, l'inégalité

$$\|y + tx\| = |t| \|(y/t) + x\| \geq |t| d(x, \overline{F}).$$

Ainsi ℓ est bien une forme linéaire continue, de norme au plus $1/d(x, \overline{F})$. Le théorème de Hahn-Banach fournit $f \in E'$ qui prolonge ℓ . On a donc f nulle sur F , mais non identiquement nulle puisque $f(x) = 1$. \square

Dans le dernier corollaire, nous utiliserons l'information quantitative du théorème de Hahn-Banach (conservation de la norme dans le prolongement).

Définition 2.10. Le bidual

On note $E'' = \mathcal{L}_c(E', \mathbb{R})$ l'espace vectoriel normé des formes linéaires continues sur le Banach E' . Cet espace est le bidual de E .

Corollaire 2.11. Soit E un espace vectoriel normé réel.

On définit une application linéaire $\mathcal{I} : x \in E \mapsto i_x \in E''$ de E dans son bidual E'' en posant $i_x(f) = f(x)$ pour toute forme linéaire continue $f \in E'$.

L'application $\mathcal{I} : E \rightarrow E''$ est isométrique, c'est-à-dire que $\|i_x\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$.

Remarque 2.12. Le fait que \mathcal{I} soit linéaire et isométrique assure qu'elle est injective. Attention, elle n'est en général pas surjective. Lorsque c'est le cas, on dit que l'espace vectoriel normé E est réflexif.

Preuve Soit $x \in E$. L'expression $i_x : f \in E' \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ définit bien une forme linéaire sur E' . De plus la forme linéaire i_x est continue, puisque

$$|i_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \|x\| = \|x\| \|f\|$$

pour toute $f \in E'$. On a même plus précisément l'inégalité $\|i_x\| \leq \|x\|$. De plus l'application $\mathcal{I} : E \rightarrow E''$ est bien linéaire (et elle est donc continue, de norme au plus 1).

Soit de nouveau $x \in E$. On veut montrer l'égalité $\|i_x\| = \|x\|$. Pour cela on introduit la forme linéaire continue $\ell : tx \in \mathbb{R}x \mapsto t \|x\| \in \mathbb{R}$, qui est de norme 1, et on invoque le théorème de Hahn-Banach pour la prolonger par $f \in E'$ de norme 1. On a donc

$$i_x(f) = f(x) = \|x\|.$$

Puisque $\|f\| = 1$, il vient $\|i_x\| \geq \|x\|$, d'où l'égalité. \square

C Un premier prolongement

Le coeur de la preuve du théorème de Hahn-Banach est contenu dans le lemme suivant, qui fournit un premier prolongement de ℓ en une forme linéaire continue de même norme, définie sur un espace à peine plus grand. Le reste de la preuve, au paragraphe D, est de l'enrobage...

Lemme 2.13. crucial de Hahn-Banach

On garde les notation du théorème 2.5. Soit $v \in E \setminus F$ et $F_1 = F \oplus \mathbb{R}v$.

Alors, il existe une forme linéaire continue $\ell_1 : F_1 \rightarrow \mathbb{R}$ qui prolonge ℓ , et telle que $\|\ell_1\| = \|\ell\|$.

Ce lemme permet de démontrer immédiatement le théorème de Hahn-Banach dans un premier cas (voir le paragraphe D pour le cas général).

Preuve de Hahn-Banach pour F de codimension finie

Supposons le sous-espace vectoriel $F \subset E$ de codimension finie k .

Choisir une base (e_1, \dots, e_k) d'un supplémentaire de F et poser $F_j = F \oplus \text{vect}(e_1, \dots, e_j)$ pour $1 \leq j \leq k$, et $F_0 = F$. Appliquer récursivement le lemme 2.13 à chaque couple $F_{j-1} \subset F_j$ ($1 \leq j \leq k$) pour conclure. \square

Preuve du lemme crucial 2.13

Si $\ell = 0$, on prend $\ell_1 = 0$ et on n'en parle plus! Après normalisation, on peut donc supposer désormais que $\|\ell\| = 1$. On sait qu'un prolongement linéaire de ℓ sera de norme au moins égale à 1.

La donnée d'une application linéaire $\ell_1 : F_1 = F \oplus \mathbb{R}v \rightarrow \mathbb{R}$ qui prolonge $\ell : F \rightarrow \mathbb{R}$ est équivalente à la donnée de $\alpha := \ell_1(v) \in \mathbb{R}$.

Nous cherchons α pour que la forme linéaire ℓ_1 correspondante soit de norme (au plus donc égale à) 1, c'est-à-dire vérifie les conditions équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} |\ell_1(z)| &\leq \|z\| && \text{pour tout } z \in F_1 \\ \ell_1(z) &\leq \|z\| && \text{pour tout } z \in F_1 \\ \ell_1(x + tv) &= \ell_1(x) + t\alpha \leq \|x + tv\| && \text{pour tout } x \in F, \end{aligned} \quad (2.1)$$

cette dernière condition (2.1) étant acquise lorsque $t = 0$ puisque $\|\ell\| = 1$. Par homogénéité (diviser les deux membres par $|t|$), il suffit donc d'assurer (2.1) lorsque $t = \pm 1$. La condition à vérifier par α est donc

$$\begin{cases} \ell(x) + \alpha \leq \|x + v\| & \text{pour tout } x \in F \\ \ell(y) - \alpha \leq \|y - v\| & \text{pour tout } y \in F \end{cases}$$

ou, de façon équivalente,

$$\ell(y) - \|y - v\| \leq \alpha \leq \|x + v\| - \ell(x) \quad \text{pour tous } x, y \in F. \quad (2.2)$$

Il existera un réel α satisfaisant la condition (2.2) si et seulement si le sup des termes de gauche, lorsque y décrit F , est au plus égal à l'inf des termes de droite, lorsque x décrit F . Or, puisque ℓ est supposée de norme 1, l'identité triangulaire dit qu'on a pour tous x et y dans F :

$$\ell(y) + \ell(x) = \ell(y + x) \leq \|y + x\| \leq \|y - v\| + \|v + x\|,$$

et donc

$$\sup_{y \in F} \ell(y) - \|y - v\| \leq \inf_{x \in F} \|x + v\| - \ell(x).$$

Il suffit donc de choisir α entre ces deux valeurs pour obtenir un prolongement $\ell_1 : F_1 \rightarrow \mathbb{R}$ de ℓ qui soit encore de norme 1. \square

D Preuve du théorème de Hahn-Banach

Pour démontrer le théorème de Hahn-Banach lorsque $F \subset E$ est de codimension quelconque, on procède essentiellement comme en codimension finie. Mais nous n'arrivons plus maintenant à nos fins en un nombre fini d'étapes. Nous devons donc rajouter un ingrédient : le lemme de Zorn.

Le "lemme" de Zorn n'est pas à démontrer, il doit être considéré comme l'un des axiomes sous lesquels on travaille.

Nous commençons par donner quelques définitions. Le lemme de Zorn s'énoncera alors simplement, mais il faut se faire la main sur des exemples pour comprendre les notions qui interviennent.

Définition 2.14. Une relation d'ordre sur un ensemble X est une relation binaire qui vérifie les propriétés suivantes :

- réflexivité :** $x \leq x$ pour tout $x \in X$
- anti-symétrie :** pour $x, y \in X$: si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$
- transitivité :** pour $x, y, z \in X$: si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$.

Nous n'imposons pas à cette relation d'ordre d'être totale : il se peut que deux éléments ne soient pas toujours comparables.

Définition 2.15. Soit (X, \leq) un ensemble ordonné, c'est-à-dire muni d'une relation d'ordre.

Un majorant pour une partie $Y \subset X$ est un élément $m \in X$ tel qu'on ait $y \leq m$ pour tout $y \in Y$.

Un élément $\mu \in X$ est maximal si, lorsque $x \in X$ vérifie $\mu \leq x$, alors $x = \mu$.

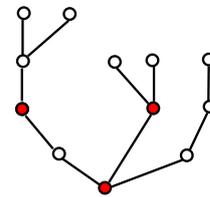
Un majorant de Y n'appartient pas toujours à Y ; on lui demande juste d'être plus grand que tous les éléments de Y . Dans $X = \mathbb{R}$, $\sqrt{2}$ et 3 sont des majorants pour $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$.

Un élément de X est maximal si personne n'est plus grand que lui (ce qui ne veut pas dire qu'il est plus grand que tout le monde).

Définition 2.16. Un ensemble ordonné X est inductif lorsque toute partie totalement ordonnée $Y \subset X$ admet un majorant.

Exercice 2.17. 1) Montrer que l'ensemble \mathbb{R} des réels n'est pas inductif.

2) L'ensemble X des sommets de l'arbre dessiné ci-contre est muni de la relation d'ordre définie par $x \leq y$ si on passe de x à y en "montant" le long d'une suite d'arêtes. La partie formée des sommets rouges est-elle majorée? Décrire les parties totalement ordonnées de X . Ce graphe admet-il des éléments maximaux? Si oui, lesquels?



Lemme 2.18. de Zorn

Tout ensemble ordonné inductif (non vide) possède un élément maximal.

Attention ! Comme on l'a vu dans l'exercice 2.17, l'élément en question est maximal (personne n'est plus grand que lui), par contre ce n'est en général pas un majorant de l'ensemble (car il y a peut-être des éléments qui ne lui sont pas comparables).

Preuve du théorème de Hahn-Banach 2.5

On introduit l'ensemble X dont les éléments sont les couples (G, λ) , où G est un sous-espace vectoriel de E qui contient F , et $\lambda : G \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue de norme $\|\lambda\| = \|\ell\|$ qui prolonge ℓ . On munit cet ensemble X de la relation d'ordre définie par

$$(G_1, \lambda_1) \leq (G_2, \lambda_2) \text{ si et seulement si } G_1 \subset G_2 \text{ et } \lambda_2 \text{ prolonge } \lambda_1.$$

Montrons que cette relation d'ordre fait de X un ensemble inductif. Soit $Y = \{(G_i, \lambda_i), i \in I\}$ une partie totalement ordonnée de X . On va lui construire un majorant.

Pour cela, on introduit la réunion $G = \cup_{i \in I} G_i \subset E$. Cette réunion de sous-espaces vectoriels est encore un sous-espace vectoriel. Ce ne serait pas le cas en général (penser à deux droites dans $\mathbb{R}^2 : \ominus!$) mais ici l'assertion est correcte puisque, la famille étant supposée totalement ordonnée, on a pour tous $i, j \in I$, soit $G_i \subset G_j$ soit $G_j \subset G_i$.

Soit $x \in G$. La famille Y étant totalement ordonnée, on a pour tous indices $i, j \in I$ tels que $x \in G_i \cap G_j$, l'égalité $\lambda_i(x) = \lambda_j(x)$. On définit donc une application $\Lambda : G \rightarrow \mathbb{R}$ en attribuant à $x \in G$ la valeur commune des $\lambda_i(x)$ pour les indices tels que $x \in G_i$. On vérifie facilement que Λ est linéaire, puis qu'elle est continue et de norme $\|\Lambda\| = \|\ell\|$, et qu'elle prolonge ℓ . En d'autres termes on a $(G, \Lambda) \in X$ et, par construction, cet élément est un majorant de Y .

Nous avons montré que X est inductif. Le lemme de Zorn assure donc que X admet un élément maximal $(\tilde{F}, \tilde{\ell})$. Il suit du lemme crucial 2.13 que $\tilde{F} = E$, ce qui achève la démonstration. \square

3. Compacité dans les espaces fonctionnels

NOUS devez déjà être convaincus de l'importance de savoir décrire les parties compactes d'un espace métrique. Notre objectif étant de faire de l'analyse fonctionnelle, nous souhaitons décrire les parties compactes de certains espaces de fonctions. Dans ce chapitre, nous abordons cette question pour l'espace des fonctions continues définies sur un espace compact. Nous démontrons également un premier résultat de "compacité faible".

A Compacité

Rappelons tout d'abord la définition des espaces métriques compacts.

Proposition-Définition 3.1. *Un espace métrique X est compact lorsqu'il satisfait l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :*

- **Bolzano-Weierstrass :** *toute suite admet une sous-suite convergente*
- **Borel-Lebesgue :** *de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Pour une preuve de l'équivalence de ces deux propriétés, on renvoie par exemple au polycopié "Topologie et Calcul différentiel". On verra une autre caractérisation de la compacité, pour un espace métrique, en 4.11.

Nous reviendrons au chapitre 10 sur la notion de compacité, cette fois-ci dans le cas non métrisable.

Exemple 3.2. Les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont ses parties fermées et bornées.

Plutôt que de décrire les parties compactes d'un espace métrique, on pourra décrire ses parties relativement compactes.

Définition 3.3. *Une partie $A \subset X$ d'un espace métrique est relativement compacte si et seulement si son adhérence $\overline{A} \subset X$ est compacte.*

Remarque 3.4. Comme son nom l'indique, la notion de relative compacité est... relative ☺! Par exemple, l'intervalle ouvert $]0, 1[$ n'est pas compact. Il n'est relativement compact ni dans lui-même, ni dans l'intervalle $]0, 1]$. Par contre, il est relativement compact dans \mathbb{R} .

Exercice 3.5. Soit X un espace métrique compact. Montrer que toute partie $A \subset X$ est relativement compacte.

Les parties relativement compactes sont également caractérisées en termes de sous-suites convergentes. En effet :

Lemme 3.6. *Une partie $A \subset X$ d'un espace métrique est relativement compacte si et seulement si, de toute suite d'éléments de A , on peut extraire une sous-suite convergente dans X (de limite $\alpha \in \overline{A}$).*

Preuve Montrons d'abord la partie directe. On suppose donc l'adhérence \overline{A} compacte. Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A étant a fortiori une suite d'éléments de \overline{A} , elle admet une sous-suite convergente, de limite $\alpha \in \overline{A}$.

Montrons maintenant la réciproque. On va montrer que \overline{A} est compacte en utilisant le critère de Bolzano-Weierstrass. Soit donc $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \overline{A} . Par définition de l'adhérence, on peut choisir pour chaque entier $n \geq 1$ un élément $a_n \in A$ tel que $d(a_n, \alpha_n) \leq 1/n$. Par hypothèse, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, de limite $\alpha \in \overline{A}$. La suite $(\alpha_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, adjacente à $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, converge également vers α . \square

La notion de séparabilité, déjà évoquée au chapitre 0, intervient dans la preuve du théorème d'Ascoli. Nous la retrouverons également au chapitre 7.

Définition 3.7. *Un espace métrique est séparable si il contient une partie $D \subset X$ dénombrable et dense.*

Un espace métrique compact, s'approchant bien par des parties finies, sera séparable.

Lemme 3.8. *Un espace métrique compact est séparable.*

Preuve Soit X un espace métrique compact.

Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace X est recouvert par un nombre fini de boules de rayons $1/n$ (appliquer la propriété de Borel-Lebesgue au recouvrement de X constitué de toutes les boules $B(x, 1/n)$ où x décrit X). On considère $D_n \subset X$ l'ensemble (fini) des centres de ces boules, ainsi que la réunion $D = \cup_{n \geq 1} D_n$. L'ensemble D est dénombrable, et il est dense dans X par construction. \square

Exercice 3.9. Montrer que les espaces $\ell^p(\mathbb{N})$ sont séparables lorsque $1 \leq p < \infty$, mais que l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable.

Montrer de même que, lorsque $1 \leq p < \infty$, les espaces $L^p(\mathbb{R})$ et $L^p_{2\pi}$ sont séparables. Montrer par contre que ni $L^\infty_{2\pi}$ ni $L^\infty(\mathbb{R})$ ne sont séparables.

Un autre exemple d'espace séparable est fourni par l'espace $C^0(X, \mathbb{R})$, muni de la norme sup, lorsque X est un espace métrique compact (voir le lemme 8.12).

B Equicontinuité

Le théorème d'Ascoli fait intervenir la notion de famille équicontinue. Comme on le verra en 3.13, l'équicontinuité permet de conserver la continuité lors d'une convergence simple.

Définition 3.10. Soient X et Y deux espaces métriques et Y^X l'ensemble des applications $f : X \rightarrow Y$. Une famille d'applications $\mathcal{F} \subset Y^X$ est

1. *équicontinue au point* $x_0 \in X$ si

$$\forall \varepsilon, \exists \eta = \eta(\varepsilon) \mid \forall f \in \mathcal{F}, \forall x \in X : d(x, x_0) < \eta \implies d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon;$$

2. *équicontinue si elle est équicontinue en tout point, c'est-à-dire si*

$$\forall x_0 \in X, \forall \varepsilon, \exists \eta = \eta(x_0, \varepsilon) \mid \forall f \in \mathcal{F}, \forall x \in X : \\ d(x, x_0) < \eta \implies d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

La famille est donc équicontinue au point $x_0 \in X$ si chaque fonction de la famille est continue en x_0 et si on peut quantifier uniformément la continuité, en ce point, de toutes les fonctions de la famille.

Exemple 3.11. Une famille finie d'applications continues $\mathcal{F} \subset C^0(X, Y)$ (ou bien continues au point x_0) est équicontinue (au point x_0).

La famille $\mathcal{F} = \{f_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ où $f_k : t \in \mathbb{R} \mapsto tk \in \mathbb{R}$ n'est équicontinue en aucun point.

La famille $\mathcal{F} = \{f_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ où $f_k : t \in [0, 1] \mapsto t^k \in [0, 1]$ est équicontinue en tout point de $[0, 1[$, mais n'est pas équicontinue en 1.

Exemple 3.12. Soit $k > 0$.

La famille $\text{Lip}_k(X, Y)$ des applications k -lipschitziennes de X dans Y est équicontinue.

En particulier, si E et F sont deux espaces vectoriels normés, une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}_c(E, F)$ d'applications linéaires continues de E dans F , telle que $\|f\| \leq k$ pour tout $f \in \mathcal{F}$, est équicontinue.

On sait qu'une limite simple d'applications continues n'est pas toujours continue. On a par contre le résultat suivant, dont nous laissons la preuve en exercice.

Lemme 3.13. Soient X et Y deux espaces métriques.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de X dans Y qui converge simplement vers $f : X \rightarrow Y$. On suppose que la famille $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue. Alors la limite f est continue.

Le coeur de la preuve du théorème d'Ascoli est contenu dans le lemme suivant.

Lemme 3.14. Lemme crucial d'Ascoli

Soient X un espace métrique, et Y un espace métrique complet.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de X dans Y . On suppose que la famille $\mathcal{F} = \{f_n, n \in \mathbb{N}\} \subset C^0(X, Y)$ est équicontinue. On suppose également que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur une partie dense $D \subset X$. Alors :

1. la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur X , vers $f : X \rightarrow Y$;
2. la convergence est uniforme sur les parties compactes de X ;
3. la limite f est continue.

Preuve Il suffit de montrer la seconde assertion. La première en découle, et le lemme 3.13 assure la continuité de la limite.

Soit donc $K \subset X$ une partie compacte. Puisque l'espace Y est complet il suffit, pour montrer la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur K , de montrer que cette suite vérifie un critère de Cauchy uniforme sur ce compact.

On se donne $\varepsilon > 0$. Par équicontinuité de la famille $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$, chaque point $x \in X$ possède un voisinage $\mathcal{V}_\varepsilon(x)$ sur lequel chaque application f_n (pour $n \in \mathbb{N}$) oscille d'au plus ε . On recouvre bien entendu le compact K par une sous-famille finie $\mathcal{V}_\varepsilon(x_1), \dots, \mathcal{V}_\varepsilon(x_p)$ de tels voisinages. Pour chaque voisinage $\mathcal{V}_\varepsilon(x_i)$, on choisit un point $\xi_i \in D \cap \mathcal{V}_\varepsilon(x_i)$ de notre partie dense D (pour $1 \leq i \leq p$).

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant simplement sur la partie D , elle converge uniformément sur la partie finie $\{\xi_i, 1 \leq i \leq p\} \subset D$. En particulier, pour la valeur de ε qu'on s'est déjà fixée, il existe un entier N_ε tel que l'on ait

$$\forall n, m \geq N_\varepsilon, \forall 1 \leq i \leq p : d(f_n(\xi_i), f_m(\xi_i)) \leq \varepsilon.$$

Soit maintenant $x \in K$, et un indice $1 \leq i \leq p$ pour lequel $x \in \mathcal{V}_\varepsilon(x_i)$. L'inégalité triangulaire assure que, lorsque $m, n \geq N_\varepsilon$, on a

$$\begin{aligned} d(f_n(x), f_m(x)) &\leq d(f_n(x), f_n(\xi_i)) + d(f_n(\xi_i), f_m(\xi_i)) + d(f_m(\xi_i), f_m(x)) \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

(pour majorer les termes extrêmes, on a utilisé le fait que chaque application de la famille oscille d'au plus ε sur $\mathcal{V}_\varepsilon(x_i)$, et que $x, \xi_i \in \mathcal{V}_\varepsilon(x_i)$). \square

L'hypothèse d'équicontinuité dans le lemme précédent est indispensable. Sans cette hypothèse, la convergence sur une partie dense ne suffira pas à entraîner la convergence partout.

Exercice 3.15. On introduit les fonctions $f_n : t \in [0, 1] \mapsto \sin(n!2\pi t) \in \mathbb{R}$, pour $n \geq 1$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur une partie dense de $[0, 1]$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle vers 0 sur $[0, 1]$? La famille $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ est-elle équicontinue?

C Le théorème d'Ascoli

Soient X un espace métrique compact et Y un espace métrique. On munit l'espace des applications continues de X dans Y de la topologie de la convergence uniforme, associée à la distance définie pour $f, g \in C^0(X, Y)$ par

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Lorsque l'espace Y est supposé complet, le théorème d'Ascoli décrit les parties relativement compactes de $C^0(X, Y)$, et donc ses parties compactes. Rappelons en effet qu'une partie $A \subset Z$ d'un espace métrique est compacte si et seulement si elle est relativement compacte et fermée.

Théorème 3.16. Théorème d'Ascoli

Soient X un espace métrique compact et Y un espace métrique complet.

Une partie $\mathcal{F} \subset C^0(X, Y)$ est relativement compacte (pour la topologie de la convergence uniforme) si et seulement si

1. *la famille \mathcal{F} est équicontinue*
2. *pour tout $x \in X$, l'image $\mathcal{F}(x) = \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ est relativement compacte dans Y .*

Exemple 3.17. Soient $X = [0, 1]$ qui est un espace compact, et $Y = \mathbb{R}$ qui est un espace complet. Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit les fonctions f_n, g_n de $C^0(X, Y)$ définies respectivement pour $t \in X$ par $f_n(t) = n$ et $g_n(t) = t^n$.

Les suites $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admettent ni l'une ni l'autre de sous-suite convergente dans $C^0(X, Y)$.

La famille $\mathcal{F} = \{f_n, n \in \mathbb{N}\} \subset C^0(X, Y)$ n'est donc pas relativement compacte. Elle satisfait la première condition du théorème d'Ascoli, mais pas la seconde.

La famille $\mathcal{G} = \{g_n, n \in \mathbb{N}\} \subset C^0(X, Y)$ n'est pas relativement compacte non plus. Elle satisfait la seconde condition du théorème d'Ascoli, mais pas la première.

Remarque 3.18. Lorsque Y est un espace compact, la seconde condition est automatiquement satisfaite (exercice 3.5).

Si $Y = \mathbb{R}^n$, la seconde condition équivaut à demander que, pour tout $x \in X$, l'image $\mathcal{F}(x)$ soit une partie bornée de \mathbb{R}^n .

La partie directe est facile. La partie utile est la réciproque, et elle est (sans surprise...) plus délicate à démontrer. Outre le lemme 3.14, elle utilisera le procédé diagonal. Nous introduisons donc deux notations.

Notation 3.19. *Lorsqu'une suite S_1 est extraite de la suite S_0 , on note $S_1 \prec S_0$.*

Si S est une suite, on désigne par $S' \prec S$ la suite extraite obtenue en privant S de son premier terme.

Preuve du théorème 3.16

\Leftarrow On suppose que la partie $\mathcal{F} \subset C^0(X, Y)$ satisfait les deux conditions, et on veut montrer que \mathcal{F} est relativement compacte.

Pour cela on utilise le critère du lemme 3.6. On considère donc une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{F} , dont on veut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur le compact X .

Par le lemme crucial, il nous suffit d'extraire de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge simplement sur une partie dense $D \subset X$. On a bien entendu intérêt à choisir une partie dense aussi petite que possible. Puisque X est compact, nous choisissons une partie dénombrable dense $D \subset X$ (lemme 3.8). On notera $D = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Notons $S = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite initiale. L'hypothèse 2, appliquée au point x_0 , assure l'existence d'une suite extraite $S_0 \prec S$ qui converge au point x_0 . On désigne par f_{n_0} le premier terme de S_0 .

De même, on extrait de la suite S'_0 une suite $S_1 \prec S'_0$ qui converge au point x_1 . On note f_{n_1} son premier terme. On a donc $n_1 > n_0$.

On itère le procédé et on construit une famille de suites extraites S_p (pour $p \in \mathbb{N}$), avec

$$S_{p+1} \prec S'_p \prec S_p \cdots \prec S_1 \prec S'_0 \prec S_0,$$

de sorte que la suite de fonctions S_{p+1} converge au point x_{p+1} .

On désigne par f_{n_p} le premier terme de la suite S_p , et on introduit la suite

$$\Sigma = (f_{n_0}, f_{n_1}, \cdots, f_{n_p}, \cdots) \prec S.$$

Cette suite Σ est effectivement extraite de S puisque, par construction, $n_{p+1} > n_p$ pour tout $p \geq 0$. Fixons $p \in \mathbb{N}$. La suite Σ privée de ses p premiers termes est extraite de S_p , donc Σ converge au point x_p .

\Leftarrow On suppose que \mathcal{F} est relativement compacte, et on veut montrer que cette famille satisfait les conditions 1 et 2.

(1) Soit $x_0 \in X$. On veut montrer que la famille \mathcal{F} est équicontinue au point x_0 . On se donne donc $\varepsilon > 0$. Par compacité de $\overline{\mathcal{F}}$, la famille $\overline{\mathcal{F}}$ (et donc \mathcal{F}) est recouverte par une famille finie de boules $B(g_i, \varepsilon)$, avec $g_i \in C^0(X, Y)$ ($1 \leq i \leq N$).

Chacune des fonctions g_i de cette famille finie est continue au point x_0 . Il existe donc $\eta > 0$ tel que si $d(x, x_0) < \eta$, on a $d(g_i(x), g_i(x_0)) < \varepsilon$ pour tout $1 \leq i \leq N$. Soit $f \in \mathcal{F}$. On choisit $1 \leq i \leq N$ tel que $f \in B(g_i, \varepsilon)$. L'inégalité triangulaire assure alors que $d(f(x), f(x_0)) \leq 3\varepsilon$ lorsque $d(x, x_0) < \eta$.

(2) L'adhérence $\overline{\mathcal{F}} \subset C^0(X, Y)$ est compacte par hypothèse. Soit $x \in X$. L'application $f \in C^0(X, Y) \mapsto f(x) \in Y$ est 1-lipschitzienne. Il suit que $\overline{\mathcal{F}}(x) \subset Y$ est compact comme image continue d'un compact, et donc $\mathcal{F}(x) \subset \overline{\mathcal{F}}(x)$ est bien relativement compact dans Y . \square

D Convergence faible-*, une première visite

Nous allons déduire du lemme 3.14 et du procédé diagonal un second théorème de compacité.

L'étiquette de "compacité" que nous attribuons à ce résultat, qui semble raisonnable en ce qu'il est réminiscent d'un critère de Bolzano-Weierstrass, sera pleinement justifiée au chapitre 8. Nous y montrerons en effet que la topologie de la convergence simple sur la boule unité du dual d'un espace vectoriel normé séparable est métrisable.

Théorème 3.20. Compacité faible de la B.U. du dual, cas séparable (1)

Soit E un evn séparable, et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de formes linéaires continues sur E , de normes $\|f_n\| \leq 1$.

Quitte à passer à une sous-suite, il existe une forme linéaire $f \in E'$ de norme $\|f\| \leq 1$ telle que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f (et même uniformément sur les parties compactes de E). De plus, $\|f\| \leq 1$.

Preuve L'espace E étant supposé séparable on peut choisir une partie dénombrable dense $D \subset E$. La famille \mathcal{F} est ponctuellement bornée puisque $|f_n(x)| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Le procédé diagonal permet donc de supposer, après extraction, que la suite d'applications $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ converge simplement en tout point de l'ensemble dénombrable D .

La famille $\mathcal{F} = \{f_n, n \in \mathbb{N}\} \subset C^0(E, \mathbb{R})$ est équicontinue, puisque toutes les applications linéaires $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de norme au plus 1 et donc sont 1-lipschitziennes. Le lemme crucial 3.14 assure donc que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui converge en tout point d'une partie dense, converge simplement en tout point de E , et que la convergence est uniforme sur les parties compactes de E . On notera $f = \lim f_n$.

La linéarité est conservée par convergence simple. De plus on a pour tout $x \in E$ la majoration

$$|f(x)| = \lim |f_n(x)| \leq \|x\|$$

donc f est linéaire continue, et de norme au plus 1. □

Remarque 3.21. Bien entendu, dans l'énoncé précédent, l'important est que les normes des formes linéaires $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soient uniformément bornées, peu importe la borne.

Définition 3.22. Soient $f_n, f \in E'$ des formes linéaires continues sur E . Lorsque la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f , on dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f pour la topologie faible-*, et on note $f_n \xrightarrow{*} f$.

4. Distance de Hausdorff

UN des objectifs de ce chapitre est de construire des objets fractals ou, plus précisément, des compacts auto-similaires $E \subset \mathbb{R}^d$ de l'espace euclidien. Ce qui caractérise ces compacts auto-similaires, c'est qu'ils sont invariants par changement d'échelle : si l'on zoome sur une partie de E , on retrouve E lui-même.

De tels objets existent dans la nature. Penser au chou romanesco, à certains cristaux, ou encore à la structure du poumon.

A Compacts auto-similaires

Commençons par rappeler la définition des similitudes. Ce concept n'a de sens que dans \mathbb{R}^d euclidien.

Définition 4.1. Une similitude $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une transformation affine de \mathbb{R}^d euclidien définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, par

$$f(x) = k A(x) + y_0 \quad \text{où } k > 0 \text{ et } A \in O(d).$$

En d'autres termes, une similitude est une transformation affine dont la partie linéaire est une similitude vectorielle, c'est-à-dire le produit kA d'une homothétie de rapport $k > 0$ et d'une isométrie $A \in O(d)$.

Le réel $k > 0$ est appelé rapport de la similitude.

Remarque 4.2. On dit que la similitude est directe lorsqu'elle préserve l'orientation, c'est-à-dire lorsque $A \in SO(d)$. Elle est indirecte sinon.

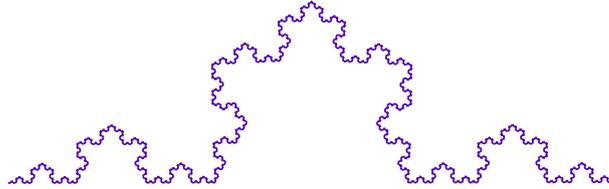
Une similitude préserve les angles, mais pas les distances : celles-ci sont toutes multipliées par le rapport de la similitude.

Rappelons que deux triangles de \mathbb{R}^2 euclidien sont dits semblables quand il existe une similitude qui envoie l'un sur l'autre.

Identifions \mathbb{R}^2 euclidien à \mathbb{C} . A travers cette identification, les similitudes directes de \mathbb{R}^2 sont les applications $z \in \mathbb{C} \mapsto \alpha z + \beta \in \mathbb{C}$, pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$. Les similitudes indirectes sont les applications $z \in \mathbb{C} \mapsto \alpha \bar{z} + \beta \in \mathbb{C}$, pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$. Le rapport de la similitude est égal au module $|\alpha|$.

Nous nous intéresserons aux compacts auto-similaires de \mathbb{R}^d euclidien.

Définition 4.3. Une partie E de \mathbb{R}^d euclidien est auto-similaire si on peut l'écrire comme union finie $E = \cup_{i=1}^p f_i(E)$ d'images de lui-même par des similitudes contractantes $f_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, c'est-à-dire de rapports $0 < k_i < 1$ (pour $1 \leq i \leq p$).



Un premier exemple de compact auto-similaire : la courbe de von Koch (snowflake)

Ces compacts auto-similaires seront obtenus au paragraphe E par un procédé d'approximations successives utilisant le théorème du point fixe de Banach.

B Distance de Hausdorff

Avant tout, il nous faut introduire une distance sur l'ensemble des parties compactes d'un espace métrique : la distance de Hausdorff.

Notation 4.4. Lorsque A est une partie de l'espace métrique X et $r > 0$, on introduit son r -voisinage fermé défini par

$$\mathcal{V}_r(A) = \{y \in X \mid d(y, A) \leq r\}.$$

Définition 4.5. Distance de Hausdorff

Soit X un espace métrique. On désigne par $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble des parties compactes non vides de X . Pour $A, B \in \mathcal{K}(X)$, on pose

$$d_H(A, B) = \inf\{r > 0 \mid A \subset \mathcal{V}_r(B) \text{ et } B \subset \mathcal{V}_r(A)\}.$$

Exercice 4.6. Soient $A, B \subset X$ deux parties compactes. Montrer que l'on a $d_H(A, B) \leq \varepsilon$ si et seulement si tout point de A est à distance au plus ε d'un point de B , et vice-versa. Montrer également que

$$d_H(A, B) = \max \left[\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A) \right].$$

Exemple 4.7. L'ellipse violette et l'ellipse bleue sont deux compacts proches pour la distance de Hausdorff.

Par contre, la réunion de l'ellipse violette et de la toute petite croix, et l'ellipse bleue, sont bien plus éloignées. (On aurait même pu remplacer la croix par un point, du moment que celui-ci est loin de l'ellipse bleue.)



Proposition 4.8. *Soient X un espace métrique. L'application d_H définit une distance sur l'ensemble $\mathcal{K}(X)$ des parties compactes non vides de X .*

Preuve Soient $A, B \in \mathcal{K}(X)$ des compacts non vides de X .

Séparation Si $A = B$, on a $d_H(A, B) = 0$. Si $d_H(A, B) = 0$, tout point $x \in A$ est à distance nulle du compact (et donc fermé) B , donc $x \in B$. Ainsi $A \subset B$, puis $A = B$ par symétrie.

Symétrie Par construction, on a l'égalité $d_H(A, B) = d_H(B, A)$.

Inégalité triangulaire L'inégalité triangulaire suit de l'inclusion

$$\mathcal{V}_s(\mathcal{V}_t(A)) \subset \mathcal{V}_{s+t}(A)$$

pour tous $s, t \geq 0$. □

Par la suite, nous serons amenés à considérer des suites de compacts. La proposition suivante nous permettra de nous ramener à des suites de fonctions, pour l'étude desquelles nous avons déjà développé des outils.

Proposition 4.9. *Soient X un espace métrique et $A, B \in \mathcal{K}(X)$ deux parties compactes. On introduit les fonctions continues $f, g \in C^0(X, \mathbb{R})$ définies par $f = d(\cdot, A)$ et $g = d(\cdot, B)$. Alors, la différence $f - g$ est bornée et on a l'égalité*

$$d_H(A, B) = \|f - g\|_\infty.$$

Preuve Nous commençons par montrer que $g \leq f + d_H(A, B)$. Soit donc $x \in X$. L'application $a \in A \mapsto d(x, A) \in [0, +\infty[$, continue sur le compact A , atteint son minimum. Il existe donc $a \in A$ tel que $f(x) = d(x, A) = d(x, a)$. Par définition de la distance de Hausdorff, ce point $a \in A$ est à distance au plus $d_H(A, B)$ d'un point $b \in B$. On a donc

$$g(x) = d(x, B) \leq d(x, b) \leq d(x, a) + d(a, b) \leq f(x) + d_H(A, B).$$

L'inégalité $|f(x) - g(x)| \leq d_H(A, B)$ pour tout $x \in X$ suit par symétrie. Ainsi $\|f - g\|_\infty \leq d_H(A, B)$.

L'inégalité inverse est immédiate. Soit en effet $a \in A$. On a

$$d(a, B) = g(a) = g(a) - f(a) \leq \|f - g\|_\infty.$$

Il suit, par symétrie, que $d_H(A, B) \leq \|f - g\|_\infty$. □

La distance de Hausdorff, définie sur l'ensemble des parties compactes d'un même espace métrique, préfigure la distance de Gromov-Hausdorff. Cette dernière est une distance sur l'ensemble des classes d'isométrie d'espace métriques compacts. L'introduction, au début des années 80, de la distance de Gromov-Hausdorff marque un tournant dans des domaines comme la géométrie riemannienne ou la théorie géométrique des groupes¹.

¹Petersen, Riemannian geometry, Springer

C Compacité (suite)

Nous avons rappelé au paragraphe 3.E deux critères de compacité dans un espace métrique, à savoir les propriétés de Borel-Lebesgue et de Bolzano-Weierstrass. Nous présentons ici un troisième critère, chacun ayant son intérêt selon le contexte.

Définition 4.10. *Un espace métrique est précompact si, pour tout $\varepsilon > 0$, cet espace peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayons ε .*

Proposition 4.11. *Un espace métrique est compact si et seulement si il est précompact et complet.*

Preuve Supposons X compact. Alors le critère de Bolzano-Weierstrass assure qu'il est complet. En effet, une suite de Cauchy dont une sous-suite est convergente est elle-même convergente. Cet espace est également précompact : appliquer le critère de Borel-Lebesgue au recouvrement ouvert de X par toutes les boules $\{B(x, \varepsilon) \mid x \in X\}$ de rayon ε .

Supposons maintenant l'espace métrique X complet et précompact. Nous allons montrer que l'espace X est compact en utilisant le critère de Bolzano-Weierstrass. Soit donc une suite $S = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X . Nous voulons en extraire une sous-suite convergente. Puisque X est complet, il suffit d'en extraire une sous-suite qui est de Cauchy. Cette construction va reposer de nouveau sur le procédé diagonal utilisé dans la preuve du théorème 3.16. Nous reprenons les mêmes notations, voir 3.19.

Par hypothèse X est recouvert par un nombre fini de boules de rayon 1. L'une d'entre elles, que nous noterons B_0 , contient donc une infinité de termes de la suite. Nous pouvons donc considérer la suite extraite $S_0 \prec S$ constituée de tous les termes de S qui appartiennent à B_0 . Notons x_{n_0} le premier terme de S_0 , et S'_0 la suite S_0 privée de ce premier terme.

Par hypothèse X est recouvert par un nombre fini de boules de rayon 2^{-1} . L'une d'entre elles, que nous noterons B_1 , contient donc une infinité de termes de la suite S'_0 . Nous pouvons donc considérer la suite extraite $S_1 \prec S'_0$ constituée de tous les termes de S'_0 qui appartiennent à B_1 . Notons x_{n_1} le premier terme de S_1 .

On réitère le procédé. A l'étape p , on construit une suite S_p avec

$$S_p \prec S'_{p-1} \prec S_{p-1} \prec \dots \prec S'_1 \prec S_1 \prec S'_0 \prec S_0 \prec S,$$

dont tous les termes appartiennent à une même boule $B_p \subset X$ de rayon 2^{-p} . On note x_{n_p} le premier terme de S_p .

Soit la suite $\Sigma = (x_{n_0}, x_{n_1}, \dots, x_{n_p}, \dots)$. Par construction, la suite $\Sigma \prec S$ est extraite de S et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, tous les termes $\{x_{n_p} \mid p \geq k\}$ d'ordre au moins k de cette suite Σ appartiennent à une même boule de rayon 2^{-k} . Ainsi Σ est de Cauchy, donc converge dans notre espace complet X . \square

D Etude de l'espace $(\mathcal{K}(X), d_H)$

Les propriétés de l'espace $\mathcal{K}(X)$ qui vont faire son intérêt sont énoncées dans le théorème suivant.

Théorème 4.12. (1) Soit X un espace métrique compact. L'espace métrique $(\mathcal{K}(X), d_H)$ est également compact.

(2) Lorsque l'espace métrique X est complet, l'espace métrique $(\mathcal{K}(X), d_H)$ est également complet.

Preuve On commence par démontrer (1). Le (2) s'en déduira.

(1) Supposons X compact. Pour montrer que $(\mathcal{K}(X), d_H)$ est également compact, on va utiliser le critère de Bolzano-Weierstrass.

Soit une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de compacts non vides de X . On veut montrer que cette suite admet une sous-suite convergente dans $(\mathcal{K}(X), d_H)$. Pour cela, on va utiliser la proposition 4.9 pour se ramener à une suite de fonctions.

On introduit donc la famille de fonctions continues sur X définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f_n = d(\cdot, A_n)$. Le théorème d'Ascoli 3.16 s'applique à la famille $\mathcal{F} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. En effet, toutes ces fonctions distance sont 1-lipschitziennes, et elles sont uniformément bornées par le diamètre de X . On peut donc supposer, quitte à passer à une sous-suite, que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue $f \in C^0(X, \mathbb{R})$. La fonction f est encore 1-lipschitzienne.

Introduisons l'ensemble $A = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ où f s'annule. Puisque f est continue, A est une partie fermée de X compact, et donc un compact de X . Nous allons montrer que A est non vide, puis que $f = d(\cdot, A)$ est la fonction distance à A . On aura alors, d'après la proposition 4.9 :

$$d_H(A, A_n) = \|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, et (1) sera démontré.

• Montrons que A est non vide. Pour cela on choisit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, un point $a_n \in A_n$. Puisque X est compact on peut supposer, quitte à passer à une sous-suite, que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi construite converge vers un point $\alpha \in X$. En utilisant l'inégalité triangulaire on obtient, puisque $f_n(a_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|f(\alpha)| = |f(\alpha) - f_n(a_n)| \leq |f(\alpha) - f(a_n)| + \|f_n - f\|_\infty.$$

En faisant tendre $n \rightarrow \infty$, il vient $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $\alpha \in A$. Le compact A est donc non vide.

• Il nous reste à voir que $f = d(\cdot, A)$ est la fonction distance au compact A , ce que nous allons montrer par double inégalité.

D'une part, la fonction f est nulle sur A et elle est 1-lipschitzienne. On a donc $f \leq d(\cdot, A)$.

Montrons maintenant l'inégalité inverse. Soit $x \in X$. Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$ la distance $d(x, A_n)$ est atteinte en un point $a_n \in A_n$, puisque A_n est compact. On a vu au point précédent que, quitte à extraire, on peut supposer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point $\alpha \in A$. On a alors

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, a_n) = d(x, \alpha) \geq d(x, A).$$

(2) Supposons maintenant X complet. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{K}(X), d_H)$. On veut montrer que cette suite converge dans $(\mathcal{K}(X), d_H)$.

Ces compacts A_n ne vont (en général) pas aller visiter tout X : ils restent dans $L = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Nous allons voir que $L \subset X$ est compact. Admettons ce résultat un instant.

On applique alors le (1) de l'énoncé, dans l'espace des parties compactes non vides de L , à la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vue comme suite de parties compactes de L . Cette suite converge donc pour la distance de Hausdorff vers une partie compacte non vide $A \subset L \subset X$.

Pour conclure, il nous reste donc à montrer que la partie $L \subset X$ est effectivement compacte. Par construction, $L \subset X$ est une partie fermée de l'espace complet X , donc L est complète. Montrons que L est précompacte : la proposition 4.11 assurera alors que L est compacte. Soit donc $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $d_H(A_n, A_N) < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. On recouvre le compact $\cup_{n=1}^N A_n$ par un nombre fini de boules $B(x_i, \varepsilon)$ ($1 \leq i \leq p$). Il suit que $L \subset \cup_{i=1}^p B(x_i, 2\varepsilon)$. \square

E Attracteur d'un IFS

Les Systèmes de Fonctions Itérées, que l'on désigne par l'acronyme IFS (pour Iterated Function System), ont été introduits au début des années 80 par Hutchinson.²

Définition 4.13. Soit X un espace métrique. Un IFS $\Phi = (f_1, \dots, f_p)$ sur X est une famille finie d'applications contractantes $f_i : X \rightarrow X$ ($1 \leq i \leq p$).

Cet IFS induit une transformation $T = T_\Phi : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$ définie par

$$T(A) = \bigcup_{i=1}^p f_i(A).$$

Rappelons qu'une application $f : X \rightarrow X$ est contractante lorsqu'elle est lipschitzienne, de constante de Lipschitz $k < 1$.

Nous nous intéresserons aux compacts attracteurs d'IFS.

²Fractals and Self-Similarity, Indiana Univ. Math. J. 30 No. 5 (1981), 713-747

Définition 4.14. Soient Φ un IFS sur l'espace métrique X et l'application $T = T_\Phi : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$ associée.

Un attracteur pour l'IFS Φ est un compact non vide $K_0 \subset X$ invariant, c'est-à-dire tel que $K_0 = T(K_0)$ ou encore vérifiant $K_0 = \cup_{i=1}^p f_i(K_0)$.

La question qui nous intéresse en premier est celle de l'existence et de l'unicité d'un compact attracteur. On commence par un lemme.

Lemme 4.15. L'application $T : (\mathcal{K}(X), d_H) \rightarrow (\mathcal{K}(X), d_H)$ associée à un IFS est contractante.

Preuve Si chaque application f_i est k_i -lipschitzienne avec $k_i < 1$, on pose $k = \sup k_i < 1$. On vérifie alors facilement que, pour deux compacts non vides $A, B \in \mathcal{K}(X)$, on a la majoration

$$d_H(\cup_{i=1}^p f_i(A), \cup_{i=1}^p f_i(B)) \leq \sup_{1 \leq i \leq p} d_H(f_i(A), f_i(B)) \leq k d_H(A, B). \quad \square$$

Théorème 4.16. Soit X un espace métrique complet.

Tout IFS Φ sur X admet un unique compact invariant K_0 . De plus, pour tout compact non vide $A \in \mathcal{K}(X)$, ce compact invariant (ou attracteur) est obtenu comme la limite

$$K_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(A)$$

pour la distance de Hausdorff.

Preuve Ce théorème est une conséquence immédiate du lemme 4.15 et du théorème du point fixe de Banach-Picard. \square

Les IFS qui nous intéresseront le plus seront constituées de similitudes.

Corollaire 4.17. Soit une famille $f_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ de similitudes contractantes de \mathbb{R}^d euclidien ($1 \leq i \leq p$), et l'IFS $\Phi = (f_1, \dots, f_p)$.

Alors T_Φ admet un unique compact (non vide) invariant, c'est-à-dire tel que $K_0 = \cup_{i=1}^p f_i(K_0)$. Un tel compact sera dit auto-similaire.

Nous verrons qu'il est facile de construire des IFS dont les attracteurs sont de dimension de Hausdorff non entière (voir les chapitres 7 et 9), qui seront donc des objets fractals (selon la terminologie de Mandelbrot).

Il est bien plus facile de stocker l'IFS lui-même (en particulier lorsqu'il s'agit d'applications linéaires $f_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$) que son attracteur ! Cette remarque a été utilisée dans les années 90 pour développer une technique de compression d'images (compression fractale) où une image est d'abord décomposée comme réunion de parties "approximativement auto-similaires", chacune de ces parties étant associée à un IFS.

Le premier exemple sur lequel se faire la main, et qui nous servira fréquemment de référence, est celui de l'ensemble triadique de Cantor. Pour l'étudier, il sera utile de disposer des résultats de l'exercice suivant.

Exercice 4.18. Soient X un espace métrique, $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et K des parties compactes non vides de X .

1. On suppose que la suite (K_n) converge vers K pour la distance de Hausdorff. Montrer alors que la limite K vérifie

$$K = \{x \in X \mid \text{il existe une suite de points } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ avec } x_n \in K_n \text{ et } x_n \rightarrow x\}.$$

2. On suppose maintenant que la suite de compacts (K_n) est décroissante, i.e. que $K_{n+1} \subset K_n$ pour tout entier n .
 - (a) Montrer que l'intersection $K := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ est non vide.
 - (b) Montrer que la suite (K_n) est convergente pour la distance de Hausdorff, et déterminer sa limite.
3. Soient $\Phi = (f_i)_{1 \leq i \leq p}$ un IFS sur \mathbb{R}^d et $T : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ la transformation associée sur les compacts non vides de \mathbb{R}^d .
 - (a) Montrer qu'il existe un rayon $R > 0$ pour lequel $T(B_f(0, R)) \subset B_f(0, R)$.
 - (b) En déduire que l'attracteur de l'IFS est $K_0 := \bigcap_{n \geq 1} T^n(B_f(0, R))$.

Exemple 4.19. Le Cantor $\mathcal{C}^{(1/3)}$

Soient $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto x/3 \in \mathbb{R}$ et $f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto 2/3 + x/3 \in \mathbb{R}$, l'IFS $\Phi = (f_1, f_2)$ et la transformation $T : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ associée sur l'ensemble des parties compactes non vides de \mathbb{R} .

L'attracteur de T est appelé ensemble triadique de Cantor, et nous le désignerons par $\mathcal{C}^{(1/3)}$. On a vu au théorème 4.16 que $\mathcal{C}^{(1/3)}$ est obtenu, pour chaque compact initial $L \subset \mathbb{R}$ non vide, comme limite pour la distance de Hausdorff de la suite des images itérées $(T^n(L))_{n \in \mathbb{N}}$.

Choisissons comme compact initial L l'intervalle $I = [0, 1]$. On observe que $T(I) \subset I$. L'exercice précédent montre donc que $\mathcal{C}^{(1/3)} = \bigcap \searrow T^n(I)$ (intersection décroissante). Décrivons les compacts $T^n(I)$.

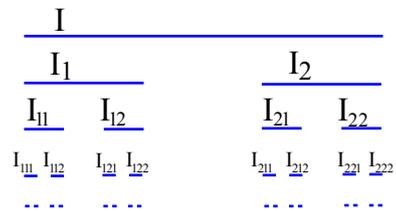
Pour un multi-indice $(i_1, \dots, i_n) \in \{1, 2\}^n$, on introduit

$$I_{i_1 \dots i_n} = f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_n}(I).$$

On prouve immédiatement (récurrence sur n) que

$$T^n(I) = \bigcup_{(i_1, \dots, i_n)} I_{i_1 \dots i_n},$$

où les $I_{i_1 \dots i_n}$ sont des intervalles, au nombre de 2^n , appelés intervalles de n -ième génération.



On obtient les deux intervalles de $(n + 1)$ -ième génération $I_{i_1 \dots i_n 1}$ et $I_{i_1 \dots i_n 2}$ en ôtant le tiers médian de l'intervalle de n -ième génération $I_{i_1 \dots i_n}$, voir le dessin. Chaque intervalle de n -ième génération est de longueur $(1/3)^n$. Deux intervalles de n -ième génération sont distants d'au moins $(1/3)^n$.

F Quelques autres exemples

Nous illustrons maintenant le théorème 4.16, dont nous conservons les notations, sur quelques exemples. Ce n'est pas seulement pour le plaisir de faire des dessins... l'idée est également de se familiariser avec la notion de distance de Hausdorff.

Chacun des compacts K_0 suivants est l'attracteur d'un IFS Φ et on construit, pour un compact de départ A , les premières itérées $T^k(A)$ dont on sait qu'elles convergent au sens de la distance de Hausdorff vers K_0 .

- **L'ensemble triadique de Cantor**, que nous avons étudié à l'exemple 4.19. Il y était défini comme l'attracteur de l'IFS $\Phi = (f_1, f_2)$ défini sur \mathbb{R} par $f_1(x) = x/3$ et $f_2(x) = x/3 + 2/3$. Ici les premières images itérées de $A = [0, 1]$.



On peut également voir apparaître ce même Cantor $\mathcal{C}^{(1/3)} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ comme limite des images itérées d'un triangle par l'IFS $\Psi = (g_1, g_2)$ défini sur \mathbb{R}^2 par $g_1(x, y) = (x/3, y/3)$ et $g_2(x, y) = (x/3 + 2/3, y/3)$...



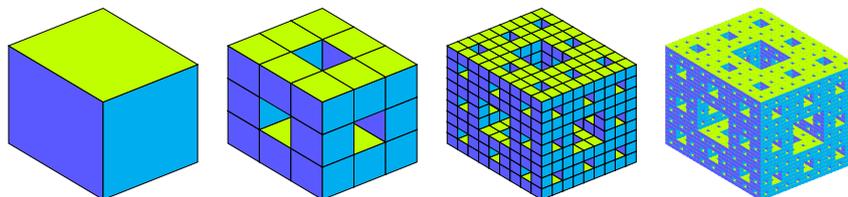
... ou encore comme attracteur d'un autre IFS que je vous laisse déterminer, pour lequel on a dessiné ci-dessous les premières images itérées d'un triangle :



- **Le triangle de Sierpinski**, pour lequel je vous demande de trouver plusieurs IFS dont il est l'attracteur :



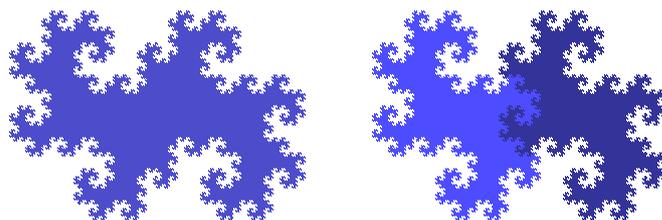
• **L'éponge de Menger**, attracteur (entre autres) d'une IFS associée à 20 homothéties de rapport $1/3$ que je vous laisse déterminer. Ici les quatre premières images itérées du cube unité.



• **Les dragons jumeaux** : c'est l'attracteur \mathcal{D} de l'IFS $\Phi = (f_1, f_2)$ défini sur \mathbb{C} par $f_1(z) = z/\alpha$ et $f_2(z) = 1 + z/\alpha$, avec $\alpha = (1 + i)$.

Ces deux transformations sont des similitudes de rapport $1/\sqrt{2}$. Elles divisent donc l'aire par 2.

Le dragon \mathcal{D} est d'intérieur non vide. Cet ensemble auto-similaire, qui ressemble à s'y méprendre à un dragon, est représenté à gauche avec, à droite, sa décomposition $\mathcal{D} = f_1(\mathcal{D}) \cup f_2(\mathcal{D})$ en deux dragons jumeaux.



• **Une feuille** : attracteur \mathcal{F} de l'IFS $\Phi = (f_1, f_2)$ défini sur \mathbb{C} par

$$f_1(z) = \frac{4+i}{10}z + \frac{2}{5}, \quad f_2(z) = \frac{4+7i}{10}\bar{z} + \frac{5-2i}{10}.$$

L'une de ces transformations est une similitude directe, l'autre une similitude indirecte.



5. Mesures extérieures

APRÈS avoir rappelé succinctement les difficultés qui apparaissent lors de la construction de la mesure de Lebesgue, et comment celles-ci ont été contournées, nous expliquons comment construire des mesures extérieures. D'une mesure extérieure, on déduit alors une mesure.

Ces considérations seront illustrées une première fois dans le chapitre 6 avec la démonstration du théorème de représentation de Riesz-Markov. Nous ne sortirons alors pas encore du cadre, qui vous est familier, des mesures de Radon (celles qui servent à intégrer des fonctions).

Mais les mesures peuvent avoir un tout autre intérêt en mathématiques que d'intégrer des fonctions. Les mesures de Hausdorff, qui seront introduites au chapitre 7, ne serviront pas à faire du calcul intégral : définies sur un espace métrique, elles ne sont en général pas finies sur les compacts ! Leur intérêt réside ailleurs : elles nous mèneront en effet à la notion de dimension de Hausdorff.

A La mesure de Lebesgue

On sait nativement définir la longueur des intervalles de \mathbb{R} . On aimerait alors savoir “mesurer”, de façon cohérente, toutes les parties de \mathbb{R} . Le contre-exemple de Vitali affirme que ce n'est pas possible (au moins dans l'univers qui est le nôtre, où l'on accepte l'axiome du choix).

Rappel 5.1. *Il n'existe pas de mesure $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$ définie sur l'ensemble de toutes les parties de \mathbb{R} , qui soit invariante par translation, et telle que $m([0, 1]) = 1$.*

Alors, que fait-on ? On définit la mesure extérieure d'une partie $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ de \mathbb{R} en la recouvrant, de la façon la plus économique possible, par des unions dénombrables d'intervalles. En restriction aux parties “mesurables”, celles qui satisfont une propriété de cohérence (additivité) vis à vis de la mesure extérieure, celle-ci fournit une mesure sur \mathbb{R} : c'est la mesure de Lebesgue.

Ce qui suit est un cadre général dans lequel s'inscrit cette construction.

B Mesures extérieures

On commence par rappeler les définitions de base de théorie de la mesure.

Définition 5.2. Soit X un ensemble. Une tribu (ou σ -algèbre) sur X est une famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ de parties de X telle que :

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. \mathcal{A} est stable par passage au complémentaire
3. \mathcal{A} est stable par union dénombrables.

Les éléments de \mathcal{A} sont les parties mesurables de X .

Vous devez déjà connaître les exemples et propriétés suivantes, que nous rappelons sans démonstration.

Exemple 5.3. Soit X un ensemble.

- L'ensemble $\mathcal{P}(X)$ de toutes les parties de X est une tribu.
- Une intersection de tribus est une tribu.
- Pour une famille $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(X)$ de parties de X , il existe une plus petite tribu $\sigma(\mathcal{V})$ contenant \mathcal{V} , qu'on appelle la tribu engendrée par \mathcal{V} .
- Lorsque X est un espace métrique, la tribu borélienne $\mathcal{B}(X) = \text{Bor}(X)$ est la tribu sur X engendrée par les ouverts.

En général (lorsque l'espace X n'est pas dénombrable), la tribu $\mathcal{P}(X)$ de toutes les parties de X est bien trop grosse pour qu'on puisse en faire quoi que ce soit d'intéressant. Lorsque X est un espace métrique, il est naturel de demander que les ouverts (et donc les fermés) de X soient mesurables, ce qui mène à la notion de tribu borélienne. Les fonctions continues sur X sont alors mesurables pour la tribu borélienne.

Définition 5.4. Un espace mesurable (X, \mathcal{A}) est un espace muni d'une tribu.

Définition 5.5. Une mesure sur l'espace mesurable (X, \mathcal{A}) est une fonction $m : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ telle que

1. $m(\emptyset) = 0$
2. **σ -additivité :** si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille (finie ou) dénombrable de parties mesurables deux à deux disjointes, on a l'égalité :

$$m\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(A_n).$$

Notation 5.6. Lorsque les $(A_i)_{i \in I}$ sont des parties deux à deux disjointes, on note $\bigsqcup A_i$ leur réunion, le symbole \bigsqcup indiquant une réunion disjointe.

Définition 5.7. On dit que la mesure est finie lorsque $m(X) < \infty$, et que c'est une mesure de probabilité lorsque $m(X) = 1$.

Lorsque X est un espace métrique, une mesure borélienne sur X est une mesure $m : \text{Bor}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ définie sur la tribu borélienne.

Lorsque l'on cherche à construire une mesure sur un ensemble, c'est qu'on a une idée derrière la tête... et on veut imposer les valeurs que prend cette mesure sur une famille de parties. Par exemple, pour la mesure de Lebesgue, on veut que la mesure d'un intervalle soit sa longueur. Une autre exemple est celui de la mesure produit, pour laquelle la mesure d'un pavé (produit $A \times B$) doit être le produit des mesures de facteurs. On se rend compte assez vite qu'il n'est pas si facile de construire directement une mesure satisfaisant ces contraintes. La notion de mesure extérieure est bien plus souple.

Définition 5.8. Soit X un ensemble. Une mesure extérieure sur X est une fonction $m^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ telle que

1. $m^*(\emptyset) = 0$
2. **croissance** : Si $A \subset B$, alors $m^*(A) \leq m^*(B)$
3. **σ -sous-additivité** : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille finie ou dénombrable de parties de X , on a l'inégalité :

$$m^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} m^*(A_n).$$

Une mesure extérieure est définie sur l'ensemble de toutes les parties de X . Elle est plus facile à construire qu'une mesure, car la condition de σ -sous-additivité est bien moins contraignante que la σ -additivité. Pour une mesure, la σ -additivité implique la croissance.

La proposition suivante fournit un procédé systématique pour construire des mesures extérieures.

Proposition 5.9. Soit X un ensemble. On se donne une famille $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(X)$ de parties de X telle que $\emptyset \in \mathcal{V}$, et une fonction $\eta : \mathcal{V} \rightarrow [0, +\infty]$ telle $\eta(\emptyset) = 0$. On pose, pour toute partie $A \subset X$,

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \eta(V_i) \mid A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i, V_i \in \mathcal{V} \right\}.$$

Alors m^* est une mesure extérieure sur X .

Rappelons la convention $\inf \emptyset = +\infty$. En particulier, pour une partie $A \subset X$ qui ne peut pas être recouverte par une famille dénombrable de parties appartenant à \mathcal{V} , la mesure extérieure de A vérifie $m^*(A) = \infty$.

Avant de démontrer cette proposition, revenons sur la définition de la mesure extérieure de Lebesgue.

Exemple 5.10. La mesure extérieure de Lebesgue $\lambda_1^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$ est la mesure extérieure associée par cette construction à l'ensemble $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ constitué de tous les intervalles de \mathbb{R} , et à la fonction $\eta : \mathcal{V} \rightarrow [0, +\infty]$ qui à un intervalle associe sa longueur.

Rappelons en effet que la mesure extérieure de Lebesgue d'une partie $A \subset \mathbb{R}$ est l'infimum de la somme des longueurs d'une famille dénombrable d'intervalles ouverts recouvrant A .

Preuve de la proposition 5.9

Il est clair par définition que $m^*(\emptyset) = 0$, et que m^* est croissante. Il nous faut donc montrer la σ -sous-additivité.

On se donne une famille dénombrable $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X et on introduit $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} m^*(A_n) = \infty$, l'inégalité $m^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} m^*(A_n)$ est acquise.

Sinon, les mesures extérieures des A_n sont toutes finies. Fixons $\varepsilon > 0$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on choisit un recouvrement dénombrable $A_n \subset \cup_{i \in I_n} V_i$ de A_n par des parties $V_i \in \mathcal{V}$ appartenant à \mathcal{V} , et tel que

$$\sum_{i \in I_n} \eta(V_i) \leq m^*(A_n) + 2^{-n} \varepsilon.$$

La famille $(V_i, i \in \cup_{n \in \mathbb{N}} I_n)$ est alors un recouvrement dénombrable de A par des parties de \mathcal{V} . On a donc, par définition,

$$m^*(A) \leq \sum_{\cup I_n} \eta(V_i) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} m^*(A_n) + 2\varepsilon. \quad \square$$

C Des mesures extérieures aux mesures

A partir d'une mesure extérieure m^* nous construisons maintenant, par restriction à une famille convenable de parties, une vraie mesure m . Nous commençons par introduire la tribu sur laquelle cette mesure sera définie.

Définition 5.11. *Soit m^* une mesure extérieure sur un ensemble X . On dit qu'une partie $A \subset X$ est m^* -mesurable au sens de Carathéodory si elle découpe toute autre partie $E \subset X$ de façon cohérente par rapport à m^* , c'est-à-dire si elle vérifie*

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap {}^c A) \quad \text{pour tout } E \subset X.$$

Remarque 5.12. – Par sous-additivité de la mesure extérieure, l'inégalité $m^*(E) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap {}^c A)$ est satisfaite pour toutes parties $A, E \subset X$.

– Une partie $A \subset X$ de mesure extérieure nulle, i.e. avec $m^*(A) = 0$, est m^* -mesurable au sens de Carathéodory. On obtient en effet, pour une partie $E \subset X$, en invoquant la sous-additivité, puis l'hypothèse et la croissance de m^* , les inégalités

$$m^*(E) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap {}^c A) \leq 0 + m^*(E).$$

– Si la restriction de m^* à une tribu $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ est une mesure, on doit avoir l'égalité $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap {}^c A)$ pour tout couple de parties mesurables $A, E \in \mathcal{A}$.

Le théorème suivant permet d'associer une mesure à la donnée d'une mesure extérieure.

Théorème 5.13. Théorème de Carathéodory

Soient X un ensemble, et m^* une mesure extérieure sur X . Alors :

1. L'ensemble $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{m^*} \subset \mathcal{P}(X)$ des parties m^* -mesurables au sens de Carathéodory constitue une tribu.
2. La restriction $m = (m^*)|_{\mathcal{A}}$ de la mesure extérieure m^* aux parties de X qui sont m^* -mesurables au sens de Carathéodory est une mesure.

Pour alléger la rédaction, on se permettra de dire m^* -mesurable au lieu de m^* -mesurable au sens de Carathéodory. Pour deux parties A et E de X , on notera $E \setminus A = E \cap {}^c A$.

Preuve (1) \mathcal{A} est une tribu.

- Il est immédiat que $\emptyset \in \mathcal{A}$, et que \mathcal{A} est stable par complémentaire.
- Il nous reste à montrer que \mathcal{A} est stable par unions dénombrables. Soit donc $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une famille dénombrable de parties m^* -mesurables. On veut voir que $A = \cup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i$ est également m^* -mesurable. On teste donc sur une partie $E \subset X$.

En un premier temps, on utilise successivement le fait que chaque A_i est mesurable, ce qui va nous permettre de minorer $m^*(E)$. On obtient au bout de k étapes :

$$\begin{aligned} m^*(E) &= m^*(E \cap A_1) + m^*(E \setminus A_1) \\ &= m^*(E \cap A_1) + m^*((E \setminus A_1) \cap A_2) + m^*(E \setminus (A_1 \cup A_2)) \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{i=1}^k m^*((E \setminus \cup_{j=1}^{i-1} A_j) \cap A_i) + m^*(E \setminus \cup_{j=1}^k A_j). \end{aligned}$$

On veut ensuite faire tendre k vers ∞ . On commence par se préoccuper du dernier terme. En utilisant la croissance de m^* , on obtient pour tout $k \geq 1$ la minoration :

$$m^*(E) \geq \sum_{i=1}^k m^*((E \setminus \cup_{j=1}^{i-1} A_j) \cap A_i) + m^*(E \setminus \cup_{j \in \mathbb{N}^*} A_j).$$

On peut alors faire tendre k vers ∞ dans la somme, pour obtenir

$$m^*(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*((E \setminus \cup_{j=1}^{i-1} A_j) \cap A_i) + m^*(E \setminus \cup_{j \in \mathbb{N}^*} A_j). \quad (5.1)$$

En un deuxième temps, on va voir qu'on peut majorer $m^*(E)$ par la même quantité. En effet, on a bien sûr

$$E = (E \cap (\cup_{j \in \mathbb{N}^*} A_j)) \cup (E \setminus (\cup_{j \in \mathbb{N}^*} A_j)), \quad (5.2)$$

avec l'égalité

$$E \cap (\cup_{j \in \mathbb{N}^*} A_j) = (E \cap A_1) \sqcup ((E \setminus A_1) \cap A_2) \sqcup \dots \sqcup (E \setminus \cup_{j=1}^{i-1} A_j) \cap A_i \dots \quad (5.3)$$

(les unions sont disjointes, mais on ne s'en servira pas). Par sous-additivité de m^* il vient, en utilisant d'abord (5.2) puis (5.3), l'inégalité

$$m^*(E) \leq m^*(E \cap (\cup_{j \in \mathbb{N}^*} A_j)) + m^*(E \setminus (\cup_{j \in \mathbb{N}^*} A_j)) \quad (5.4)$$

$$\leq m^*((E \setminus \cup_{j=1}^{i-1} A_j) \cap A_i) + m^*(E \setminus (\cup_{j \in \mathbb{N}^*} A_j)) \quad (5.5)$$

En comparant (5.1) et (5.5), on voit qu'on a égalité dans toutes ces inégalités, et en particulier dans (5.4) ce qui achève la démonstration de (1).

(2) **La restriction de m^* à la tribu \mathcal{A} est une mesure.**

Puisque m^* est une mesure extérieure, on a $m^*(\emptyset) = 0$. Il nous reste à montrer la σ -additivité. Soit une famille dénombrable $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de parties deux à deux disjointes. Introduisons leur union, disjointe, $E = \sqcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i$ de sorte qu'on a les égalités

$$(E \setminus \cup_{j=1}^{i-1} A_j) \cap A_i = A_i \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}^*, \text{ et } E \setminus \cup_{j \in \mathbb{N}^*} A_j = \emptyset.$$

On a vu dans la preuve de (1) qu'on a égalité dans (5.4) et (5.5). Il suit que $m^*(\sqcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} m^*(A_i)$, ce qu'on voulait. \square

D Mesures extérieures métriques

Dans le paragraphe précédent, on a vu qu'il est facile de construire des mesures extérieures sur un ensemble X , puis que la restriction d'une mesure extérieure à la tribu \mathcal{A}_{m^*} des parties de X qui sont m^* -mesurables est une vraie mesure. Il y a quand même un petit souci ! Pour l'instant, rien ne nous dit que la tribu \mathcal{A}_{m^*} n'est pas ridiculement petite : en mettant les choses au pire, on pourrait avoir $\mathcal{A}_{m^*} = \{X, \emptyset\}$. Ce serait ballot...

Supposons que X soit un espace métrique. Il est alors naturel de vouloir que tous les boréliens de X soient m^* -mesurables. Le critère de Carathéodory 5.15 affirme que ce sera le cas, sous réserve que la mesure extérieure m^* soit métrique.

Définition 5.14. *Soit X un espace métrique. Soit m^* une mesure extérieure sur X . On dit que m^* est métrique si, pour toutes parties $A, B \subset X$ telles que $d(A, B) > 0$, on a l'égalité*

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B).$$

Une mesure doit être additive. Notamment la mesure d'une réunion de deux parties mesurables disjointes doit être égale à la somme des mesures de ces deux parties.

Soit une mesure extérieure définie sur un espace métrique. Demander que cette mesure extérieure soit métrique, c'est imposer que la mesure extérieure d'une réunion de deux parties qui sont "largement disjointes", c'est-à-dire à distance positive l'une de l'autre, soit égale à la somme des mesures extérieures de ces deux parties. Rappelons que la distance de deux parties A et B est

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

Théorème 5.15. Critère de Carathéodory

Soit m^ une mesure extérieure sur un espace métrique X . Supposons m^* métrique. Alors tous les boréliens de X sont m^* -mesurables au sens de Carathéodory.*

La conclusion est que la restriction de la mesure extérieure m^* à la tribu borélienne de X est maintenant une "vraie" mesure borélienne sur X .

Preuve On veut montrer que tout borélien est m^* -mesurable au sens de Carathéodory. L'ensemble des parties m^* -mesurables constituant une tribu (théorème 5.13), il nous suffit de montrer qu'une famille $\mathcal{F} \subset \text{Bor}(X)$ de parties boréliennes, suffisamment large pour engendrer la tribu borélienne, est constituée de parties m^* -mesurable. Nous choisirons naturellement de prendre pour \mathcal{F} l'ensemble des parties fermées de X . La propriété cruciale des fermés que nous utiliserons est qu'un point $x \in X$ appartient à un fermé F de X si et seulement si $d(x, F) = 0$. Nous sommes donc ramenés à montrer, pour un fermé $F \subset X$ et une partie $E \subset X$, l'inégalité

$$m^*(E \cap F) + m^*(E \setminus F) \leq m^*(E) \tag{5.6}$$

(rappelons que l'inégalité inverse découle de la sous-additivité de m^*).

- Si $m^*(E) = \infty$, c'est trivial. On supposera donc $m^*(E) < \infty$.

• On veut pouvoir utiliser le fait que m^* est métrique, mais il n'y a pas de raison que $E \cap F$ et $E \setminus F$ soient à distance strictement positive l'un de l'autre. On introduit donc, pour tout $n \geq 1$, les parties

$$\begin{aligned} A_n &= \{x \in X \mid d(x, F) \geq 1/n\} \\ B_n &= \{x \in X \mid 0 < d(x, F) < 1/n\}, \end{aligned}$$

de sorte que, la partie F étant fermée, on a

$$E \setminus F = \{x \in E \mid d(x, F) > 0\} = (E \cap A_n) \sqcup (E \cap B_n).$$

On utilise successivement la croissance de m^* , puis le fait que m^* est métrique avec $d(A_n, F) > 0$, pour obtenir :

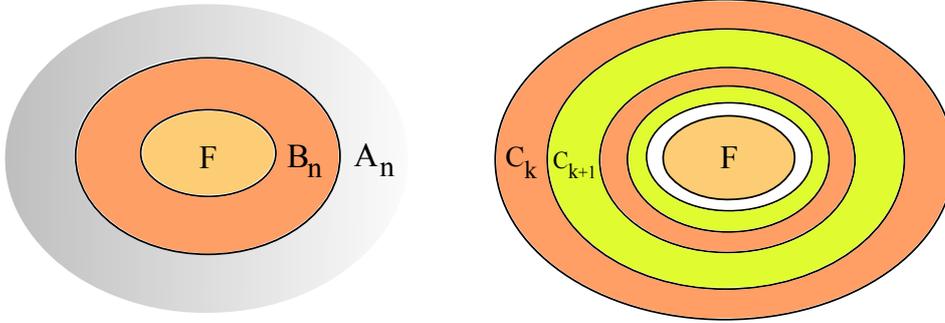
$$m^*(E) \geq m^*(E \cap (F \cup A_n)) = m^*(E \cap F) + m^*(E \cap A_n). \quad (5.7)$$

La famille $(E \cap A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, donc la suite $(m^*(E \cap A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ l'est également. On va voir que $\lim_{n \rightarrow \infty} m^*(E \cap A_n) \geq m^*(E \setminus F)$ (on aura alors en fait égalité par croissance de m^*), ce qui démontrera (5.6) en passant à la limite dans (5.7).

- Puisque $E \setminus F = (E \cap A_n) \sqcup (E \cap B_n)$, la sous-additivité de m^* donne

$$m^*(E \setminus F) \leq m^*(E \cap A_n) + m^*(E \cap B_n). \quad (5.8)$$

Nous allons montrer que $\lim m^*(E \cap B_n) = 0$. Il en suivra l'inégalité voulue $m^*(E \setminus F) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} m^*(E \cap A_n)$, et la démonstration sera terminée.



Pour cela, on va de nouveau utiliser le fait que la mesure extérieure m^* est métrique. On découpe $E \setminus F$ en la réunion disjointe des couronnes définies, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, par

$$C_k = \left\{ x \in E \mid \frac{1}{k+1} \leq d(x, F) < \frac{1}{k} \right\}.$$

Deux couronnes non consécutives sont à distance strictement positive l'une de l'autre. Puisque m^* est supposée métrique il vient donc, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^N m^*(C_{2k}) = m^*(\cup_{k=0}^N C_{2k}) \leq m^*(E \setminus F) < \infty$$

et de même $\sum_{k=0}^N m^*(C_{2k+1}) < \infty$.

Ainsi, la série $\sum_{k=0}^{\infty} m^*(C_k)$ est convergente, et son reste tend donc vers 0. On en déduit, par σ -sous-additivité de m^* , que

$$m^*(B_n) = m^*(\cup_{k=n}^{\infty} C_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} m^*(C_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad \square$$

Le critère de Carathéodory est en fait une équivalence.

Exercice 5.16. Soient X un espace métrique et m^* une mesure extérieure sur X . Alors les boréliens de X sont m^* -mesurables au sens de Carathéodory si et seulement si m^* est métrique.

Le premier exemple à considérer est bien sûr celui de la mesure de Lebesgue.

Exemple 5.17. Construction de la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}

Je vous laisse vérifier que la mesure extérieure de Lebesgue λ_1^* sur \mathbb{R} introduite à l'exemple 5.10 est métrique. Il lui est donc associé une mesure borélienne λ_1 . Nous allons voir que λ_1 est la mesure de Lebesgue.

En effet, la mesure extérieure λ_1^* étant invariante par translations, la mesure borélienne λ_1 est également invariante par translation.

Il reste à vérifier que $\lambda_1([0, 1]) = 1$ ou, plus généralement, que la mesure $\lambda_1(I)$ de tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est égale à sa longueur. Cela résulte de l'exercice suivant.

Exercice 5.18. Montrer (sans utiliser les propriétés de la mesure de Lebesgue!) que, si l'intervalle fermé $[c, d]$ est recouvert par une famille dénombrable d'intervalles ouverts $[c, d] \subset \cup_{n \in \mathbb{N}}]\alpha_n, \beta_n[$, on a l'inégalité $d - c < \sum_{n \in \mathbb{N}} (\beta_n - \alpha_n)$.

Indication : On peut supposer $[c, d]$ recouvert par N intervalles ouverts $]\alpha_n, \beta_n[$ ($1 \leq n \leq N$), avec $c \in]\alpha_1, \beta_1[$. On raisonne par récurrence sur N en notant que, si $\beta_1 < d$, on a $[\beta_1, d] \subset \cup_{n=2}^N]\alpha_n, \beta_n[$.

6. Le théorème de Riesz-Markov

SOMME annoncé, nous exploitons maintenant les outils développés au chapitre 5 pour démontrer le théorème de représentation de Riesz-Markov. Ce théorème décrit les formes linéaires positives sur l'espace vectoriel normé $(C^0(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, où X est un espace métrique compact. La description du dual continu de $C^0(X, \mathbb{R})$ s'en déduit, et sera présentée sous forme d'un problème.

Dans tout ce chapitre, X désignera un espace métrique compact.

L'espace vectoriel $C^0(X) = C^0(X, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur X à valeurs réelles sera muni de la norme sup définie pour toute $f \in C^0(X)$ par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ (norme de la convergence uniforme).

A Formes linéaires positives sur $C^0(X)$

Définition 6.1. Une forme linéaire $T : C^0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ est positive si, pour toute fonction continue $f \geq 0$ sur X à valeurs positives, on a $T(f) \geq 0$.

Attention, bien lire la définition ! Parler de forme linéaire positive n'a de sens que sur un espace de fonctions, en l'occurrence $C^0(X)$, et pas sur un espace vectoriel réel quelconque. On a en effet la propriété très élémentaire suivante.

Exercice 6.2. Soit $T : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire sur un espace vectoriel réel. On suppose que T n'est pas identiquement nulle. Alors $T(E) = \mathbb{R}$ (et donc T change de signe!).

Les formes linéaires positives sur $C^0(X)$ sont automatiquement continues.

Lemme 6.3. Une forme linéaire positive $T : C^0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur l'espace $C^0(X)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Preuve Notons $\mathbf{1} : X \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction constante égale à 1. Soit $f \in C^0(X)$. On a

$$-\|f\|_\infty \mathbf{1} \leq f \leq \|f\|_\infty \mathbf{1}$$

et donc, par positivité de T , la majoration $|T(f)| \leq T(\mathbf{1}) \|f\|_\infty$. \square

Il est facile de donner des exemples de formes linéaires positives sur $C^0(X)$.

Exemple 6.4. Soit m une mesure borélienne finie sur l'espace métrique compact X . L'application

$$T_m : f \in C^0(X) \longrightarrow \int_X f dm \in \mathbb{R} \quad (6.1)$$

est une forme linéaire positive.

Le théorème de représentation de Riesz-Markov affirme que toutes les formes linéaires positives sur $C^0(X)$ sont obtenues ainsi.

Théorème 6.5. Théorème de représentation de Riesz-Markov (positif)

Soient X un espace métrique compact, et $T : C^0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire positive. Il existe une unique mesure borélienne finie sur X pour laquelle $T = T_m$, c'est-à-dire telle que

$$T(f) = \int_X f dm$$

pour toute $f \in C^0(X)$. De plus, on a l'égalité $m(X) = T(\mathbf{1})$ (où $\mathbf{1} : X \rightarrow \mathbb{R}$ désigne la fonction constante égale à 1).

On a "représenté" la forme linéaire positive T par la mesure m .

Remarque 6.6. De même, dans le théorème de représentation de Riesz pour un espace de Hilbert H , on représente une forme linéaire continue sur H par un vecteur de H .

Voir également le théorème de Riesz-Markov 6.22 qui représentera toutes les formes linéaires continues sur l'espace $C^0(X)$, pour X métrique compact, par une mesure signée.

Exemple 6.7. Soit $x_0 \in X$. L'application d'évaluation au point x_0 , soit $e_{x_0} : f \in C^0(X) \mapsto f(x_0) \in \mathbb{R}$, est une forme linéaire positive. Elle est associée à la masse de Dirac $m = \delta_{x_0}$.

Le théorème de Riesz-Markov donne une seconde présentation de la construction de la mesure de Lebesgue (la première ayant été évoquée en 5.17).

Exemple 6.8. La mesure de Lebesgue

Soit X un intervalle compact, par exemple $X = [0, 1]$. L'intégrale de Riemann $\mathcal{R} : f \in C^0(X) \mapsto \int_0^1 f(t) dt \in \mathbb{R}$ est une forme linéaire positive. Elle est donc associée à une mesure borélienne m sur l'intervalle $[0, 1]$. La mesure m n'est autre que la restriction à l'intervalle $[0, 1]$ de la mesure de Lebesgue.

L'énoncé du théorème de Riesz-Markov fait intervenir de la topologie (puisque l'on parle de fonctions continues sur X , et que l'espace métrique X est supposé compact) ainsi que des mesures. Sans surprise, sa démonstration va nécessiter quelques préliminaires topologiques (paragraphe B) ainsi que de théorie de la mesure (paragraphe C).

B Un peu de topologie

Dans ce paragraphe, l'espace métrique X n'est pas supposé compact.

Définition 6.9. *Le support d'une fonction continue $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est le fermé de X défini par*

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Lemme 6.10. d'Urysohn

Soit X un espace métrique. Soient $K \subset V \subset X$ avec K compact, et V ouvert. Il existe une fonction continue $f \in C^0(X)$ telle que $0 \leq f \leq 1$ et qui satisfait $f \equiv 1$ sur K et $\text{supp } f \subset V$. On notera alors $K \prec f \prec V$.

Remarque 6.11. La condition $\text{supp } f \subset V$ est plus forte que de demander que f soit nulle sur le complémentaire cV .

Rappelons que la distance $d(x, F)$ d'un point à un fermé est nulle si et seulement si $x \in F$.

Preuve Si l'ouvert V est égal à X , il suffit de prendre $f \equiv 1$.

Sinon, la fonction $x \in K \mapsto d(x, {}^cV) \in [0, +\infty[$ est continue, et elle ne s'annule pas puisque K ne rencontre pas le fermé cV . Cette fonction, qui est continue sur le compact K , atteint donc son minimum. Il suit que la distance $\delta = d(K, {}^cV) > 0$ est strictement positive. On considère alors le $\delta/2$ -voisinage ouvert de K , soit

$$W = \{x \in X \mid d(x, K) < \delta/2\}.$$

Par construction, on a les inclusions $K \subset W \subset \overline{W} \subset V$. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{d(x, {}^cW)}{d(x, K) + d(x, {}^cW)}.$$

Cette fonction est bien définie puisque $K \cap {}^cW = \emptyset$, elle est continue et prend ses valeurs dans $[0, 1]$. On a $f(x) = 0$ lorsque $x \in {}^cW$ donc $\text{supp } f = \overline{W} \subset V$. Enfin, $f(x) = 1$ lorsque $x \in K$. \square

Les partitions de l'unité fournissent un outil permettant de localiser un problème, ou une construction. Sur un espace métrique, comme ici, on considérera des partitions de l'unité continues. Sur une variété, on sera intéressés par des partitions de l'unité C^∞ .

Corollaire 6.12. Partition de l'unité

Soit X un espace métrique. Soient $K \subset X$ un compact, et V_1, \dots, V_n une famille d'ouverts de X recouvrant K . Il existe des fonctions continues $g_1, \dots, g_n \in C^0(X)$ telles que $0 \leq g_i \leq 1$ pour $1 \leq i \leq n$, de supports $\text{supp } g_i \subset V_i$ et telles que $\sum_{i=1}^n g_i(x) = 1$ pour tout $x \in K$.

La preuve repose sur le lemme d'Urysohn ainsi que sur le lemme suivant, qui se démontre par récurrence.

Lemme 6.13. *Soient f_1, \dots, f_n des nombres réels (ou bien des fonctions à valeurs réelles). On introduit $g_1 = f_1$ et $g_i = f_i \prod_{j=1}^{i-1} (1 - f_j)$ pour $2 \leq i \leq n$. On a l'égalité*

$$\sum_{i=1}^n g_i = 1 - (1 - f_1) \cdots (1 - f_n).$$

De plus, si toutes les f_i sont à valeurs dans $[0, 1]$, il en va de même pour les g_i . Si il existe un indice i_0 tel que $f_{i_0} = 1$, alors $\sum_{i=1}^n g_i = 1$.

Preuve du corollaire 6.12

Avant de découper en morceaux la fonction constante égale à 1 (sur K), on découpe le compact K en morceaux. Plus précisément on va écrire $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$ où chaque K_i est compact et $K_i \subset V_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

Pour ce faire on choisit pour chaque point $x \in K$ un rayon $r(x) > 0$ et un indice $1 \leq i_x \leq n$ tels que la boule fermée $B_f(x, r(x))$ soit incluse dans l'ouvert V_{i_x} . Du recouvrement ouvert de K par les boules ouvertes $B(x, r(x))$ correspondantes, on extrait un recouvrement fini, soit $K \subset \cup_{j \in J} B(x_j, r_j)$. Il suffit alors de poser, pour chaque $1 \leq i \leq n$,

$$K_i = K \cap \left(\cup_{j \in A_i} B_f(x_j, r_j) \right) \subset V_i \text{ où } A_i = \{1 \leq j \leq n, B_f(x_j, r_j) \subset V_i\}.$$

Le lemme d'Urysohn fournit, pour tout $1 \leq i \leq n$, une fonction $f \in C^0(X)$ telle que $K_i \prec f_i \prec V_i$ et $0 \leq f_i \leq 1$.

On associe alors à ces fonctions f_i les fonctions $g_i \in C^0(X)$ du lemme 6.13. Ces fonctions vérifient $0 \leq g_i \leq 1$, et $\text{supp } g_i \subset V_i$. De plus, chaque point $x \in K$ appartient à l'un des compacts K_{i_0} , donc $f_{i_0}(x) = 1$ et $\sum_{i=1}^n g_i(x) = 1$. \square

C Régularité des mesures

Dans ce paragraphe, on va voir qu'une mesure borélienne finie sur un espace métrique compact X est déterminée par les valeurs qu'elle prend, au choix, sur les compacts ou bien sur les ouverts de X . Ce sera un ingrédient crucial dans la démonstration du théorème de Riesz-Markov 6.5.

Définition 6.14. *Soit X un espace métrique. Une mesure borélienne m sur X est régulière si on a, pour tout borélien $B \in \text{Bor}(X)$, les égalités :*

$$m(B) = \sup\{m(K) \mid K \subset B, K \text{ compact}\} \quad (\text{Int})$$

$$= \inf\{m(V) \mid B \subset V, V \text{ ouvert}\} \quad (\text{Ext})$$

La première ligne (Int) exprime la régularité intérieure de m , la seconde (Ext) exprime la régularité extérieure.

Exemple 6.15. La mesure comptage sur \mathbb{R}^n ne vérifie pas la condition (Ext).

Proposition 6.16. Soient X un espace métrique compact, et m une mesure borélienne finie sur X . Alors, m est une mesure régulière.

Dans notre espace mesuré (X, m) tout borélien s'approche donc, au sens de la mesure m , par des compacts plus petits, et par des ouverts plus grands.

Preuve On introduit l'ensemble $\mathcal{C} \subset \text{Bor}(X)$ des boréliens de X qui satisfont les deux propriétés (Int) et (Ext). On veut voir que $\mathcal{C} = \text{Bor}(X)$. Pour cela, on va voir que \mathcal{C} est une tribu, et qu'elle contient les ouverts de X .

- Il est immédiat que $\emptyset \in \mathcal{C}$. Soit alors $V \subset X$ un ouvert non vide. Il satisfait trivialement (Ext). Montrons qu'il satisfait (Int). On a bien sûr $m(V) \geq \sup\{m(K) \mid K \subset V, K \text{ compact}\}$. Pour montrer l'égalité, on écrit V comme la réunion dénombrable croissante $V = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n$, où les compacts K_n sont définis par

$$K_n = \{x \in X \mid d(x, {}^cV) \geq 1/n\}.$$

Le petit théorème de convergence monotone assure que

$$m(V) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} m(K_n) = \lim_{n \in \mathbb{N}^*} m(K_n).$$

- Montrons maintenant que \mathcal{C} est une tribu. On a déjà $\emptyset \in \mathcal{C}$.

Soit $A \in \mathcal{C}$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe donc un compact K et un ouvert V tels que $K \subset A \subset V$ et pour lesquels $m(V \setminus K) < \varepsilon$. Par passage au complémentaire, on a donc ${}^cV \subset {}^cA \subset {}^cK$, avec cV compact et cK ouvert, et ${}^cK \setminus {}^cV = V \setminus K$ de mesure au plus ε . Il suit que \mathcal{C} est stable par complémentaire.

Soit maintenant une famille dénombrable $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{C} . Soient $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, et un réel $\varepsilon > 0$. Il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un compact K_n et un ouvert V_n avec $K_n \subset A_n \subset V_n$ et pour lesquels $m(V_n \setminus K_n) < 2^{-n}\varepsilon$.

Introduisons $V = \cup_{n \in \mathbb{N}} V_n$: c'est un ouvert qui contient A . La réunion infinie $L = \cup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ n'est peut-être pas compacte. Pour $N \in \mathbb{N}$, introduisons le compact $L_N = \cup_{n=0}^N K_n \subset L$. Le petit théorème de convergence monotone assure que $\lim_{N \rightarrow \infty} m(L_N) = m(L)$. Puisque

$$m(V \setminus L) = m(\cup_{n \in \mathbb{N}} V_n \setminus \cup_{n \in \mathbb{N}} K_n) \leq m(\cup_{n \in \mathbb{N}} (V_n \setminus K_n)) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n}\varepsilon \leq 2\varepsilon$$

il suit que, si N a été choisi assez grand de sorte que $m(L_N) \geq m(L) - \varepsilon$, on a $L_N \subset A \subset V$ avec L_N compact, V ouvert, et $m(V \setminus L_N) < 3\varepsilon$.

Nous avons montré que \mathcal{C} est également stable par unions dénombrables : c'est donc bien une tribu. \square

D Mesures boréliennes et fonctions continues

On vient de voir que, pour connaître une mesure borélienne finie m sur notre espace compact X , il suffit de la connaître sur les ouverts.

On va en déduire que la mesure m est connue dès lors qu'on connaît l'intégrale, pour cette mesure, de chaque fonction continue sur X . Pour cela, nous devons être capables de "bien" approcher la fonction indicatrice $\mathbb{1}_V$ d'un ouvert par des fonctions continues. Ceci résultera du lemme d'Urysohn.

Proposition 6.17. Mesure versus intégrale des fonctions continues

Soit X un espace métrique compact et m une mesure borélienne finie sur X . On a, pour tout ouvert $V \subset X$, l'égalité

$$m(V) = \sup\left\{\int_X f \, dm \mid f \in C^0(X), 0 \leq f \leq 1, \text{supp } f \subset V\right\}. \quad (6.2)$$

Preuve Soit V un ouvert de X . Pour f comme dans l'énoncé, la croissance de l'intégrale montre que $\int_X f \, dm \leq \int_X \mathbb{1}_V \, dm = m(V)$.

Montrons l'inégalité inverse. Soit $\varepsilon > 0$. La régularité intérieure de m assure qu'il existe un compact $K \subset V$ tel que $m(V \setminus K) < \varepsilon$. Le lemme d'Urysohn 6.10 produit une fonction $f \in C^0(X)$ avec $K \prec f \prec V$, et donc pour laquelle $\int_X f \, dm \geq m(K) \geq m(V) - \varepsilon$. \square

Corollaire 6.18. Unicité dans le théorème de Riesz-Markov positif

Soient X un espace métrique compact, et m_1, m_2 deux mesures boréliennes finies sur X . Si m_1 et m_2 représentent la même forme linéaire positive T sur $C^0(X)$, alors $m_1 = m_2$.

Preuve Si m_1 et m_2 représentent T , alors on a l'égalité

$$\int_X f \, dm_1 = \int_X f \, dm_2 = T(f)$$

pour toute fonction continue $f \in C^0(X)$. La proposition 6.17 assure alors que m_1 et m_2 prennent la même valeurs sur les ouverts. La régularité de ces mesures (proposition 6.16) assure alors l'égalité $m_1 = m_2$. \square

E Preuve du théorème de Riesz-Markov positif

Ebauche de preuve

Soit T une forme linéaire positive sur $C^0(X)$, où X est un espace métrique compact. On cherche à construire une mesure borélienne m finie sur X pour laquelle $T(f) = \int_X f \, dm$ pour toute fonction continue $f \in C^0(X)$. Si m est une telle mesure, l'égalité (6.2) indique que cette mesure doit satisfaire, pour tout ouvert $V \subset X$, l'égalité

$$m(V) = \sup\{T(f) \mid f \in C^0(X), 0 \leq f \leq 1, \text{supp } f \subset V\}. \quad (6.3)$$

On commence donc par construire une mesure extérieure m^* qui prend la bonne valeur, dictée par (6.3), sur les ouverts (lemme 6.19). On montre alors que la mesure extérieure m^* est métrique : la mesure m associée à m^* par le théorème de Carathéodory est donc une mesure borélienne finie sur X (proposition 6.20). Enfin, on vérifie que m représente effectivement T (proposition 6.21). Passons maintenant à la preuve détaillée.

▷ La première étape consiste à appliquer la construction de la proposition 5.9 à la famille $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(X)$ constituée des ouverts de X , et à l'application $\eta : \mathcal{V} \rightarrow [0, +\infty[$ définie pour tout ouvert $V \subset X$ par :

$$\eta(V) = \sup\{T(f) \mid f \in C^0(X), 0 \leq f \leq 1, \text{supp } f \subset V\} \quad (6.4)$$

pour construire une mesure extérieure m^* sur X .

Puisque $\eta(\emptyset) = 0$, cette construction fournit effectivement une mesure extérieure $m^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty[$, définie pour toute partie $A \subset X$ par

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \eta(V_i) \mid A \subset \cup_{i \in \mathbb{N}} V_i, V_i \in \mathcal{V} \right\}. \quad (6.5)$$

Lorsque $V \subset X$ est ouvert, on a donc *a priori* seulement une inégalité $m^*(V) \leq \eta(V)$.

Lemme 6.19. (1) *On a l'égalité $m^*(V) = \eta(V)$ pour tout ouvert $V \subset X$. En particulier, on a $m^*(X) = T(\mathbf{1})$.*

(2) *On a, pour toute partie $A \subset X$, l'égalité*

$$m^*(A) = \inf\{\eta(V) \mid A \subset V, V \in \mathcal{V}\}.$$

Preuve (1) Soit V un ouvert. On a par construction $m^*(V) \leq \eta(V)$. On cherche donc à montrer l'inégalité inverse $\eta(V) \leq m^*(V)$. Soit donc une famille $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dénombrable d'ouverts telle que $V \subset \cup_{i \in \mathbb{N}} V_i$. On veut montrer la majoration $\eta(V) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \eta(V_i)$. En revenant à la définition (6.4) il faut montrer, pour toute fonction $f \in C^0(X)$ telle que $0 \leq f \leq 1$ et de support $\text{supp } f \subset V$, l'inégalité $T(f) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \eta(V_i)$.

Soient f une telle fonction, et $K = \text{supp } f \subset V$ son support. C'est un compact. Il est donc recouvert par une sous famille finie (V_1, \dots, V_n) des ouverts $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$. On introduit une partition de l'unité (g_1, \dots, g_n) associée au recouvrement ouvert $K \subset V_1 \cup \dots \cup V_n$ de ce compact. On obtient donc la décomposition $f = \sum_{i=1}^n f g_i$, où chaque fonction continue $f g_i$ vérifie l'encadrement $0 \leq f g_i \leq 1$, et où $\text{supp } (f g_i) \subset V_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

Le résultat annoncé suit, puisqu'on a en utilisant la linéarité de T et la définition de η :

$$T(f) = \sum_{i=1}^n T(f g_i) \leq \sum_{i=1}^n \eta(V_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \eta(V_i).$$

(2) Soit $A \subset \cup_{i \in \mathbb{N}} V_i$, où les $V_i \in \mathcal{V}$ sont des ouverts. On introduit l'ouvert $V = \cup_{i \in \mathbb{N}} V_i$, de sorte que $A \subset V$. On a montré en (1) qu'on a l'inégalité $\eta(V) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \eta(V_i)$. Le résultat suit de la définition de m^* . \square

▷ On vérifie ensuite que la mesure m associée à m^* est borélienne.

Proposition 6.20. (1) *La mesure extérieure m^* est métrique.*

(2) *La mesure m associée est une mesure borélienne finie sur X , telle que $m(X) = T(\mathbf{1})$. Elle vérifie la propriété (6.3) pour tout ouvert $V \subset X$.*

Preuve • Supposons démontrée l'assertion (1). L'assertion (2) suit alors du lemme 6.19 (1) et de la définition (6.4) de η .

• Démontrons donc (1). Il s'agit de voir que m^* est métrique.

Etape 1 : On commence par s'intéresser à des ouverts, sur lesquels les valeurs de η et de m^* coïncident (lemme 6.19 (1)). Soient donc deux ouverts V_1, V_2 tels que $d(V_1, V_2) > 0$. On a alors $m^*(V_i) = \eta(V_i)$. Si $f_i \in C^0(X)$ vérifie $0 \leq f_i \leq 1$ et $\text{supp } f_i \subset V_i$ pour $i = 1, 2$, la somme $f = f_1 + f_2 \in C^0(X)$ vérifie $0 \leq f \leq 1$ et $\text{supp } f \subset V_1 \cup V_2$. En utilisant la linéarité de T , la définition de η , puis la définition de m^* pour l'ouvert $V_1 \cup V_2$, on obtient

$$T(f_1) + T(f_2) = T(f) \leq \eta(V_1 \cup V_2) = m^*(V_1 \cup V_2).$$

En passant au sup en f_1 et f_2 , obtient $m^*(V_1) + m^*(V_2) \leq m^*(V_1 \cup V_2)$, et l'égalité suit (toute mesure extérieure étant sous-additive).

Etape 2 : Soient maintenant deux parties quelconques A_1 et A_2 telles que $\delta := d(A_1, A_2) > 0$. On les isole par leurs $\delta/3$ -voisinages ouverts respectifs $W_i = \mathcal{V}_{\delta/3}(A_i)$. On a $d(W_1, W_2) \geq \delta/3$.

Soit V un ouvert tel que $A_1 \cup A_2 \subset V$. On a donc $A_1 \cup A_2 \subset V \cap (W_1 \cup W_2)$, où les deux ouverts $V \cap W_1$ et $V \cap W_2$ sont à distance strictement positive l'un de l'autre. En utilisant la croissance de m^* et la première étape, on obtient

$$\begin{aligned} m^*(V) &\geq m^*(V \cap (W_1 \cup W_2)) \\ &= m^*(V \cap W_1) + m^*(V \cap W_2) \geq m^*(A_1) + m^*(A_2). \end{aligned}$$

Le lemme 6.19(2) assure alors, en passant à l'inf sur les ouverts V contenant $A_1 \cup A_2$, la minoration $m^*(A) \geq m^*(A_1 \cup A_2)$. L'égalité suit car m^* , comme toute mesure extérieure, est sous-additive. \square

▷ Nous avons maintenant construit l'unique mesure borélienne finie sur X qui est candidate à représenter la forme linéaire positive T . Il reste à vérifier que cette mesure convient effectivement.

Proposition 6.21. *Soit m la mesure borélienne finie sur X construite à la proposition 6.20. Elle représente T .*

Preuve On veut montrer, pour toute fonction continue $f \in C^0(X)$, l'égalité $T(f) = I(f)$, où l'on note $I(f) = \int_X f dm$.

On commence par une petite réduction, qui ne change pas la face du monde, mais qui nous simplifiera la vie. Par linéarité de T et de I , on observe qu'il suffit de montrer l'inégalité $T(f) \leq I(f)$ pour toute $f \in C^0(X)$. Puisque $T(\mathbf{1}) = m(X) = I(\mathbf{1})$, il suffit même de montrer l'inégalité $T(f) \leq I(f)$ pour toute $f \in C^0(X)$ telle que $0 \leq f \leq 1$, ce que nous allons faire.

On se donne donc $f \in C^0(X)$ telle que $0 \leq f \leq 1$, et un entier $n \in \mathbb{N}$.

• *Minoration de $I(f)$:*

On approche ici f par des fonctions étagées. On pose $A_0 = \{f = 0\}$ et $A_k = \{\frac{k-1}{n} < f \leq \frac{k}{n}\}$ pour $1 \leq k \leq n$ (de sorte que f est pratiquement constante sur chaque A_k lorsque n est grand).

Puisqu'on a une union disjointe $X = \sqcup_{k=0}^n A_k$, il suit que

$$I(f) = \int f dm = \sum_{k=0}^n \int_{A_k} f dm \geq \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n} m(A_k).$$

On notera que, pour n grand, le choix des A_k assure que la minoration ainsi obtenue n'est pas loin d'être une égalité.

• *Majoration de $T(f)$:*

La majoration est plus délicate à obtenir car, T s'appliquant aux seules fonctions continues, il nous faut maintenant décomposer f en une somme de fonctions continues (alors que pour la minoration on pouvait se permettre de tronquer f par des fonctions indicatrices de parties mesurables). Mais nous savons le faire, grâce aux partitions de l'unité (corollaire 6.12).

Soit $\varepsilon > 0$. La mesure m étant régulière, il existe pour chaque $0 \leq k \leq n$ un ouvert W_k contenant A_k et tel que $m(W_k \setminus A_k) \leq \varepsilon$. Si on réduit l'ouvert W_k en introduisant $V_k = W_k \cap \{\frac{k-1}{n} < f < \frac{k+1}{n}\}$, on obtient un ouvert V_k qui contient encore A_k et tel que $m(V_k \setminus A_k) \leq \varepsilon$, et sur lequel f est encore pratiquement constante.

Introduisons g_0, \dots, g_n une partition de l'unité associée au recouvrement ouvert $X = V_0 \cup \dots \cup V_n$.

On a alors $f = \sum_{k=0}^n f g_k$. Ainsi, par linéarité de T , puis en appliquant (6.3) à chaque ouvert V_k et enfin en revenant à la définition de V_k (ou W_k) :

$$\begin{aligned} T(f) &= \sum_{k=0}^n T(f g_k) \leq \sum_{k=0}^n \frac{k+1}{n} m(V_k) \leq \sum_{k=0}^n \frac{k+1}{n} (m(A_k) + \varepsilon) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n} m(A_k) + \frac{1}{n} m(V_0) + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n m(A_k) + c(n)\varepsilon, \end{aligned}$$

où $c(n) = \sum_{k=0}^n \frac{k+1}{n}$ est une constante qui ne dépend que de n .

• Puisque $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une partition de X , on a $m(X) = \sum_{k=0}^n \frac{k-1}{n} m(A_k)$. Nous déduisons donc des deux estimations précédentes, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $\varepsilon > 0$, l'inégalité

$$T(f) \leq I(f) + \frac{3}{n} m(X) + c(n) \varepsilon.$$

Il vient finalement $T(f) \leq I(f)$, ce qui conclut la démonstration. \square

F Le théorème de représentation de Riesz-Markov

Nous venons de montrer le résultat suivant.

Théorème. 6.5 Représentation des formes linéaires positives sur $C^0(X, \mathbb{R})$ lorsque X est compact.

Soient X un espace métrique compact et $T : C^0(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire positive. Alors :

- *la forme linéaire $T : (C^0(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue,*
- *il existe une unique mesure borélienne finie sur X telle que $T(f) = \int_X f dm$ pour toute $f \in C^0(X, \mathbb{R})$. De plus, $\|T\| = T(1) = m(X)$.*

Un autre théorème permet de représenter les formes linéaires continues sur $C^0(X, \mathbb{R})$ par des mesures signées, et les formes linéaires continues sur $C^0(X, \mathbb{C})$ par des mesures complexes. Dans le cas réel, on peut l'énoncer comme suit (une preuve est proposée ci-dessous en exercice).

Théorème 6.22. Représentation des formes linéaires continues sur $C^0(X, \mathbb{R})$ lorsque X est compact.

Soient X un espace métrique compact et $T : (C^0(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue : c'est ce qu'on appelle une "mesure de Radon". Alors il existe un unique couple m_1, m_2 de mesures boréliennes finies sur X telles que :

- *pour toute $f \in C^0(X, \mathbb{R})$, on a $T(f) = \int_X f dm_1 - \int_X f dm_2$*
- *la décomposition ci-dessus est minimale, c'est-à-dire qu'on a l'égalité $\|T\| = m_1(X) + m_2(X)$.*

Puisqu'il est quand même bien utile de savoir travailler dans \mathbb{R}^d , et pas seulement sur des espaces compacts... signalons que ces théorèmes de représentation peuvent être généralisés :

- aux formes linéaires positives sur l'espace $C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact (représentation par une mesure borélienne prenant des valeurs finies sur les compacts de \mathbb{R}^d)
- aux formes linéaires continues sur l'espace $(C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ (représentation par la différence de deux mesures boréliennes finies sur \mathbb{R}^d).

On notera qu'une forme linéaire positive sur $C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ n'est plus forcément continue. Les démonstrations sont semblables, mais avec quelques points techniques supplémentaires.

Exercice 6.23. Preuve du théorème 6.22

Soit X un espace métrique compact. On munit l'espace $C^0(X, \mathbb{R})$ de la norme sup. Soit L une forme linéaire continue sur $C^0(X, \mathbb{R})$. On va montrer qu'il existe deux formes linéaires positives (donc continues) $T_1, T_2 : C^0(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $L = T_1 - T_2$ et $\|L\| = T_1(1) + T_2(1)$.

D'après le théorème de représentation de Riesz-Markov positif, cela revient à dire qu'il existe deux mesures boréliennes finies m_1 et m_2 sur X telles que

- $L(f) = \int_X f dm_1 - \int_X f dm_2$ pour toute $f \in C^0(X, \mathbb{R})$
- $\|L\| = m_1(X) + m_2(X)$

1. DÉFINITION DE T_1 SUR LES FONCTIONS POSITIVES.

Pour $f \in C^0(X, \mathbb{R})$ avec $f \geq 0$, on pose

$$T_1(f) = \sup\{L(\psi) \mid \psi \in C^0(X, \mathbb{R}), 0 \leq \psi \leq f\}.$$

- (a) Montrer que T_1 est à valeurs finies.
- (b) Soient $f, g \in C^0(X, \mathbb{R})$ avec $0 \leq f, g$ et une constante $c \geq 0$.
 - i. Montrer que $T_1(cf) = cT_1(f)$.
 - ii. Montrer que $T_1(f + g) \geq T_1(f) + T_1(g)$.
 - iii. Montrer enfin l'égalité $T_1(f + g) = T_1(f) + T_1(g)$. On pourra introduire, pour toute fonction continue ψ telle que $0 \leq \psi \leq f + g$, les fonctions $\psi_1 := \min(\psi, f)$ et $\psi_2 := \psi - \psi_1$ et remarquer que $0 \leq \psi_1 \leq f$ et $0 \leq \psi_2 \leq g$.

2. LA FORME LINÉAIRE T_1 .

- (a) Soient $f \in C^0(X, \mathbb{R})$ et deux constantes $M, N \geq 0$ telles que $f + M \geq 0$ et $f + N \geq 0$. Montrer que $T_1(f + M) - T_1(M) = T_1(f + N) - T_1(N)$. On pourra considérer $T_1(f + M + N)$.
- (b) Soit $f \in C^0(X, \mathbb{R})$. On définit, $T_1(f) = T_1(f + M) - T_1(M)$ où $M > 0$ est une constante telle que $f + M \geq 0$. Montrer que T_1 est bien définie, et qu'elle prolonge T_1 définie à la question 1 en une forme linéaire positive sur $C^0(X, \mathbb{R})$.

3. DÉCOMPOSITION DE L .

- (a) Montrer que $T_2 := T_1 - L$ est une forme linéaire positive sur $C^0(X, \mathbb{R})$ et que, pour toute $f \in C^0(X, \mathbb{R})$ avec $f \geq 0$, on a $T_2(f) = \sup\{L(-\varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq f\}$.
- (b) Montrer que $\|L\| \leq \|T_1\| + \|T_2\| = T_1(1) + T_2(1)$.
- (c) Montrer l'égalité $\|L\| = T_1(1) + T_2(1)$.

4. UNICITÉ DE LA DÉCOMPOSITION MINIMALE.

On suppose qu'on a une seconde décomposition $L = S_1 - S_2$ de la forme linéaire L comme différences de deux formes linéaires positives S_1 et S_2 sur $C^0(X, \mathbb{R})$. On note respectivement m_i et ν_i les mesures boréliennes (finies) associées à T_i et S_i ($i = 1, 2$).

- (a) Montrer que, pour toute fonction $f \in C^0(X, \mathbb{R})$ positive, on a l'inégalité $S_1(f) \geq T_1(f)$.
- (b) En déduire que $\nu_1 \geq m_1$, i.e. que pour tout borélien $B \subset X$ on a $\nu_1(B) \geq m_1(B)$.
- (c) En déduire que $\nu_2 \geq m_2$, puis qu'il existe une mesure borélienne ν sur X telle que $\nu_1 = m_1 + \nu$ et $\nu_2 = m_2 + \nu$.
- (d) Montrer que si on a également $\|L\| = \nu_1(X) + \nu_2(X)$, alors $m_i = \nu_i$ ($i = 1, 2$).
- (e) LES MESURES m_1 ET m_2 SONT ÉTRANGÈRES. Pour tous $k \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, soit $f_{n,k} \in C^0(X)$ avec $\|f_{n,k}\| \leq 1$ et

$$m_1(X) + m_2(X) \leq \int_X f_{n,k} dm_1 - \int_X f_{n,k} dm_2 + (k2^n)^{-1}.$$

- i. Soit $V_{n,k} = \{f_{n,k} > 0\}$. Montrer que

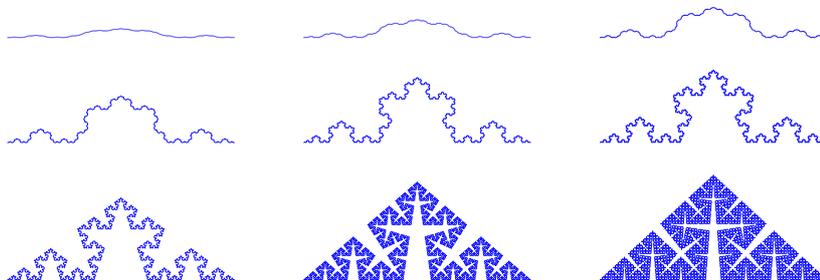
$$m_1(X \setminus V_{n,k}) + m_2(V_{n,k}) \leq (k2^n)^{-1}.$$

- ii. Soit $A := \bigcap_k \bigcup_n V_{k,n}$. Montrer que $m_1(X \setminus A) = 0$ et $m_2(A) = 0$.

7. Mesures et dimension de Hausdorff

JUSQU'ICI, vous ne savez attribuer une dimension qu'à des espaces bien particuliers : les espaces vectoriels... de dimension finie ou, à peine plus généralement, les sous-variétés de \mathbb{R}^d . Dans les deux cas, cette dimension est entière. C'est le nombre de paramètres nécessaires pour décrire, localement, cet espace.

Notre objectif est maintenant d'attribuer une dimension à des espaces métriques plus compliqués, telles les courbes de von Koch dessinées ci-dessous. Ces courbes, qui dépendent d'un paramètre $\theta \in [0, \pi/4]$, évoluent tranquillement depuis un segment – de dimension 1 – vers une courbe qui remplit tout un triangle – donc de dimension 2. On aimerait naturellement leur attribuer une dimension qui dépende continûment du paramètre, en partant de 1 pour le segment jusqu'à valoir 2 pour le triangle.



Courbes de von Koch à paramètre

Chacune de ces courbes est l'attracteur d'un IFS Φ_θ constitué de deux similitudes de rapport $(2 \cos \theta)^{-1}$, où l'angle θ varie entre 0 (l'attracteur est alors le segment $[0, 1]$) et $\pi/4$ (l'attracteur étant alors le triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1/2, 1/2)$). Pour la valeur $\pi/6$ du paramètre, on obtient le flocon de von Koch usuel.

Remarque 7.1. Il existe plusieurs notions concurrentes de dimension. Elles ont chacune leur intérêt mais ne s'accordent pas forcément si l'on s'intéresse à des exemples plus sauvages que \mathbb{R}^d ou une boule de cette espace : la dimension de Hausdorff, qui est celle qui nous intéressera, mais aussi la dimension de Minkowski ou encore la dimension topologique¹.

¹Si vous êtes curieux de ces autres notions, voir par exemple Quéffelec, Topologie.

A Vers les mesures de Hausdorff

Toutes les mesures boréliennes que vous avez manipulées jusqu'ici sur un espace métrique étaient des mesures de Radon. Prenant des valeurs finies sur les compacts, elles permettaient donc d'intégrer des fonctions continues à support compact, c'était d'ailleurs bien la seule chose qu'on leur demandait...

Nous allons maintenant entrer dans un tout autre monde. En effet, même si nous poursuivons la thématique des constructions de mesures, l'objectif est maintenant géométrique. Il s'agit de définir, sur un espace métrique X , une famille de mesures boréliennes s -dimensionnelles \mathcal{H}^s , pour $0 \leq s < \infty$. L'idée est que \mathcal{H}^1 mesurera des longueurs, \mathcal{H}^2 des aires, \mathcal{H}^3 des volumes 3-dimensionnels... et qu'on ne se limitera pas aux dimensions entières!

Les mesures de Hausdorff nous mèneront naturellement à la notion de dimension de Hausdorff.

Nous utiliserons désormais la notation suivante.

Notation 7.2. Lorsque A est une partie d'un espace métrique, on désigne par $|A|$ son diamètre, défini par

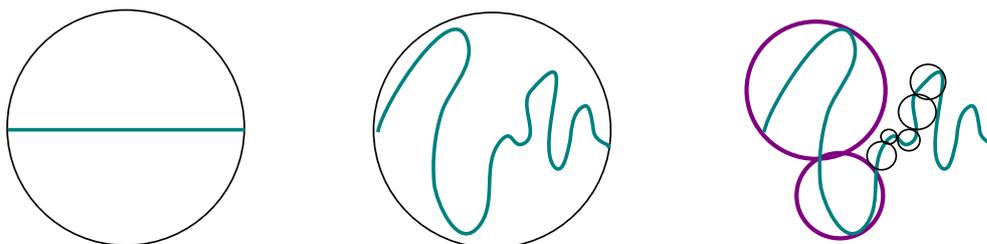
$$|A| = \sup\{d(a, b), a, b \in A\}.$$

Dans la proposition 5.9, nous avons expliqué un procédé permettant de construire des mesures extérieures. Ceci nous a notamment permis de définir la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , que nous noterons λ_1 (exemple 5.17). L'esprit de cette mesure borélienne λ_1 est qu'elle permet d'attribuer une "longueur" à toute partie borélienne $A \subset \mathbb{R}$, longueur définie par

$$\lambda_1(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} |V_i|, \text{ où } A \subset \cup_{i \in \mathbb{N}} V_i \text{ avec } V_i \text{ des intervalles} \right\}. \quad (7.1)$$

Essayons maintenant de définir la longueur d'une courbe $A \subset \mathbb{R}^2$, telle que dans les dessins qui suivent. On constate que, si l'on s'en tient à l'expression (7.1) ci-dessus en remplaçant les intervalles de \mathbb{R} par les boules de \mathbb{R}^2 , on va se retrouver à estimer quelque chose qui ressemble plus au diamètre de A qu'à sa longueur...

Comparer en effet dans les deux dessins de gauche ce qu'on obtient pour le segment, et la courbe serpent : pour cette dernière, on oublie en effet tous les méandres.



Il sera donc plus réaliste de procéder comme dans le dessin de droite, et de recouvrir A par des boules, ou des parties, de petit diamètre $|V| \leq \delta$, puis de faire tendre δ vers 0 pour aller chercher des détails de plus en plus petits (par exemple, chacune des deux boules violettes du dessin de droite est encore bien trop grosse pour estimer raisonnablement la longueur de la boucle qu'elle contient).

Ces considérations vont nous mener à la définition 7.6 des mesures de Hausdorff. Nous commençons par la proposition 7.4. On y explique un procédé général de construction de mesure sur un espace métrique, qui est un raffinement du procédé introduit au chapitre 5 (proposition 5.9) et fait intervenir toute une famille de mesures extérieures.

B Mesures extérieures sur un espace métrique

Notation 7.3. Soit X un espace métrique. Lorsque $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(X)$ est une famille de parties de X on introduit, pour tout réel $0 < \delta \leq \infty$, la famille

$$\mathcal{V}_\delta = \{V \in \mathcal{V}, |V| \leq \delta\}$$

des parties de \mathcal{V} de diamètre au plus δ .

Proposition 7.4. Soit X un ensemble. On se donne une famille $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(X)$ de parties de X telle que $\emptyset \in \mathcal{V}$, et une fonction $\eta : \mathcal{V} \rightarrow [0, +\infty]$ telle $\eta(\emptyset) = 0$. Pour tout $0 < \delta \leq \infty$, on note m_δ^* la mesure extérieure associée à $(\mathcal{V}_\delta, \eta|_{\mathcal{V}_\delta})$. On a donc, pour toute partie $A \subset X$:

$$m_\delta^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \eta(V_i) \mid A \subset \cup_{i \in \mathbb{N}} V_i, V_i \in \mathcal{V}, |V_i| \leq \delta \right\}.$$

On a pour tous $0 < \delta_1 \leq \delta_2 \leq \infty$ l'inégalité $m_{\delta_1}^* \geq m_{\delta_2}^*$. On pose

$$m^* = \lim_{\delta \rightarrow 0} m_\delta^* = \sup_{\delta > 0} m_\delta^*.$$

Alors m^* est une mesure extérieure métrique sur X .

Avec ces notations, la mesure extérieure construite à la proposition 5.9 correspond, sur un espace métrique, à m_∞^* puisqu'aucune restriction sur les diamètres des parties constituant le recouvrement n'est imposée (et pour cause : la construction est valable sur un ensemble quelconque X).

Remarque 7.5. Reprenons l'exemple 5.10 (mesure extérieure de Lebesgue), où \mathcal{V} est l'ensemble des intervalles de \mathbb{R} et où la fonction η associe, à tout intervalle, sa longueur. Dans ce cas très particulier, toutes les mesures extérieures $(\lambda_1^*)_\delta$ sont égales entre elles. En effet, tout intervalle I peut être découpé en une réunion dénombrable $I = \cup J_k$ d'intervalles de longueurs (ou diamètres) $|J_k| \leq \delta$, avec $|I| = \sum |J_k|$.

Le même phénomène se produit lorsque l'on cherche à définir la mesure de Lebesgue d -dimensionnelle dans \mathbb{R}^d , soit λ_d .

Il faut prendre garde à ce que ces exemples sont complètement atypiques : c'est ce que nous avons cherché à expliquer dans le paragraphe A.

Preuve de la proposition 7.4

- Lorsque $0 < \delta_1 \leq \delta_2$, on a $\mathcal{V}_{\delta_1} \subset \mathcal{V}_{\delta_2}$ et donc $m_{\delta_1}^* \geq m_{\delta_2}^*$.
- Chaque m_δ^* est une mesure extérieure. Donc $m^*(\emptyset) = \sup_{\delta > 0} m_\delta^*(\emptyset) = 0$.
Lorsque $A \subset B \subset X$, on a $m_\delta^*(A) \leq m_\delta^*(B)$, ce qui passe à la limite lorsque $\delta \rightarrow 0$ pour montrer que m^* est croissante.
- Reste à montrer que m^* est σ -sous additive. Pour cela on considère une réunion dénombrable $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. On a, pour tout $\delta > 0$,

$$m_\delta^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} m_\delta^*(A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} m^*(A_n)$$

et on conclut en faisant tendre δ vers 0.

- Reste à montrer que m^* est métrique (définition 5.14).

On se donne donc deux parties $A, B \subset X$ telles que $d(A, B) > 0$. On veut montrer l'inégalité $m^*(A \cup B) \geq m^*(A) + m^*(B)$ (rappelons en effet que l'inégalité inverse est assurée car m^* , comme toute mesure extérieure, est sous-additive).

Il suffit pour ce faire de montrer l'inégalité $m_\delta^*(A \cup B) \geq m_\delta^*(A) + m_\delta^*(B)$ lorsque δ est assez petit.

Soit donc $\delta < d(A, B)$, et un recouvrement $A \cup B \subset \cup_{i \in \mathbb{N}} V_i$ par des parties $V_i \in \mathcal{V}_\delta$ de diamètres au plus δ . Chacune des parties V_i rencontre au plus l'une des deux parties A ou B . On introduit les deux ensembles d'indices $I_A = \{i \in I \mid V_i \cap A \neq \emptyset\}$ et $I_B = \{i \in I \mid V_i \cap B \neq \emptyset\}$. On a I_A et I_B disjoints, et les $(V_i)_{i \in I_A}$ forment un recouvrement de A par des éléments de \mathcal{V}_δ (de même pour B). Il suit que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \eta(V_i) \geq \sum_{i \in I_A} \eta(V_i) + \sum_{i \in I_B} \eta(V_i) \geq m_\delta^*(A) + m_\delta^*(B).$$

En passant à l'inf sur les recouvrements de $A \cup B$ par les éléments de \mathcal{V}_δ , on obtient donc $m_\delta^*(A \cup B) \geq m_\delta^*(A) + m_\delta^*(B)$, ce qui achève la preuve. \square

C Mesures de Hausdorff

Définition 7.6. Soient X un espace métrique et $s \geq 0$.

La mesure de Hausdorff s -dimensionnelle est la mesure borélienne \mathcal{H}^s sur X obtenue par la construction de la proposition 7.4, lorsque $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(X)$ est l'ensemble des parties bornées de X et $\eta : V \in \mathcal{V} \mapsto |V|^s \in [0, +\infty[$.

On a donc, pour tout borélien $A \subset X$, l'égalité

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(A)$$

où $\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} |V_i|^s \text{ où } A \subset \cup_{i \in \mathbb{N}} V_i \text{ avec } |V_i| \leq \delta \right\}$.

Remarque 7.7. Comme on l'a dit plus haut ces mesures de Hausdorff ne seront pas toujours finies sur les compacts (voir notamment la proposition 7.9) : elles ne pourront donc pas permettre d'intégrer des fonctions continues.

A vrai dire, leur valeur exacte n'aura pas vraiment d'importance !

L'information qui sera pertinente, pour un borélien $A \subset X$, sera de savoir si $\mathcal{H}^s(A) = 0$, ou si $\mathcal{H}^s(A) = \infty$, ou encore si $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$ (voir notamment la remarque 7.16).

Exercice 7.8.

1. Soient d_1 et d_2 deux distances Lipschitz-équivalentes sur un ensemble X : il existe une constante $c \geq 1$ telle que $c^{-1}d_1 \leq d_2 \leq cd_1$. Pour $s \geq 0$, on note $\mathcal{H}_{(i)}^s$ la mesure de Hausdorff s -dimensionnelle sur (X, d_i) (pour $i = 1, 2$). Montrer que $c^{-s}\mathcal{H}_{(1)}^s \leq \mathcal{H}_{(2)}^s \leq c^s\mathcal{H}_{(1)}^s$.
2. Soit X un espace métrique. On introduit l'ensemble $\mathcal{W} \subset \mathcal{P}(X)$ des boules fermées de X . Pour tout paramètre $s \geq 0$, on note $\mathcal{H}^s = \mathcal{H}_{(\mathcal{V})}^s$ la mesure de Hausdorff s -dimensionnelle construite à la définition 7.6, et $\mathcal{H}_{(\mathcal{W})}^s$ la mesure borélienne qu'on aurait obtenue en utilisant \mathcal{W} au lieu de \mathcal{V} dans cette définition. Montrer que

$$\mathcal{H}_{(\mathcal{V})}^s \leq \mathcal{H}_{(\mathcal{W})}^s \leq 2^s \mathcal{H}_{(\mathcal{V})}^s.$$

Faire ensuite le même travail en remplaçant \mathcal{W} par l'ensemble \mathcal{B} des parties boréliennes bornées.

Fixons $s \geq 0$. Il suit que les mesures de Hausdorff \mathcal{H}^s sur X pour les métriques d_1 ou d_2 , et pour les ensembles de parties \mathcal{V} , \mathcal{W} ou \mathcal{B} , prennent simultanément une valeur positive finie, ou bien simultanément la valeur nulle, ou encore simultanément la valeur $+\infty$.

D Les mesures de Hausdorff sur \mathbb{R}^d

Il est important de se faire la main sur des exemples. Le premier exemple à regarder est celui de l'espace \mathbb{R}^d . D'après l'exercice 7.8, on n'a pas besoin, dans la proposition suivante, de préciser de quelle norme cet espace est muni.

Proposition 7.9. Exemple fondamental

On considère le cube unité $[0, 1]^d \subset \mathbb{R}^d$, pour $d \geq 1$. Alors

$$\mathcal{H}^s([0, 1]^d) = 0 \quad \text{si } s > d$$

$$\mathcal{H}^d([0, 1]^d) \in]0, \infty[$$

$$\mathcal{H}^s([0, 1]^d) = \infty \quad \text{si } s < d.$$

Si $d = 2$, la “longueur” $\mathcal{H}^1([0, 1]^2)$ du carré est infinie (de même pour tout \mathcal{H}^s avec $s < 2$), tandis que son “volume” 3-dimensionnel $\mathcal{H}^3([0, 1]^2)$ est nul (de même pour tout \mathcal{H}^s avec $s > 2$). Ce n’est pas surprenant, car la bonne façon de “mesurer” ce carré est de calculer son aire $\mathcal{H}^2([0, 1]^2)$, qui est finie et non nulle. Voir cependant la remarque 7.17.

Preuve L’exercice 7.8 nous permet, pour définir les mesures de Hausdorff, d’utiliser les recouvrements par des boules pour la norme de notre choix. On va choisir de munir \mathbb{R}^d de la norme sup, dont les boules sont des cubes, ce qui bien commode pour découper économiquement des boules en boules plus petites.

Le diamètre d’un cube de côté r est γr (pour une constante $\gamma > 0$ qui ne dépend que de d) et sa mesure de Lebesgue est $\lambda_d([0, r]^d) = r^d$.

• Dans un premier temps, on va chercher à majorer $\mathcal{H}^s([0, 1]^d)$. C’est la partie facile, car il suffit de considérer des recouvrements bien choisis. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, on recouvre $[0, 1]^d$ par k^d cubes de côté $1/k$. On a donc

$$\mathcal{H}_{1/k}^s \leq k^d (\gamma/k)^s = \gamma^s k^{d-s},$$

et ce majorant tend vers 0 lorsque $k \rightarrow \infty$ lorsque $s > d$, et reste borné lorsque $s = d$.

• La partie délicate consiste à minorer $\mathcal{H}^s([0, 1]^d)$. Il faut en effet se préoccuper maintenant de tous les recouvrements $[0, 1]^d \subset \cup_{i \in \mathbb{N}} W_i$ du cube unité par des boules $W_i \subset \mathbb{R}^d$ de diamètre $|W_i| \leq \delta$.

On va se servir de la mesure de Lebesgue λ_d comme étalonnage. La mesure λ_d étant σ -additive on a, pour un tel recouvrement :

$$1 = \lambda_d([0, 1]^d) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_d(W_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} (\gamma^{-1}|W_i|)^d = \gamma^{-d} \sum_{i \in \mathbb{N}} |W_i|^d.$$

Lorsque $s \leq d$, on aura donc

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} |W_i|^s = \sum_{i \in \mathbb{N}} |W_i|^{s-d} |W_i|^d \geq \delta^{s-d} \sum_{i \in \mathbb{N}} |W_i|^d \geq \gamma^d \delta^{s-d}.$$

Cette inégalité étant valable pour tout recouvrement dénombrable de W par des cubes de diamètres au plus δ , on a $\mathcal{H}_\delta^s([0, 1]^d) \geq \gamma^d \delta^{s-d}$ puis on obtient $\mathcal{H}^d([0, 1]^d) > 0$, et $\mathcal{H}^s([0, 1]^d) = \infty$ si $s < d$, en faisant tendre δ vers 0. \square

Remarque 7.10. Notre objectif, à terme, est de calculer la dimension de Hausdorff de l’attracteur K d’un IFS (chapitre 9). Pour cela, nous serons amenés à estimer les mesures de Hausdorff $\mathcal{H}^s(K)$ de ce compact, en fonction du paramètre $s \geq 0$.

Tout se passera comme dans le cas particulier que nous venons de traiter. Il sera facile de majorer les $\mathcal{H}^s(K)$. De même, la minoration sera plus subtile à obtenir, et nécessitera de faire intervenir une mesure de référence (ici, c’était la mesure de Lebesgue λ_d). Voir les paragraphes F.1, F.2 de ce chapitre pour un autre exemple, puis 8.A.

Etudions l'effet de transformations sur les mesures de Hausdorff. Les mesures de Hausdorff considérées dans l'énoncé seront, de part et d'autre, associées à l'ensemble \mathcal{V} des parties bornées de l'espace (il s'agit en effet ici d'estimations quantitatives : on ne peut plus se contenter de travailler à constante multiplicative près!) On munit \mathbb{R}^d d'une norme euclidienne, de sorte à pouvoir parler de similitude. Les mesures de Hausdorff sur \mathbb{R}^d correspondent à ce choix de norme.

Proposition 7.11. *Soit $s \geq 0$.*

1. *Soient X, Y deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ k -lipschitzienne. On a, pour tout borélien $A \subset X$, l'inégalité*

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq k^s \mathcal{H}^s(A).$$

2. *Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une similitude de \mathbb{R}^d euclidien, de rapport $k > 0$. On a, pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^d$, l'égalité*

$$\mathcal{H}^s(f(A)) = k^s \mathcal{H}^s(A).$$

La mesure borélienne \mathcal{H}^s sur \mathbb{R}^d est donc invariante par translations.

Preuve 1. Soit $A \subset X$ un borélien. Soit $\delta > 0$. Si $A \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ est un recouvrement de A par des parties bornées de X de diamètres $|V_n| \leq \delta$, on a $f(A) \subset f(\cup_{n \in \mathbb{N}} V_n) = \cup_{n \in \mathbb{N}} f(V_n)$, où les $f(V_n)$ sont des parties bornées de Y de diamètres $|f(V_n)| \leq k |V_n| \leq k\delta$. En revenant à la définition de la mesure de Hausdorff s -dimensionnelle, il vient donc

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{k\delta}^s(f(A)) &\leq \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} |f(V_n)|^s \text{ avec } A \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} V_n \text{ et } |V_n| \leq \delta \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} k^s |V_n|^s \text{ avec } A \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} V_n \text{ et } |V_n| \leq \delta \right\} \\ &= k^s \mathcal{H}_\delta^s(A) \leq k^s \mathcal{H}^s(A), \end{aligned}$$

et donc en passant au sup en δ (puisque $k\delta \rightarrow 0$ lorsque $\delta \rightarrow 0$)

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq k^s \mathcal{H}^s(A).$$

2. En suit, la réciproque f^{-1} étant une similitude de rapport k^{-1} . □

Corollaire 7.12. *Sur l'espace \mathbb{R}^d , on a les propriétés suivantes.*

1. *Pour $s > d$, la mesure de Hausdorff \mathcal{H}^s est la mesure nulle.*
2. *Pour $0 \leq s < d$, la mesure de Hausdorff \mathcal{H}^s n'est pas finie sur les compacts : ce n'est pas une mesure de Radon.*
3. *Pour $s = d$, la mesure de Hausdorff \mathcal{H}^d sur \mathbb{R}^d est un multiple (non nul) de la mesure de Lebesgue λ_d .*

Preuve Le point (1) est conséquence de la proposition 7.9 et de ce que \mathcal{H}^s , comme toute mesure, est σ -additive et croissante.

Le point (2) suit également de la proposition 7.9.

Enfin \mathcal{H}^d est une mesure borélienne sur \mathbb{R}^d invariante par translation (proposition 7.11), qui prend une valeur finie et non nulle sur $[0, 1]^d$ (proposition 7.9). Le point (3) suit donc de la caractérisation, à scalaire près, de la mesure de Lebesgue par ces propriétés. \square

On ne se préoccupe pas en (3) de la constante de proportionnalité. Comme on l'a déjà dit, elle a généralement peu d'importance et dépend de la famille de parties de \mathbb{R}^d choisie dans la construction de \mathcal{H}^s .

E Dimension de Hausdorff

Nous sommes prêts à définir la dimension de Hausdorff d'un espace métrique. Comment allons-nous procéder ?

Laissons-nous guider par l'exemple de l'espace \mathbb{R}^d ou du pavé $[0, 1]^d$. On a naturellement envie de décréter qu'ils sont tous deux de dimension d . Rappelons-nous que $\mathcal{H}^s([0, 1]^d) = 0$ lorsque $s > d$, mais que $\mathcal{H}^s([0, 1]^d) = \infty$ lorsque $s < d$. Autrement dit, cette valeur d (candidat à être la dimension de l'espace) apparaît précisément comme un exposant critique pour les mesures de Hausdorff !

Nous allons voir en 7.14 que l'existence d'un exposant critique pour les mesures de Hausdorff est un phénomène général.

Lemme 7.13. *Soient X un espace métrique, $A \in \mathcal{B}(X)$ un borélien et $0 \leq s < t < \infty$.*

$$\text{Si } \mathcal{H}^s(A) < \infty, \text{ alors } \mathcal{H}^t(A) = 0.$$

$$\text{Si } \mathcal{H}^t(A) > 0, \text{ alors } \mathcal{H}^s(A) = \infty.$$

Preuve Soit $\delta > 0$. Pour tout recouvrement dénombrable $A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i$ de A par des parties de diamètres au plus δ , on a

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} |V_i|^t = \sum_{i \in \mathbb{N}} |V_i|^{t-s} |V_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_{i \in \mathbb{N}} |V_i|^s,$$

et donc on a l'inégalité $\mathcal{H}_\delta^t(A) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(A)$. Le résultat annoncé s'en déduit en faisant tendre δ vers 0. \square

Proposition-Définition 7.14. *Soit $A \in \mathcal{B}(X)$ un borélien d'un espace métrique X . La dimension de Hausdorff de A est*

$$\dim_H(A) = \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(A) < \infty\} \in [0, +\infty].$$

La dimension de Hausdorff $\alpha = \dim_H(A)$ de A satisfait :

$$\mathcal{H}^s(A) = \infty \quad \text{pour } s < \alpha$$

$$\mathcal{H}^s(A) = 0 \quad \text{pour } s > \alpha.$$

En particulier, si $\mathcal{H}^s(A) = 0$ pour tout $s > 0$ on a $\dim_H(A) = 0$. Tandis que, si $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ pour tout $s \geq 0$, on a $\dim_H(A) = \infty$.

Par le biais des mesures de Hausdorff (dont la définition fait intervenir des recouvrements par des boules dont le diamètre tend vers 0), la dimension de Hausdorff de A prend en compte la géométrie de A à petite échelle.

Preuve Conséquence immédiate du lemme 7.13. \square

Exemple 7.15. La dimension de Hausdorff de $[0, 1]^d$ est égale à d .

Remarque 7.16. Rappelons que lorsqu'on définit les mesures de Hausdorff en utilisant au choix les parties bornées, ou bien les boules ouvertes, ou bien les boules fermées, on obtient pour chaque valeur de $s \geq 0$ des mesures de Hausdorff qui restent dans un ratio borné (exercice 7.8). La dimension de Hausdorff ne dépendra donc pas de ce choix. Ouf!

Remarque 7.17. Attention : pour l'exemple du cube $[0, 1]^d$ on avait, pour l'exposant critique $s = d$, une mesure de Hausdorff $0 < \mathcal{H}^d([0, 1]^d) < \infty$. On ne peut rien affirmer de tel en général et tous les cas de figure peuvent se produire avec, pour $\alpha = \dim_H(A)$, des exemples pour lesquels $\mathcal{H}^\alpha(A) = 0$ ou $\mathcal{H}^\alpha(A) = \infty$ ou encore $0 < \mathcal{H}^\alpha(A) < \infty$ (voir les exercices).

Lorsque A est un borélien de l'espace métrique X , on peut calculer sa dimension de Hausdorff en tant que partie de X ou bien en tant qu'espace métrique à part entière. Heureusement on obtient la même chose, autrement dit la dimension de Hausdorff est une notion intrinsèque. C'est ce que nous constatons dans l'exercice suivant.

Exercice 7.18. Soient A un borélien de l'espace métrique X , et $0 \leq s \leq \infty$. Notons respectivement par $\mathcal{H}_{(A)}^s$ et $\mathcal{H}_{(X)}^s$ les mesures de Hausdorff s -dimensionnelles sur les espaces métriques A ou X , associées aux ensembles \mathcal{V}_A et \mathcal{V}_X des parties bornées de A , ou bien de X . Montrer que $\mathcal{H}_{(X)}^s(A) = \mathcal{H}_{(A)}^s(A)$.

Il nous reste à établir quelques premières propriétés de la dimension de Hausdorff. En particulier, nous montrons qu'elle est croissante, ce qui est la moindre des choses pour une dimension.

Proposition 7.19. *La dimension de Hausdorff vérifie les deux propriétés suivantes. Soient A, B et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des boréliens de X . Alors :*

1. Si $A \subset B$, on a $\dim_H(A) \leq \dim_H(B)$.
2. Si $A_n \subset X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dim_H(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \dim_H(A_n)$.

Preuve (1) est immédiat (car chaque mesure \mathcal{H}^s est croissante).

Prouvons (2). Introduisons $\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} \dim_H(A_n)$.

Supposons $\alpha > 0$. Soient $0 \leq s < \alpha$ et n_0 tel que $s < \dim_H(A_{n_0})$. Ainsi $\mathcal{H}^s(A_{n_0}) = \infty$ donc, par croissance de la mesure \mathcal{H}^s , on a $\mathcal{H}^s(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \infty$. Il suit alors que $\dim_H(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \geq s$. On a donc $\dim_H(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \geq \alpha$.

Supposons $\alpha < \infty$. Soit $s > \alpha$. On a donc $\mathcal{H}^s(A_n) = 0$ pour tout n , d'où $\mathcal{H}^s(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 0$ par sous-additivité de \mathcal{H}^s , et donc $\dim_H(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq s$. Il suit $\dim_H(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \alpha$. \square

Exemple 7.20. Puisque $\dim_H([0, 1]^d) = d$, on a également $\dim_H(\mathbb{R}^d) = d$ (écrire \mathbb{R}^d comme union dénombrable de cubes).

Il suit que $\dim_H(A) \leq d$ pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^d$.

Si $A \subset \mathbb{R}^d$ n'est pas Lebesgue négligeable, par exemple si A est d'intérieur non vide dans \mathbb{R}^d , on a $\dim_H(A) = d$.

De par sa construction, la dimension de Hausdorff est un invariant métrique, et non topologique.

Nous verrons des exemples d'espaces métriques homéomorphes avec des dimensions de Hausdorff différentes (voir les courbes de von Koch p. 81 ou la remarque 9.5). Par contre, les applications lipschitziennes diminuent la dimension de Hausdorff et donc les homéomorphismes bilipschitziens la conservent.

Proposition 7.21. *Soit $f : X \rightarrow Y$ une application entre deux espaces métriques.*

Si f est lipschitzienne, on a l'inégalité $\dim_H(f(X)) \leq \dim_H(X)$.

Si l'application $f : X \rightarrow Y$ est bijective et bilipschitzienne, on a l'égalité $\dim_H(X) = \dim_H(Y)$.

Preuve On suppose que l'application f est k -lipschitzienne.

Soit $s \geq 0$. On procède comme dans la preuve de la proposition 7.11. Pour un recouvrement $X = \cup_{i \in \mathbb{N}} V_i$ de X par des parties bornées de diamètres $|V_i| \leq \delta$, on a $f(X) \subset \cup_{i \in \mathbb{N}} f(V_i)$ avec $|f(V_i)| \leq k|V_i| \leq k\delta$. Il suit que

$$\mathcal{H}_{k\delta}^s(f(X)) \leq k^s \mathcal{H}_\delta^s(X) \quad \text{d'où} \quad \mathcal{H}^s(X) = 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(f(X)) = 0,$$

donc $\dim_H(Y) \leq \dim_H(X)$. La seconde assertion suit immédiatement. \square

F Premiers exemples

F.1 Majorer la dimension de Hausdorff

Nous avons déjà déterminé la dimension de Hausdorff du cube $[0, 1]^d$ (proposition 7.9). Un autre exemple, qui reste accessible sans être aussi élémentaire, est celui de l'ensemble triadique de Cantor.

Comme pour l'exemple de $[0, 1]^d$, la majoration est la partie facile car, pour voir que $\dim_H(A) \leq s$, il suffit de montrer que $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Autrement dit, il faut pour chaque $\delta > 0$ trouver **un** recouvrement $A \subset \cup_{i \in \mathbb{N}} V_i$ de A avec $|V_i| \leq \delta$, et pour lequel $\sum_{i \in \mathbb{N}} |V_i|^s \leq M$, où M est indépendant de δ .

Exemple 7.22. Majorer la dimension de Hausdorff de $\mathcal{C}^{(1/3)}$

Pour chaque entier $n \geq 1$, le cantor $\mathcal{C}^{(1/3)}$ est recouvert par les 2^n intervalles de n -ième génération, qui sont de longueur 3^{-n} (et qui rencontrent tous $\mathcal{C}^{(1/3)}$, voir l'exemple 4.19). On a donc, pour tout $s \geq 0$, l'inégalité

$$\mathcal{H}^s(\mathcal{C}^{(1/3)}) \leq \sup_{n \geq 1} 2^n (3^{-n})^s = \sup_{n \geq 1} (2/3^s)^n.$$

Ainsi $\mathcal{H}^s(\mathcal{C}^{(1/3)}) < \infty$ dès que $s \geq \frac{\log 2}{\log 3}$ et donc $\dim_H(\mathcal{C}^{(1/3)}) \leq \frac{\log 2}{\log 3}$.

F.2 Minorer la dimension de Hausdorff

Comme pour l'exemple de $[0, 1]^d$, il s'agit de la partie délicate. Pour voir que $s < \dim_H$, il faut savoir minorer $\mathcal{H}^s(A)$. Autrement dit, il faut minorer $\sum_{i \in \mathbb{N}} |V_i|^s$ pour **tous** les recouvrements $A \subset \cup_{i \in \mathbb{N}} V_i$ de A avec $|V_i| \leq \delta$. La difficulté viendra de ce que, dans un tel recouvrement, les V_i pourront avoir des diamètres très différents les uns des autres.

Exercice 7.23. Minorer la dimension de Hausdorff de $\mathcal{C}^{(1/3)}$

Soit $s = \log 2 / \log 3$. On veut montrer que $\mathcal{H}^s(\mathcal{C}^{(1/3)}) > 0$. Il suffit de montrer que $\mathcal{H}_1^s(\mathcal{C}^{(1/3)}) > 0$ (recouvrements avec les parties de diamètres au plus 1).

Il sera commode de travailler ici avec les mesures de Hausdorff associées aux recouvrements par des boules ouvertes, c'est-à-dire par des intervalles ouverts de \mathbb{R} (voir la remarque 7.16).

Soit donc $\mathcal{C}^{(1/3)} \subset \cup_{i \in \mathbb{N}} V_i$ un recouvrement de $\mathcal{C}^{(1/3)}$ par des intervalles ouverts avec $|V_i| < 1$.

1. Montrer qu'il existe $I \subset \mathbb{N}$ fini tel que $\mathcal{C}^{(1/3)} \subset \cup_{i \in I} V_i$.
2. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $|V_i| \geq 3^{-(k+1)}$ pour tout $i \in I$.
3. On classe les V_i par ordre de grandeur de diamètre. Pour $0 \leq j \leq k$ on introduit donc

$$I_j = \{i \in I \mid 3^{-(j+1)} \leq |V_i| < 3^{-j}\}.$$

- (a) Soit $i \in I_j$. Montrer que V_i rencontre au plus un intervalle de j -ième génération, et au plus 2^{k-j} intervalles de k -ième génération.
- (b) Montrer l'inégalité $2^k \leq \sum_{j=0}^k 2^{k-j} \#I_j$ (où $\#$ désigne le cardinal d'un ensemble).
- (c) En déduire que $\sum_{i \in \mathbb{N}} |V_i|^s \geq 1/2$ (on rappelle que $s = \log 2 / \log 3$).
4. Déterminer enfin la dimension de Hausdorff du Cantor $\mathcal{C}^{(1/3)}$.

F.3 Dimension de similitude

Pour $s = \dim_H K$, il se peut que $\mathcal{H}^s(K) = 0$ ou $\mathcal{H}^s(K) = \infty$. Néanmoins, le cas d'école suivant va se révéler être très instructif et nous mener à la notion de dimension de similitude, qui jouera un rôle crucial au chapitre 9.

Lemme 7.24. Cas d'école

Soient $\Phi = (f_i)_{1 \leq i \leq p}$ un IFS sur \mathbb{R}^d euclidien, où les f_i sont des similitudes de rapports $0 < k_i < 1$. On note K l'attracteur de Φ . Soit $s \in [0, +\infty[$. Supposons que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

(1) Séparation stricte :

$$\text{pour } i \neq j, \text{ on a } f_i(K) \cap f_j(K) = \emptyset$$

(2) Mesure de Hausdorff : $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$.

Alors $s = \dim_H(K)$, et s est l'unique solution de l'équation $\sum_{i=1}^p k_i^s = 1$.

Preuve La définition de K , l'hypothèse de séparation stricte (1), ainsi que l'additivité de la mesure de Hausdorff \mathcal{H}^s et la proposition 7.11 donnent

$$\mathcal{H}^s(K) = \mathcal{H}^s(\sqcup_{i=1}^p f_i(K)) = \sum_{i=1}^p \mathcal{H}^s(f_i(K)) = \left(\sum_{i=1}^p k_i^s \right) \mathcal{H}^s(K).$$

L'hypothèse (2) assure alors que $\sum_{i=1}^p k_i^s = 1$. La fonction

$$s \in [0, +\infty[\mapsto \sum_{i=1}^p k_i^s \in [0, +\infty[$$

étant strictement décroissante d'image $]0, p]$, et donc l'équation $\sum_{i=1}^p k_i^s = 1$ admet une unique solution. Le résultat est donc prouvé. \square

Remarque 7.25. Dans les paragraphes précédents (proposition 7.11, lemme 7.13, propositions 7.14 et 7.19), on aurait pu considérer des parties quelconques, et évaluer la mesure extérieure de Hausdorff sur ces parties. Dans la preuve de 7.24, il est essentiel que \mathcal{H}^s soit une mesure borélienne, donc additive sur les parties compactes disjointes.

Définition 7.26. Dimension de similitude L'unique solution $s > 0$ de l'équation $\sum_{i=1}^p k_i^s = 1$ est la dimension de similitude de Φ , notée $\dim_S \Phi$.

Exemple 7.27. Le Cantor $\mathcal{C}^{(1/3)}$.

Le Cantor $\mathcal{C}^{(1/3)}$ est l'attracteur de l'IFS Φ constitué des deux transformations $f_1 : t \in \mathbb{R} \rightarrow t/3 \in \mathbb{R}$ et $f_2 : t \in \mathbb{R} \rightarrow 2/3 + t/3 \in \mathbb{R}$.

Cet IFS satisfait la condition de séparation stricte, puisque $\mathcal{C}^{(1/3)} \subset [0, 1]$ et $f_1([0, 1]) \cap f_2([0, 1]) = \emptyset$.

L'attracteur $\mathcal{C}^{(1/3)}$ vérifie $0 < \mathcal{H}^s(\mathcal{C}^{(1/3)}) < \infty$ lorsque $s = \log 2 / \log 3$.

La dimension de similitude de Φ est l'unique solution $s \geq 0$ de l'équation $2(1/3)^s = 1$, soit $\dim_S \Phi = \dim_H \mathcal{C}^{(1/3)} = \log 2 / \log 3$.

8. Mesures invariantes pour un IFS

NOTRE objectif est maintenant de savoir déterminer une dimension de Hausdorff dans le cas d'exemples simples, mais non triviaux. Nous commençons par introduire un outil précieux pour minorer les dimensions de Hausdorff : le concept de mesure Frostman.

Il s'agit alors de savoir construire des mesures Frostman. Nous associons donc à tout IFS défini sur un espace métrique compact, ou bien sur \mathbb{R}^d , une mesure borélienne de probabilité "invariante". Dans les bons cas, ces mesures invariantes seront Frostman, ce qui nous permettra au chapitre 9 de déterminer la dimension de Hausdorff de certains compacts auto-similaires.

L'outil essentiel pour construire ces mesures invariantes est un résultat fondamental de compacité, pour l'ensemble des mesures de probabilité sur un espace métrique compact muni d'une topologie qui avait déjà été évoquée au chapitre 3 : la topologie faible-*

A Principe de répartition de masse

La partie délicate, pour estimer une dimension de Hausdorff, est de la minorer. Dans l'exercice 7.23, nous avons réussi à minorer la dimension de Hausdorff du Cantor $\mathcal{C}^{(1/3)}$ par un raisonnement *ad hoc*, dont on perçoit bien qu'il ne sera pas aisé à généraliser. Pour minorer les dimensions de Hausdorff d'espaces plus généraux, nous utiliserons le concept de mesure Frostman.

Définition 8.1. Mesures Frostman

Soient X un espace métrique et $\alpha \geq 0$. Une mesure borélienne finie m sur X est α -Frostman s'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout point $x \in X$ et tout rayon $r > 0$, la mesure de la boule $B(x, r)$ vérifie

$$m(B(x, r)) \leq cr^\alpha.$$

Remarque 8.2. La mesure m étant finie, la condition d'être α -Frostman porte uniquement sur la mesure des boules de petit rayon.

Plus une mesure est α -Frostman pour une grande valeur du paramètre α , mieux elle se répartit sur l'espace X : elle ne se concentre pas sur de toutes petites boules.

Exemple 8.3. • Une mesure comportant des atomes (i.e. pour laquelle certains points sont de mesure strictement positive) est 0-Frostman, mais pas mieux.

- Une mesure borélienne finie (non nulle) sur \mathbb{R}^d ne peut être α -Frostman avec $\alpha > d$ (utiliser la norme sup, c'est plus commode, et découper une boule de rayon 1 en k^d boules de rayons $1/k$).

- La mesure de Lebesgue λ_d sur \mathbb{R}^d (ou plutôt, sa restriction à une boule) est d -Frostman. C'est donc la régularité maximale.

Comment utiliserons-nous ce concept de mesure Frostman pour estimer des dimensions de Hausdorff?

Soit une mesure borélienne qui charge le borélien $A \subset X$, c'est-à-dire telle que $m(A) > 0$. Le fait que la mesure m soit Frostman permet de quantifier la portion de A recouverte un ouvert $V \subset X$, en fonction de son diamètre $|V|$. C'est ce que nous avons utilisé pour minorer $\mathcal{H}^s([0, 1]^d)$ à la proposition 7.9 : nous avons en effet fait intervenir la mesure de Lebesgue λ_d et (sans le dire en ces termes...) le fait que celle-ci est d -Frostman. Vous remarquerez que, une fois la mesure de Lebesgue remplacée par notre mesure Frostman, la preuve du théorème 8.4 est semblable à celle de la proposition 7.9.

Théorème 8.4. Principe de répartition de masse

Soient X un espace métrique et $A \subset X$ un borélien. Soit $\alpha > 0$. On suppose qu'il existe une mesure borélienne finie m sur X vérifiant :

- (1) la mesure m charge A , c'est-à-dire que $m(A) > 0$
- (2) la mesure m est α -Frostman.

Alors on a $\mathcal{H}^\alpha(A) > 0$, et donc $\dim_H A \geq \alpha$.

Preuve Il sera plus commode de définir ici les mesures de Hausdorff en utilisant les recouvrement par des boules (exercice 7.8).

Soit donc $A \subset \cup_{i \in \mathbb{N}} V_i$ un recouvrement de A par des boules. Il existe une constante $c > 0$ telle qu'on ait les inégalités :

$$0 < m(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} m(V_i) \leq c \sum_{i \in \mathbb{N}} |V_i|^\alpha.$$

Ainsi $\mathcal{H}^\alpha(A) \geq m(A)/c > 0$ et $\dim_H(A) \geq \alpha$. □

Le principe de répartition de masse admet une réciproque, plus délicate, que nous énonçons ci-dessous sans démonstration.

Théorème 8.5. Lemme de Frostman

Soit $s \geq 0$ et un borélien $A \subset \mathbb{R}^d$ pour lequel $\mathcal{H}^s(A) > 0$. Il existe alors une mesure borélienne finie sur \mathbb{R}^d qui charge A , et qui est s -Frostman.

En particulier, si $0 \leq s < \dim_H(A)$, il existe une mesure s -Frostman qui charge A . Mais ce n'est pas toujours vrai pour $s = \dim_H(A)$.

B Compacité faible-*, cas séparable

La topologie faible-* sur le dual E' d'un espace vectoriel normé quelconque sera introduite au chapitre 10. Dans ce paragraphe, nous ne la définissons que sur la boule unité d'un espace vectoriel normé E séparable. Les applications que nous en proposerons ne sortiront pas de ce cadre.

Soit E un espace vectoriel normé, que nous supposons réel pour fixer les idées. Jusqu'ici, le dual continu $E' = L_c(E, \mathbb{R})$ était muni de la "topologie forte", associée à la norme subordonnée définie pour $f \in E'$ par

$$\|f\| = \sup_{x \in E, \|x\|=1} |f(x)|.$$

Rappelons que cette topologie est la "topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E " (remarque 2.2). Plus précisément :

Exercice 8.6. Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et f des éléments de E' . Montrer que sont équivalents :

- $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$;
- la suite d'applications $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformément vers $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ sur chaque partie bornée de E .

Vous savez que la boule unité d'un espace vectoriel normé n'est compacte que si cet espace est de dimension finie (théorème de compacité de Riesz).

Exercice 8.7. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que le dual continu E' est de dimension finie si et seulement si E est de dimension finie.

En particulier la boule unité de E' , où E est l'un des espaces fonctionnels qui nous intéresse ($\ell^p(\mathbb{N})$, $L^p(\mathbb{R})$, $C^0(X, \mathbb{R})$...) ne sera jamais compacte pour la topologie forte. Qu'à cela ne tienne, nous allons changer de topologie ☺!

Le chemin est tout tracé si l'on se souvient du théorème 3.20, qui fleurait bon la compacité. Il suffit en effet d'exhiber une métrique sur la boule $B_{E'}$ dont les suites convergentes sont les suites qui convergent simplement.

Théorème 8.8. Banach-Alaoglu séparable

Soient E un espace vectoriel normé, que l'on suppose séparable, et $B_{E'}$ la boule unité fermée du dual :

$$B_{E'} = \{f \in E', \|f\| \leq 1\}.$$

(1) Il existe une distance δ sur $B_{E'}$ qui induit sur cette boule la topologie de la convergence simple sur E , c'est-à-dire telle que pour une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et f dans $B_{E'}$:

$$\delta(f_n, f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \forall x \in E, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x).$$

(2) Deux telles distances sur $B_{E'}$ sont topologiquement équivalentes.

(3) La boule unité $(B_{E'}, \delta)$ du dual, pour cette distance associée à la convergence simple, est compacte.

Remarque 8.9. La topologie dont nous munissons $B_{E'}$ dans le théorème précédent et qui, par définition, est la topologie de la convergence simple sur E , est appelée topologie faible-*. Dans le cas qui nous concerne ici, c'est-à-dire lorsque l'espace E est supposé séparable, la topologie faible-* sur la boule unité $B_{E'}$ est métrisable (propriété (1)).

La propriété (3) s'exprime en disant que la boule unité du dual $B_{E'}$ est *-faiblement compacte.

Preuve Soient une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $B_{E'}$, et $f \in B_{E'}$. Rappelons que nous avons vu, au cours de la démonstration du théorème 3.20, que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur E si et seulement cette suite converge simplement vers f sur une partie dense de E (cela résultait du lemme crucial d'Ascoli 3.14, les formes linéaires $f_n \in B_{E'}$ étant 1-lipschitziennes).

(1) Puisque l'espace E est séparable, nous pouvons choisir une famille $D = \{x_p, p \in \mathbb{N}\}$ dénombrable, et dense dans E . On peut même supposer que $x_p \neq 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Posons alors, pour $f, g \in B_{E'}$:

$$\delta(f, g) = \sum_{p \in \mathbb{N}} 2^{-p} \frac{|f(x_p) - g(x_p)|}{\|x_p\|}. \quad (8.1)$$

Cette série converge car on a $|f(x_p) - g(x_p)| \leq \|f - g\| \|x_p\| \leq 2 \|x_p\|$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ puisque $f, g \in B_{E'}$.

Il est alors facile de vérifier que δ est bien une distance sur $B_{E'}$: en particulier si $\delta(f, g) = 0$, c'est que f et g coïncident sur une partie dense (tous les x_p), et donc sur E par continuité de f et g .

Nous devons maintenant étudier les suites convergentes dans l'espace métrique $(B_{E'}, \delta)$. Supposons en un premier temps que $\delta(f_n, f) \rightarrow 0$. Alors, on a $f_n(x_p) \rightarrow f(x_p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et donc, comme rappelé en début de preuve, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f .

Supposons maintenant que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f . En particulier, $f_n(x_p) \rightarrow f(x_p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Le terme général de la série définissant $\delta(f_n, f)$ est majoré par 2^{-p+1} (terme général d'une série convergente) et tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Il suit que $\delta(f_n, f) \rightarrow 0$.

(2) Si deux distances δ_1 et δ_2 sur $B_{E'}$ satisfont la propriété (1), elles ont les mêmes suites convergentes. La caractérisation séquentielle de la continuité assure alors que l'application $\text{Id} : (B_{E'}, \delta_1) \rightarrow (B_{E'}, \delta_2)$ est un homéomorphisme, c'est-à-dire que ces deux distances sont topologiquement équivalentes.

(3) Maintenant qu'on a montré que, sur la boule $B_{E'}$, la topologie de la convergence simple est métrisable (car associée à la distance δ), cette assertion découle du critère de Bolzano-Weierstrass et du théorème 3.20. \square

Remarque 8.10. Attention ! Excepté en dimension finie, la topologie de la convergence simple (ou topologie faible-*) sur le dual E' tout entier ne sera jamais métrisable. Voir la proposition 10.49.

Le seul mérite de l'expression (8.1) choisie pour définir une distance δ compatible avec la topologie faible-* sur $B_{E'}$ est de convenir sur tout espace vectoriel normé séparable E . On pourra être amenés, comme au paragraphe D où l'on introduit la distance de Hutchinson d_{ht} , à remplacer cette distance par une autre distance, qui lui sera topologiquement équivalente, et dont le choix sera dicté les circonstances.

Exercice 8.11. La topologie forte est plus forte (et est strictement plus forte en dimension infinie) que la topologie faible-*. En effet :

1. Montrer que l'application $\text{Id} : (B_{E'}, \|\cdot\|) \rightarrow (B_{E'}, \delta)$ est toujours continue.
2. Montrer que $\text{Id} : (B_{E'}, \delta) \rightarrow (B_{E'}, \|\cdot\|)$ est continue si et seulement si E est de dimension finie.

C Mesures de probabilité sur X compact

Dans ce paragraphe, X est un espace métrique compact, et E est l'espace vectoriel $(C^0(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ des fonctions continues $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Nous commençons par remarquer que le théorème de Banach-Alaoglu séparable 8.8 s'applique au dual E' de E .

Lemme 8.12. Soit X un espace métrique compact. L'espace $E = C^0(X, \mathbb{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme, est séparable.

Preuve Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on recouvre l'espace métrique compact X par un nombre fini de boules $(B(x_i, 1/n))_{i \in I_n}$ et on considère une partition de l'unité $(\varphi_i)_{i \in I_n}$ associée à ce recouvrement de X (corollaire 6.12). Par construction, on a $\sum_{i \in I_n} \varphi_i \equiv 1$ avec $\text{supp} \varphi_i \subset B(x_i, 1/n)$ et donc, ce qui nous suffira ici, φ_i nulle en dehors de la boule $B(x_i, 1/n)$.

L'espace vectoriel $F = \text{vect}_{\mathbb{Q}}\{\varphi_i \mid i \in I_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ engendré sur \mathbb{Q} par les φ_i (pour $i \in \cup_n I_n$) est dénombrable. Montrons que $F \subset E$ est dense.

Soit $f \in E$ une fonction continue sur X , et $\varepsilon > 0$. Par le théorème de Heine, il existe $\eta > 0$ tel que pour $x, y \in X$ avec $d(x, y) \leq \eta$, on ait $d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/n \leq \eta$. On a alors, pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} |f(x) - \sum_{i \in I_n} f(x_i) \varphi_i(x)| &= |f(x) \left(\sum_{i \in I_n} \varphi_i(x) \right) - \sum_{i \in I_n} f(x_i) \varphi_i(x)| \\ &= \left| \sum_{i \in I_n} (f(x) - f(x_i)) \varphi_i(x) \right| \leq \varepsilon \sum_{i \in I_n} \varphi_i(x) = \varepsilon, \end{aligned}$$

puisque quand $\varphi_i(x) \neq 0$, on a $x \in B(x_i, 1/n)$ et donc $|f(x) - f(x_i)| \leq \varepsilon$.

Il suffit alors de remplacer chaque réel $f(x_i)$ par un rationnel $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ proche pour approcher f uniformément à 2ε près par une combinaison linéaire $\sum_{i \in I_n} \alpha_i \varphi_i$ à coefficients rationnels. Ceci montre que $F \subset E$ est dense. \square

Comme sous-produit de cette démonstration, nous obtenons le résultat de densité suivant, qui nous sera utile par la suite.

Lemme 8.13. *Soit X un espace métrique compact. Le sous-espace vectoriel Lip des fonctions lipschitziennes sur X est dense dans $E = (C^0(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.*

Preuve Les fonctions “distance à une partie” sont 1-lipschitziennes. Il suit alors de l’exercice 8.14 et de la construction d’une partition de l’unité (corollaire 6.12) que chacune des fonctions φ_i de la démonstration précédente, et donc chaque fonction de l’ensemble dense F , est lipschitzienne. Le lemme est prouvé. \square

Exercice 8.14.

1. Soient X un espace métrique ainsi que $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitziennes et bornées. Montrer que le produit fg est une fonction lipschitzienne.
2. Soit X métrique compact. Retrouver la densité de Lip dans $(C^0(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ en utilisant le théorème de Stone-Weierstrass.

Lemme 8.15. *On définit une application $\mathcal{I} : m \in \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{I}_m \in B_{E'}$, sur l’ensemble des mesures boréliennes de probabilité $\mathcal{P}(X)$ sur X et à valeurs dans la boule unité du dual $B_{E'}$, en posant pour toute $f \in E = C^0(X, \mathbb{R})$:*

$$\mathcal{I}_m(f) = \int_X f \, dm.$$

Cette application \mathcal{I} est une bijection sur son image $\mathcal{I}(\mathcal{P}(X)) \subset B_{E'}$.

Une forme linéaire $T \in E'$ appartient à l’image $\mathcal{I}(\mathcal{P}(X))$ si et seulement si elle est positive et vérifie $T(\mathbf{1}) = 1$, où $\mathbf{1} : X \rightarrow \mathbb{R}$ désigne la fonction constante égale à 1.

Preuve Conséquence immédiate du théorème de représentation de Riesz-Markov 6.5, puisqu’une mesure borélienne m sur X est de probabilité si et seulement si $m(X) = \mathcal{I}_m(\mathbf{1}) = 1$. \square

Nous identifierons donc désormais l’ensemble des mesures de probabilité boréliennes $\mathcal{P}(X)$ à son image $\mathcal{I}(\mathcal{P}(X)) \subset B_{E'}$.

Théorème 8.16. *Soient X un espace métrique compact et $E = C^0(X, \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.*

Soit $\mathcal{P}(X) \subset B_{E'}$ l’ensemble des mesures boréliennes de probabilité sur X . La topologie faible- fait de $\mathcal{P}(X)$ un espace métrisable compact.*

Preuve D'après le théorème 8.8, qui s'applique puisque E est séparable, il suffit de montrer que $\mathcal{P}(X) \subset B_{E'}$ est fermé pour la topologie faible-*. Ce sera de nouveau une conséquence du théorème de représentation de Riesz-Markov.

Soit en effet une suite $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de mesures boréliennes de probabilité sur X . Nous associons à chaque m_k la forme linéaire sur E définie par

$$\mathcal{I}_k(f) = \int_X f dm_k,$$

et nous supposons que la suite $(\mathcal{I}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mathcal{I} \in B_{E'}$ pour la topologie faible-*, c'est-à-dire simplement. Nous voulons montrer que \mathcal{I} provient d'une mesure borélienne de probabilité sur X .

La convergence simple de $(\mathcal{I}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vers \mathcal{I} assure que, pour toute fonction positive $f \in E$, on a

$$\mathcal{I}(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{I}_k(f) \geq 0.$$

Donc, d'après le théorème de représentation de Riesz-Markov, la forme linéaire \mathcal{I} provient d'une mesure borélienne finie m sur X . De plus,

$$\mathcal{I}(\mathbf{1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{I}_k(\mathbf{1}) = 1,$$

donc m est bien une mesure de probabilité. □

D Mesure invariante pour un IFS

Dans ce paragraphe, nous utilisons le théorème de Banach-Alaoglu (ou plutôt sa conséquence 8.16) pour associer, à tout IFS, une famille de mesures de probabilité.

D.1 Action d'un IFS sur les mesures de probabilité

Commençons par rappeler la notion de mesure image, et comment cette notion se comporte par rapport à l'intégrale.

Définition 8.17. Mesure image Soit $f : X \rightarrow Y$ une application mesurable entre deux espaces mesurables, et m une mesure sur X . L'expression

$$f_*m(A) = m(f^{-1}(A))$$

pour toute partie mesurable $A \subset Y$ définit une mesure f_*m sur Y pour laquelle $f_*m(Y) = m(X)$.

En particulier si X et Y sont deux espaces métriques munis de leur tribu borélienne, et m est une mesure borélienne de probabilité sur X , une application continue $f : X \rightarrow Y$ définit une mesure borélienne de probabilité f_*m sur Y .

Proposition 8.18. *Pour une fonction $h : Y \rightarrow [0, +\infty]$ mesurable positive, on aura $\int_X (h \circ f) dm = \int_Y h d(f_*m)$ (\dagger).*

*Pour une fonction $h : Y \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable, la fonction $h \circ f$ est intégrable sur X pour la mesure m si et seulement si la fonction h est intégrable sur Y pour la mesure image f_*m , avec alors égalité des intégrales (\dagger).*

Preuve L'égalité $\int_X (h \circ f) dm = \int_Y h d(f_*m)$ est immédiate, par définition de f_*m , lorsque h est une fonction étagée. Revenir à la définition de l'intégrale d'une fonction mesurable positive, puis d'une fonction intégrable à valeurs réelles ou complexes, pour montrer l'égalité dans le cas général. \square

Le résultat suivant sera d'une importance cruciale pour déterminer la dimension de Hausdorff de compacts auto-similaires. On l'utilisera pour des valeurs adéquates des constantes $(c_i)_{1 \leq i \leq p}$ (théorèmes 9.4 et lemme 9.36).

Théorème 8.19. *Soit X un espace métrique compact. Soient $f_i : X \rightarrow X$ une famille d'applications k -lipschitziennes, avec $k < 1$, et une famille de réels $0 \leq c_i \leq 1$ ($1 \leq i \leq p$) tels que $\sum_{i=1}^p c_i = 1$.*

Alors il existe une unique mesure borélienne de probabilité m sur X telle que

$$m = \sum_{i=1}^p c_i (f_i)_*m.$$

Définition 8.20. Mesure invariante

On note $\Phi = (f_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $c = (c_i)_{1 \leq i \leq p}$. L'unique mesure de probabilité sur X satisfaisant la relation

$$m = \sum_{i=1}^p c_i (f_i)_*m \tag{8.2}$$

sera appelée la "mesure (de probabilité) invariante associée à (Φ, c) ".

La preuve du théorème 8.19 nécessitera un peu de travail. On commence par la remarque élémentaire suivante.

Lemme 8.21. *Soient X un espace métrique, $f_i : X \rightarrow X$ ($1 \leq i \leq p$) des applications continues et c_1, \dots, c_p des réels tels que $c_i \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq p$ et $\sum_{i=1}^p c_i = 1$. Soit m une mesure borélienne de probabilité sur X . Alors, la mesure*

$$\sum_{i=1}^p c_i (f_i)_*m$$

est également une mesure borélienne de probabilité sur X .

Preuve Cela découle, par définition des mesures images $(f_i)_*m$, de ce que

$$\left(\sum_{i=1}^p c_i (f_i)_*m \right)(X) = \sum_{i=1}^p c_i m(f_i^{-1}(X)) = \sum_{i=1}^p c_i m(X) = \sum_{i=1}^p c_i = 1. \quad \square$$

Pour prouver le théorème 8.19, nous sommes ramenés à montrer que la transformation suivante admet un unique point fixe :

$$\tau : m \in \mathcal{P}(X) \rightarrow \sum_{i=1}^p c_i (f_i)_* m \in \mathcal{P}(X).$$

Nous pensons immédiatement au théorème de Banach-Picard ! Pour être en mesure d'appliquer ce théorème, nous allons munir $\mathcal{P}(X)$ d'une métrique d_{ht} topologiquement équivalente à la métrique δ , et qui en fera donc également un espace métrique compact $(\mathcal{P}(X), d_{ht})$. C'est la distance de Hutchinson. Le point fondamental est que l'application $\tau : (\mathcal{P}(X), d_{ht}) \rightarrow (\mathcal{P}(X), d_{ht})$ est maintenant strictement contractante (lemme 8.26).

D.2 Distance de Hutchinson

Soit X un espace métrique compact. La distance de Hutchinson d_{ht} sur $\mathcal{P}(X)$ est la distance de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions 1-lipschitziennes sur X .

Notation 8.22. Pour tout $k > 0$, on notera Lip_k l'ensemble des fonctions k -lipschitziennes sur X . On a $\text{Lip}_k = \{kh \mid h \in \text{Lip}_1\}$.

Lorsque $a \in X$, on notera également $\text{Lip}_1(a) = \{h \in \text{Lip}_1 \mid h(a) = 0\}$ l'ensemble des fonctions 1-lipschitziennes sur X qui s'annulent au point a .

Lemme 8.23. Distance de Hutchinson sur $\mathcal{P}(X)$

Soit X un espace métrique compact. L'expression

$$d_{ht}(m_1, m_2) = \sup \left\{ \left| \int_X h \, dm_1 - \int_X h \, dm_2 \right|, h \in \text{Lip}_1 \right\}$$

définit une distance sur l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des mesures boréliennes de probabilités sur X .

Avant de démontrer ce lemme, donnons une expression légèrement différente de la distance de Hutchinson, moins intrinsèque puisqu'elle fait intervenir le choix d'un point $a \in X$. L'un des avantages de cette seconde formulation est qu'elle fait intervenir l'espace $\text{Lip}_1(a)$ des fonctions 1-lipschitziennes qui s'annulent au point a ... et que cet espace de fonctions est compact pour la norme sup.

Lemme 8.24. Soient X un espace métrique compact et $a \in X$.

- (1) La famille $\text{Lip}_1(a)$ est une partie compacte de $E = (C^0(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
- (2) On a l'égalité

$$d_{ht}(m_1, m_2) = \sup \left\{ \left| \int_X h \, dm_1 - \int_X h \, dm_2 \right|, h \in \text{Lip}_1(a) \right\} \quad (8.3)$$

pour toutes mesures boréliennes de probabilité m_1 et m_2 .

Preuve 1. Cela résulte du théorème d'Ascoli. En effet, l'espace X est compact, \mathbb{R} est complet, la famille $\text{Lip}_1(a)$ est formée de fonctions qui sont toutes 1-lipschitziennes donc est équicontinue, et en tout point $x \in X$ la valeur d'une fonction $h \in \text{Lip}_1(a)$ est majorée par

$$|h(x)| = |h(x) - h(a)| \leq d(x, a) \leq \text{diam}(X)$$

donc la famille prend en chaque point de X ses valeurs dans une partie relativement compacte de \mathbb{R} . Il suit que $\text{Lip}_1(a)$ est une partie relativement compacte de E . Puisqu'elle est fermée, elle est compacte.

2. Soit $f \in \text{Lip}_1$. La fonction $h = f - f(a)$ appartient à $\text{Lip}_1(a)$ avec, si m_1 et m_2 sont deux mesures boréliennes de probabilité, l'égalité

$$\int_X h dm_1 - \int_X h dm_2 = \int_X f dm_1 - \int_X f dm_2. \quad \square$$

Preuve du lemme 8.23

Soit $a \in X$. En utilisant la définition (8.3) de la distance de Hutchinson on observe que, puisque toute fonction $h \in \text{Lip}_1(a)$ vérifie $\|h\|_\infty \leq \text{diam}(X)$, d_{ht} est bien définie (le sup est fini). Vérifions que d_{ht} est bien une distance sur $\mathcal{P}(X)$.

Le seul point délicat est de montrer que deux mesures boréliennes de probabilité vérifiant $d_{ht}(m_1, m_2) = 0$ sont égales. Dire que $d_{ht}(m_1, m_2) = 0$ signifie que $\int_X h dm_1 = \int_X h dm_2$ pour toute fonction $h \in \text{Lip}_1$. Par linéarité de l'intégrale, on a alors l'égalité $\int_X h dm_1 = \int_X h dm_2$ pour toute fonction lipschitzienne h . L'ensemble des fonctions lipschitziennes étant dense dans $C^0(X, \mathbb{R})$ (lemme 8.12), on en déduit l'égalité $\int_X f dm_1 = \int_X f dm_2$ pour toute fonction continue $f \in C^0(X, \mathbb{R})$. Il suit alors de la proposition 6.17 (ou de l'unicité dans Riesz-Markov 6.5) que les mesures m_1 et m_2 sont égales. \square

Au premier abord, nous n'avons pas changé la face du monde en introduisant cette nouvelle distance. En effet, on a la :

Proposition 8.25. *La distance de Hutchinson d_{ht} et la distance δ sur $\mathcal{P}(X)$ sont topologiquement équivalentes. En particulier, d_{ht} induit sur $\mathcal{P}(X)$ la topologie faible-*, et fait de $\mathcal{P}(X)$ un espace métrique compact*

Preuve Montrons que $\text{Id} : (\mathcal{P}(X), \delta) \rightarrow (\mathcal{P}(X), d_{ht})$ est continue. Nous utiliserons le critère séquentiel de continuité. Soient donc $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et m des mesures boréliennes de probabilité sur X telles que $\delta(m_k, m) \rightarrow 0$, c'est-à-dire telles que la suite d'applications $(\mathcal{I}_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers \mathcal{I} sur E . Nous voulons voir que $d_{ht}(m_k, m) \rightarrow 0$, c'est-à-dire que la suite $(\mathcal{I}_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers \mathcal{I}_m sur $\text{Lip}_1(a) \subset E$.

Cela va résulter du lemme crucial d'Ascoli 3.14.

En effet, la famille $\{\mathcal{I}_{m_k}, k \in \mathbb{N}\} \subset C^0(E, \mathbb{R})$ est équicontinue (ce sont des applications 1-lipschitziennes) et la suite $(\mathcal{I}_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers \mathcal{I}_m sur E ; elle converge donc uniformément sur les parties compactes de E donc en particulier sur $\text{Lip}_1(a)$.

L'application $\text{Id} : (\mathcal{P}(X), \delta) \rightarrow (\mathcal{P}(X), d_{ht})$ est continue bijective, donc $(\mathcal{P}(X), d_{ht})$ est compact comme image continue du compact $(\mathcal{P}(X), \delta)$, et Id réalise un homéomorphisme entre $(\mathcal{P}(X), \delta)$ et $(\mathcal{P}(X), d_{ht})$. \square

Ce que nous avons gagné en introduisant la distance de Hutchinson réside dans la proposition suivante.

Lemme 8.26. *Sous les hypothèses du théorème 8.19, l'application*

$$\tau : m \in (\mathcal{P}(X), d_{ht}) \rightarrow \sum_{i=1}^p c_i (f_i)_*(m) \in (\mathcal{P}(X), d_{ht})$$

est contractante.

Preuve Pour une fonction $h \in \text{Lip}_1$ et chaque application k -lipschitzienne $f_i : X \rightarrow X$, on observe que $h \circ f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ est k -lipschitzienne et s'écrit $h \circ f_i = kH_i$, où $H_i \in \text{Lip}_1$ est une fonction 1-lipschitzienne ($1 \leq i \leq p$). Pour deux mesures boréliennes de probabilité m_1 et m_2 sur X , et toute fonction $h \in \text{Lip}_1$, on aura donc d'après la proposition 8.18 et avec l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \left| \int_X h d(\tau m_1) - \int_X h d(\tau m_2) \right| &= \left| \sum_{i=1}^p c_i \left(\int_X h d((f_i)_* m_1) - \int_X h d((f_i)_* m_2) \right) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^p c_i \left(\int_X (h \circ f_i) dm_1 - \int_X (h \circ f_i) dm_2 \right) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^p c_i k \left(\int_X H_i dm_1 - \int_X H_i dm_2 \right) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^p c_i k \left| \int_X H_i dm_1 - \int_X H_i dm_2 \right| \\ &\leq k \left(\sum_{i=1}^p c_i \right) d_{ht}(m_1, m_2) = k d_{ht}(m_1, m_2). \end{aligned}$$

En passant au sup en les fonctions $h \in \text{Lip}_1$, on obtient la majoration $d_{ht}(\tau m_1, \tau m_2) \leq k d_{ht}(m_1, m_2)$. Autrement dit, τ est bien contractante. \square

Preuve du théorème 8.19 Conséquence immédiate du théorème de point fixe de Banach-Picard puisque l'on a démontré que l'application $\tau : (\mathcal{P}(X), d_{ht}) \rightarrow (\mathcal{P}(X), d_{ht})$ est strictement contractante (lemme 8.26), et que l'espace $(\mathcal{P}(X), d_{ht})$ est compact (proposition 8.25) donc complet. \square

D.3 Mesure invariante pour un IFS sur \mathbb{R}^d

Nous avons montré l'existence et l'unicité d'une mesure borélienne de probabilité invariante, associée à un IFS sur un espace métrique compact. En nous ramenant au cas compact, nous allons généraliser sans peine ce résultat à un IFS défini sur \mathbb{R}^d . Rien de bien surprenant dans ce paragraphe. Le lemme suivant fait l'essentiel du travail.

Lemme 8.27. Support des mesures invariantes

Soient $f_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une famille d'applications strictement contractantes, et une famille de nombres positifs $c_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq p$) tels que $\sum_{i=1}^p c_i = 1$.

On note $\Phi = (f_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $c = (c_i)_{1 \leq i \leq p}$. Soit K_0 l'attracteur de Φ .

Toute mesure borélienne de probabilité invariante $m \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ associée à (Φ, c) est supportée par K_0 , c'est-à-dire est telle que $m(K_0) = 1$.

Preuve Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un borélien. On a $A \subset f_i^{-1}(f_i(A)) \subset f_i^{-1}(\cup_{j=1}^p f_j(A))$. En utilisant successivement la définition de Φ , l'invariance de m , la croissance de m et enfin le fait que $\sum c_i = 1$, il suit que

$$m(\Phi(A)) = m(\cup_{j=1}^p f_j(A)) = \sum_{i=1}^p c_i m(f_i^{-1}(\cup_{j=1}^p f_j(A))) \geq \sum_{i=1}^p c_i m(A) = m(A). \quad (8.4)$$

Soit alors $\varepsilon > 0$, et choisissons $R > 0$ suffisamment grand pour que l'on ait :

1. $m(B_f(0, R)) \geq 1 - \varepsilon$ (le petit théorème de convergence monotone assure en effet que $1 = m(\mathbb{R}^d) = \lim_{R \rightarrow \infty} \nearrow m(B_f(0, R))$)
2. $\Phi(B_f(0, R)) \subset B_f(0, R)$ (voir l'exercice 4.18).

La condition (2) assure que la suite de compacts $(\Phi^n(B_f(0, R)))$ décroît vers le compact attracteur K_0 . On a donc, cette fois-ci par le petit théorème de convergence dominée,

$$m(K_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \searrow m(\Phi^n(B_f(0, R))).$$

Par ailleurs, l'inégalité (8.4) appliquée à $A = B_f(0, R)$ montre que la suite des mesures $m(\Phi^n(B_f(0, R)))$ est croissante. Les mesures $m(\Phi^n(B_f(0, R)))$ forment donc une suite constante, et il vient $m(K_0) \geq 1 - \varepsilon$. Le réel positif ε étant arbitraire, on a $m(K_0) = 1$. \square

Corollaire 8.28. Soient $f_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ strictement contractantes, et $c_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq p$) tels que $\sum_{i=1}^p c_i = 1$. On note $\Phi = (f_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $c = (c_i)_{1 \leq i \leq p}$. Soit K_0 l'attracteur de Φ .

Il existe une unique mesure borélienne de probabilité sur \mathbb{R}^d "invariante associée à (Φ, c) ", c'est-à-dire telle que

$$m = \sum_{i=1}^p c_i (f_i)_* m.$$

Cette mesure supportée par l'attracteur K_0 , c'est-à-dire que $m(K_0) = 1$.

Preuve L'IFS $\Phi = (f_1, \dots, f_p)$ sur \mathbb{R}^d fournit, par restriction à son compact attracteur K_0 , un IFS $\tilde{\Phi} = (f_1, \dots, f_p)$ sur K_0 , avec $\tilde{f}_i = (f_i)|_{K_0} : K_0 \rightarrow K_0$. On note $m_0 \in \mathcal{P}(K_0)$ la mesure de probabilité invariante sous $\tilde{\Phi}$.

Si $m \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ est invariante par Φ , on a vu que $m(K_0) = 1$ donc m se restreint en une mesure borélienne de probabilité sur K_0 , qui est invariante par $\tilde{\Phi}$, et donc égale à m_0 . D'où l'unicité de m . Réciproquement, si on étend $m_0 \in \mathcal{P}(K_0)$ par 0 à \mathbb{R}^d , on obtient une mesure $m \in \mathcal{P}(X)$ qui est Φ -invariante, d'où l'existence. \square

Si on en éprouve le besoin, on peut rajouter des détails à la preuve ci-dessus, comme suit.

Lemme 8.29. *Soit m une mesure borélienne de probabilité sur \mathbb{R}^d telle que $m(K_0) = 1$. On pose, pour tout borélien $A \subset K_0$, $m_0(A) = m(A)$.*

Alors m_0 est une mesure borélienne de probabilité sur K_0 .

De plus, la mesure m sur \mathbb{R}^d est une mesure invariante associée à (Φ, c) si et seulement si la mesure m_0 sur K_0 est une mesure invariante associée à $(\tilde{\Phi}, c)$.

Preuve La première assertion est immédiate.

La seconde est assez évidente, mais si on veut fouiller les détails cela résulte de ce que, pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^d$ et tout $1 \leq i \leq p$:

$$\begin{aligned} (f_i^{-1}A) \cap K_0 &= \{x \in K_0, f_i(x) \in A\} = \{x \in K_0, f_i(x) \in A \cap K_0\} \\ &= (\tilde{f}_i^{-1})(A \cap K_0). \end{aligned}$$

Puisque m est supportée par K_0 , on a donc pour toute partie $A \subset \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p c_i (f_i)_* m(A) &= \sum_{i=1}^p c_i m(f_i^{-1}(A)) = \sum_{i=1}^p c_i m(f_i^{-1}(A) \cap K_0) \\ &= \sum_{i=1}^p c_i m(\tilde{f}_i^{-1}(A \cap K_0)) = \sum_{i=1}^p c_i m_0(\tilde{f}_i^{-1}(A \cap K_0)) \\ &= \sum_{i=1}^p c_i (\tilde{f}_i)_* m_0(A \cap K_0) \end{aligned}$$

par définition de m_0 . Donc m est une mesure invariante associée à (Φ, c) si et seulement si m_0 est une mesure invariante associée à $(\tilde{\Phi}, c)$. \square

9. Dimension de Hausdorff : exemples

DANS ce chapitre, nous montrons que, si un IFS Φ sur \mathbb{R}^d euclidien constitué de similitudes satisfait une condition géométrique simple (condition de Moran 9.29), alors la dimension de Hausdorff de son attracteur est déterminée explicitement par les rapports de ces similitudes.

A Le modèle du décalage

Soit $p \geq 2$. Dans ce paragraphe, nous étudions un IFS modèle, défini sur le produit infini $\mathcal{C}_p = \{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}^*}$, et qui nous permettra d'étudier d'autres IFS (proposition 9.18, théorèmes 9.24 et 9.34).

Un élément $a \in \mathcal{C}_p$ est un mot infini $a = (a_1 \dots a_n \dots)$ dont les lettres sont prises dans l'alphabet à p éléments $\{1, \dots, p\}$. Pour $1 \leq i \leq p$, on introduit le décalage $\psi_i : (a_1 \dots a_n \dots) \in \mathcal{C}_p \mapsto (i a_1 \dots a_n \dots) \in \mathcal{C}_p$, par la lettre i . L'image $\psi_i(\mathcal{C}_p)$ est l'ensemble des éléments de \mathcal{C}_p dont la première lettre est i . On a donc une réunion disjointe

$$\mathcal{C}_p = \bigsqcup_{1 \leq i \leq p} \psi_i(\mathcal{C}_p).$$

On se donne également des facteurs de contraction $\mathfrak{K} = (k_1, \dots, k_p)$, où $0 < k_i < 1$ pour $1 \leq i \leq p$.

Lemme 9.1. *Soient $a \neq b \in \mathcal{C}_p$ et $n = \min\{\ell \in \mathbb{N}^* \mid a_\ell \neq b_\ell\}$. On pose*

$$d_{\mathfrak{K}}(a, b) = k_{a_1} \dots k_{a_{n-1}},$$

(avec $d_{\mathfrak{K}}(a, b) = 1$ si $n = 1$). Alors $d_{\mathfrak{K}}$ définit une distance sur \mathcal{C}_p .

Preuve C'est même une distance "ultra-métrique".

Elle satisfait en effet l'inégalité $d_{\mathfrak{K}}(a_1, a_3) \leq \sup(d_{\mathfrak{K}}(a_1, a_2), d_{\mathfrak{K}}(a_2, a_3))$, qui est plus forte que l'inégalité triangulaire. \square

Lemme 9.2. *La distance $d_{\mathfrak{K}}$ sur \mathcal{C}_p induit la topologie produit, et fait de $(\mathcal{C}_p, d_{\mathfrak{K}})$ un espace métrique compact. Pour cette distance, on a*

$$d_{\mathfrak{K}}(\psi_i(a), \psi_i(b)) = k_i d_{\mathfrak{K}}(a, b).$$

L'application ψ_i multiplie donc les distances par k_i .

On munit l'ensemble fini $\{1, \dots, p\}$ de la topologie discrète, métrisable. La topologie produit, sur un produit quelconque d'espaces topologiques, sera introduite au chapitre 10 (définition 10.19).

Notons que l'espace \mathcal{C}_p qui nous intéresse ici est métrisable en tant que produit dénombrable d'espaces métrisables (voir le polycopié de "Topologie, calcul différentiel", ou l'exercice 10.24)

Preuve Notons δ une distance sur \mathcal{C}_p qui induit la topologie produit.

L'application $\text{Id} : (\mathcal{C}_p, \delta) \rightarrow (\mathcal{C}_p, d_{\mathfrak{K}})$ est continue. En effet, dire que a et b sont proches pour la topologie produit (ou pour la distance δ), c'est dire qu'elles ont leurs n premiers termes égaux, avec n grand. On a alors $d_{\mathfrak{K}}(a, b) \leq k^{n-1}$, où l'on a posé $k = \max\{k_i, 1 \leq i \leq p\} < 1$. Et donc $d_{\mathfrak{K}}(a, b)$ est petit si $\delta(a, b)$ est petit : c'est la continuité.

Puisque cette application est bijective, et que l'espace (\mathcal{C}_p, δ) est compact, c'est un homéomorphisme.

Le fait que chaque ψ_i multiplie les distances par k_i est immédiat. \square

Lemme 9.3. *La famille $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_p)$ constitue un IFS sur $(\mathcal{C}_p, d_{\mathfrak{K}})$. Son attracteur est le compact \mathcal{C}_p lui-même.*

Mieux, on a l'égalité $\mathcal{C}_p = \sqcup_{1 \leq i \leq p} \psi_i(\mathcal{C}_p)$, où l'union est disjointe.

Preuve Immédiat. \square

Comme dans l'exemple de l'ensemble triadique de Cantor, on a "séparation stricte" : l'attracteur $\mathcal{C}_p = \sqcup_{1 \leq i \leq p} \psi_i(\mathcal{C}_p)$ est réunion disjointe de ses images. Nous y reviendrons (voir la définition 9.20).

Théorème 9.4. *Soit $\mathfrak{K} = (k_1, \dots, k_p)$, où $0 < k_i < 1$ pour $1 \leq i \leq p$. Soit $s > 0$ l'unique solution de l'équation $\sum_{i=1}^p k_i^s = 1$.*

Soit μ la mesure borélienne de probabilité invariante sur \mathcal{C}_p associée à (Ψ, c) , où $c = (k_1^s, \dots, k_p^s)$.

La mesure μ sur l'espace métrique $(\mathcal{C}_p, d_{\mathfrak{K}})$ est s -Frostman.

On a $0 < \mathcal{H}^s(\mathcal{C}_p, d_{\mathfrak{K}}) < \infty$, et $\dim_H(\mathcal{C}_p, d_{\mathfrak{K}}) = s$.

Remarque 9.5. • Chaque distance $d_{\mathfrak{K}}$ induit sur \mathcal{C}_p la topologie produit. Mais ces distances ne sont pas Lipschitz-équivalentes entre elles. On observe que la dimension de Hausdorff de l'espace métrique $(\mathcal{C}_p, d_{\mathfrak{K}})$ dépend de la métrique $d_{\mathfrak{K}}$ (la dimension de Hausdorff n'est pas une notion topologique!).

• Une fois que l'on sait que $0 < \mathcal{H}^s(\mathcal{C}_p, d_{\mathfrak{K}}) < \infty$ à l'exposant critique s , il est facile d'identifier la mesure invariante μ . C'est l'objectif de l'exercice suivant.

Exercice 9.6. Soit $s = \dim_H \mathcal{C}_p$. Montrer que la mesure de probabilité invariante μ associée à (Ψ, c) , et la mesure de Hausdorff \mathcal{H}^s sur $(\mathcal{C}_p, d_{\mathfrak{K}})$, sont proportionnelles. Plus précisément, si $A \subset \mathcal{C}_p$ est un borélien, on a l'égalité

$$\mu(A) = \frac{\mathcal{H}^s(A)}{\mathcal{H}^s(\mathcal{C}_p)}.$$

Pour simplifier les notations dans la démonstration qui va suivre, nous fixons désormais l'entier p ainsi que la famille de paramètres \mathfrak{K} , et nous désignons par $C = (\mathcal{C}_p, d_{\mathfrak{K}})$ l'ensemble de Cantor \mathcal{C}_p muni de la distance $d_{\mathfrak{K}}$.

On introduit, pour tout multi-indice $(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, p\}^n$, le cylindre

$$C_{i_1 \dots i_n} = \psi_{i_1} \circ \dots \circ \psi_{i_n}(C). \quad (9.1)$$

Ce cylindre $C_{i_1 \dots i_n}$ est constitué des suites $a = (a_\ell)$ pour les quelles $a_\ell = i_\ell$ lorsque $1 \leq \ell \leq n$. On a, pour tout $n \geq 1$, la réunion disjointe

$$C = \bigsqcup_{\{1, \dots, p\}^n} C_{i_1 \dots i_n}. \quad (9.2)$$

A.1 Majoration de $\dim_H(\mathcal{C}_p, d_{\mathfrak{K}})$

Nous allons montrer que $\mathcal{H}^s(\mathcal{C}_p, d_{\mathfrak{K}}) < \infty$, en utilisant des recouvrements de C par des cylindres. Le diamètre de $C = (\mathcal{C}_p, d_{\mathfrak{K}})$ est 1. Chaque application ψ_i multipliant, dans C , les distances par k_i , le diamètre d'un cylindre est

$$|C_{i_1 \dots i_n}| = k_{i_1} \dots k_{i_n}.$$

Soit $\delta > 0$. Soit $k = \max(k_i) < 1$. On choisit $n \geq 1$ assez grand pour que $k^n < \delta$. Le recouvrement (9.2) est alors un recouvrement de C par des parties de diamètres au plus δ . Il suit donc que

$$\mathcal{H}_\delta^s(C) \leq \sum_{\{1, \dots, p\}^n} |C_{i_1 \dots i_n}|^s = \sum_{\{1, \dots, p\}^n} (k_{i_1} \dots k_{i_n})^s = \left(\sum_{i=1}^p k_i^s \right)^n = 1. \quad (9.3)$$

Il suit, en faisant tendre δ vers 0, que $\mathcal{H}^s(C) \leq 1$, d'où $\dim_H(\mathcal{C}_p, d_{\mathfrak{K}}) \leq s$. \square

A.2 Minoration de $\dim_H(\mathcal{C}_p, d_{\mathfrak{K}})$

Pour minorer la dimension de Hausdorff, nous allons utiliser le principe de répartition de masse. Il s'agit de montrer que la mesure μ , unique mesure borélienne de probabilité (Ψ, c) -invariante sur $C = (\mathcal{C}_p, d_{\mathfrak{K}})$, est s -Frostman.

Nous commençons par évaluer la mesure des cylindres $C_{i_1 \dots i_n}$.

Lemme 9.7. *La mesure invariante vérifie les égalités*

$$\mu(C_{i_1 \dots i_n}) = (k_{i_1} \dots k_{i_n})^s$$

pour tout $n \geq 0$ et tous multi-indices $(i_1 \dots i_n) \in \{1, \dots, p\}^n$.

Preuve On démontre la propriété annoncée par récurrence sur n .

On commence par observer que $\mu(C) = 1$. Par invariance de μ , on a

$$\mu(C_{i_1 \dots i_n}) = \sum_{j=1}^p k_j^s \mu(\psi_j^{-1}(C_{i_1 \dots i_n})).$$

Lorsque $j \neq i_1$, on a $\psi_j^{-1}(C_{i_1 \dots i_n}) = \emptyset$, tandis que $\psi_{i_1}^{-1}(C_{i_1 \dots i_n}) = C_{i_2 \dots i_n}$, de sorte que $\mu(C_{i_1 \dots i_n}) = k_{i_1}^s \mu(C_{i_2 \dots i_n})$. \square

Nous quantifions maintenant le fait que les $C_{i_1 \dots i_n}$ sont deux à deux disjoints lorsque $(i_1 \dots i_n)$ décrit $\{1, \dots, p\}^n$.

Lemme 9.8. *Pour deux multi-indices $(i_1 \dots i_n) \neq (j_1 \dots j_n)$, on a*

$$d_{\mathfrak{R}}(C_{i_1 \dots i_n}, C_{j_1 \dots j_n}) \geq k_{i_1} \dots k_{i_{n-1}}.$$

Preuve Soit $q = \min\{1 \leq \ell \leq n \mid i_\ell \neq j_\ell\}$. On a alors

$$C_{i_1 \dots i_n} \subset \psi_{i_1} \dots \psi_{i_{q-1}}(\psi_{i_q}(C)), \quad C_{j_1 \dots j_n} \subset \psi_{j_1} \dots \psi_{j_{q-1}}(\psi_{j_q}(C)).$$

Par définition de $d_{\mathfrak{R}}$, on a $d_{\mathfrak{R}}(\psi_{i_q}(C), \psi_{j_q}(C)) = 1$. Le lemme 9.2 assure alors que $d_{\mathfrak{R}}(C_{i_1 \dots i_n}, C_{j_1 \dots j_n}) = k_{i_1} \dots k_{i_{q-1}} \geq k_{i_1} \dots k_{i_{n-1}}$, puisque $k_i < 1$ pour tout $1 \leq i \leq p$. \square

Preuve du théorème 9.4

Nous cherchons une majoration uniforme en $a \in C$ de la mesure des boules pour la distance $d_{\mathfrak{R}}$, de la forme $\mu(B(a, r)) \leq c r^s$ pour une certaine constante $c > 0$.

Soit donc $a = (a_1 \dots a_n \dots) \in C$. Nous pouvons supposer que $r < 1$. La suite $(k_{a_1} \dots k_{a_n})_{n \geq 1}$ décroissant vers 0, il existe un unique entier $n \geq 1$ pour lequel

$$k_{a_1} \dots k_{a_n} \leq r < k_{a_1} \dots k_{a_{n-1}}. \quad (9.4)$$

Le point a appartient à $C_{a_1 \dots a_n}$. On a vu que, si $(i_1 \dots i_n) \neq (a_1 \dots a_n)$, alors

$$d_{\mathfrak{R}}(C_{i_1 \dots i_n}, C_{a_1 \dots a_n}) \geq k_{a_1} \dots k_{a_{n-1}}.$$

Le choix (9.4) de n (majoration de r) assure que la boule $B(a, r)$ ne rencontre aucun des cylindres $C_{i_1 \dots i_n}$ pour $(i_1 \dots i_n) \neq (a_1 \dots a_n)$, et donc est incluse dans $C_{a_1 \dots a_n}$. Il suit, en utilisant cette fois-ci la minoration de r dans (9.4), que :

$$\mu(B(a, r)) \leq \mu(C_{a_1 \dots a_n}) = (k_{a_1} \dots k_{a_n})^s \leq r^s.$$

La mesure μ est donc s -Frostman.

Il suit du principe de répartition de masse (théorème 8.4) que $\mathcal{H}^s(C) > 0$ et qu'on a donc la minoration $\dim_H(C_p, d_{\mathfrak{R}}) \geq s$.

Les majorations $\mathcal{H}^s(C_p, d_{\mathfrak{R}}) < \infty$, et donc $\dim_H(C_p, d_{\mathfrak{R}}) \leq s$, ayant été obtenues au paragraphe A.1, le théorème est prouvé. \square

Remarque 9.9. La mesure μ est la mesure produit sur $\{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}^*}$, issue de la mesure sur $\{1, \dots, p\}$ qui donne à chaque singleton $\{i\}$ la masse k_i^s .

B Codage

Notre objectif est maintenant d'estimer voire, dans les bons cas, de déterminer la dimension de Hausdorff de l'attracteur d'un IFS Φ défini sur un espace métrique complet. Pour ce faire, on va "comparer" cet IFS Φ avec l'IFS de décalage Ψ sur un ensemble de Cantor $(\mathcal{C}_p, d_{\mathfrak{K}})$.

Dans tout ce paragraphe, $\Phi = (f_1, \dots, f_p)$ désigne un IFS sur un espace métrique complet X , d'attracteur K , où les f_i ont pour meilleures constantes de Lipschitz

$$k_i = \sup_{x \neq y} \frac{d(f_i(x), f_i(y))}{d(x, y)} < 1.$$

B.1 Dimension de similitude d'un IFS

Définition 9.10. Dimension de similitude

La dimension de similitude $s = \dim_S \Phi$ de l'IFS Φ est l'unique solution $s \geq 0$ de l'équation $\sum_{i=1}^p k_i^s = 1$.

Nous avons déjà rencontré cette notion pour des similitudes $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ sur $X = \mathbb{R}^d$ (définition 7.26). Dans ce contexte général nous nous permettons de conserver cette dénomination, désormais abusive 🟡🚫, car il n'y a plus de similitude qui tienne (en effet l'espace métrique X est quelconque... et même lorsque $X = \mathbb{R}^d$ euclidien nous n'imposons pas ici aux f_i d'être des similitudes – même si ce sera le cas dans nos exemples favoris).

Insistons sur le fait que la dimension de similitude est associée à l'IFS, et pas à son attracteur, comme le montre l'exemple suivant.

Exercice 9.11. Le Cantor $\mathcal{C}^{(1/3)}$

Soient $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto x/3 \in \mathbb{R}$ et $f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto 2/3 + x/3 \in \mathbb{R}$. On introduit les deux IFS $\Phi_1 = (f_1, f_2)$ et $\Phi_2 = (f_1, f_1, f_2)$ sur \mathbb{R} .

Démontrer que les IFS Φ_1 et Φ_2 ont le même attracteur, qui est le Cantor $K = \mathcal{C}^{(1/3)}$, mais que les dimensions de similitudes de ces IFS sont différentes.

Introduisons le produit infini $\mathcal{C}_p = \{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}^*}$, muni de la distance $d_{\mathfrak{K}}$ associée aux facteurs de contraction $\mathfrak{K} = (k_1, \dots, k_p)$ (rappelons que k_i est la meilleure constante de Lipschitz de f_i , pour $1 \leq i \leq p$). Soient $\psi_i : \mathcal{C}_p \rightarrow \mathcal{C}_p$ les opérateurs de décalage, et $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_p)$ l'IFS associé sur \mathcal{C}_p . Par définition, on a l'égalité $\dim_S \Phi = \dim_S \Psi$.

Nous avons montré l'égalité $\dim_H(\mathcal{C}_p, d_{\mathfrak{K}}) = \dim_S \Psi$ (théorème 9.4).

Dans la suite de ce paragraphe B, nous en déduisons la majoration $\dim_H K \leq \dim_S \Phi$ pour notre IFS quelconque Φ .

Nous montrerons ultérieurement l'égalité $\dim_H K = \dim_S \Phi$ pour un IFS sur \mathbb{R}^d constitué de similitudes, et sous une condition supplémentaire essentiellement indispensable (théorème 9.34).

B.2 Majoration de $\dim_H K$

Nous commençons par construire une application continue et surjective $\kappa : \mathcal{C}_p \rightarrow K$ qui entrelace les IFS Ψ et Φ (voir la remarque 9.17).

Notation 9.12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout multi-indice $(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, p\}^n$, on introduit le compact

$$K_{i_1 \dots i_n} = f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_n}(K).$$

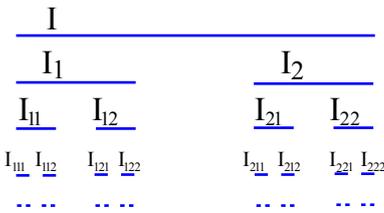
Cette notation est cohérente avec la notation $C_{i_1 \dots i_n} = \psi_{i_1} \circ \dots \circ \psi_{i_n}(C)$ pour les cylindres de l'ensemble de Cantor \mathcal{C}_p que nous avons introduite au paragraphe précédent en (9.1). Commençons par affiner notre intuition sur des exemples plus géométriques que l'ensemble de Cantor abstrait en étudiant le cas du Cantor $\mathcal{C}^{(1/3)}$, et celui du triangle de Sierpinski.

Exemple 9.13. De nouveau le Cantor $\mathcal{C}^{(1/3)}$

Nous reprenons l'IFS $\Phi = (f_1, f_2)$, associé à $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto x/3 \in \mathbb{R}$ et $f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto 2/3 + x/3 \in \mathbb{R}$, d'attracteur $K = \mathcal{C}^{(1/3)}$.

On a $K \subset [0, 1]$ avec $f_1([0, 1]) = [0, 1/3]$ et $f_2([0, 1]) = [2/3, 1]$.

- Pour $n = 1$, on a donc $K_1 = K \cap [0, 1/3]$ et $K_2 = K \cap [2/3, 1]$.
- Pour $n \geq 1$ quelconque, $K_{i_1 \dots i_n} = K \cap I_{i_1 \dots i_n}$ est l'intersection de K avec l'intervalle de n -ième génération $I_{i_1 \dots i_n}$ (qui est un intervalle de longueur 3^{-n} , voir l'exemple 4.19).
- Pour chaque $n \geq 1$, on a $K = \sqcup_{(i_1 \dots i_n) \in \{1, 2\}^n} K_{i_1 \dots i_n}$, l'union étant – dans cet exemple particulier – disjointe.

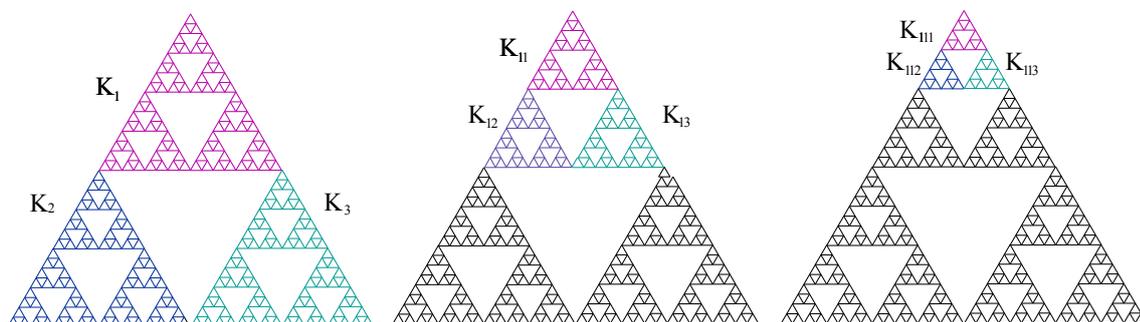


Dans le dessin ci-contre, il faut imaginer l'allure de $K_{i_1 \dots i_n} = K \cap I_{i_1 \dots i_n}$, qui est la trace sur l'intervalle de n -ième génération $I_{i_1 \dots i_n}$ du Cantor $K = \mathcal{C}^{(1/3)}$.

Pour s'imprégner de cette notation, il faut observer que le premier indice i_1 dit grossièrement où $K_{i_1 \dots i_n}$ se situe dans K , c'est-à-dire s'il appartient à la moitié de gauche K_1 , ou à la moitié de droite K_2 . Puis i_2 apporte de la précision, i_3 encore plus de précision etc... (comme dans le cas du développement en base 2 d'un réel).

Exemple 9.14. Le triangle de Sierpinski

Le triangle de Sierpinski $K \subset \mathbb{R}^2$ (voir la figure ci-dessous) est l'attracteur d'un IFS constitué de trois similitudes de rapports $1/2$. Dans cet exemple, les $K_{i_1 \dots i_n}$ ne sont pas deux à deux disjoints.



La famille de compacts emboîtés $K_{i_1\dots i_n}$, pour le tapis de Sierpinski (et $n = 1, 2$ ou 3)

Revenons maintenant à un IFS quelconque sur un espace métrique complet. Commençons par mettre en évidence quelques propriétés élémentaires des compacts $K_{i_1\dots i_n}$.

Lemme 9.15.

1. Soient $n \geq 1$ et $(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, p\}^n$. On a $K_{i_1\dots i_n} = \bigcup_{j=1}^p K_{i_1\dots i_n j}$.
2. Pour tout $n \geq 1$, on a $K = \bigcup_{\{(i_1, \dots, i_n)\}} K_{i_1\dots i_n}$.
3. Le diamètre de ces parties vérifie $|K_{i_1\dots i_n}| \leq k_{i_1} \dots k_{i_n} |K|$.

Preuve 1. On exprime que K est attracteur, soit $K = \bigcup_{j=1}^p K_j$, et on applique la composée $f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_n}$.

2. Pour $n = 1$, l'identité à prouver exprime que K est attracteur. On conclut par récurrence en utilisant 1.

3. Puisque f_i est lipschitzienne de rapport k_i , on a l'inégalité $|f_i(A)| \leq k_i |A|$ pour toute partie $A \subset \mathbb{R}^d$. \square

Nous introduisons maintenant l'application $\kappa : \mathcal{C}_p \rightarrow K$ d'entrelacement évoquée plus haut.

Proposition 9.16. Soit $a \in \mathcal{C}_p$ avec $a = (a_1 \dots a_n \dots)$.

- (1) L'intersection $\bigcap_{n \geq 1} K_{a_1 \dots a_n} = \{z_a\}$ est un singleton $z_a \in K$.
- (2) L'application $\kappa : a \in \mathcal{C}_p \mapsto z_a \in K$ est surjective.
- (3) De plus, $\kappa : (\mathcal{C}_p, d_{\mathbb{R}}) \rightarrow K$ est lipschitzienne.

Preuve (1) La suite $(K_{a_1 \dots a_n})_{n \geq 1}$ est une suite décroissante de compacts non vides dont les diamètres tendent vers 0 (lemme 9.15). Leur intersection est donc un compact non vide dont le diamètre est nul, donc un singleton $\{z_a\} \subset X$. Puisque $K_{a_1 \dots a_n} \subset K$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $z_a \in K$.

(2) *Surjectivité* : Soit $z \in K$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on a vu au lemme 9.15 que $K = \bigcup_{\{(i_1, \dots, i_n)\}} K_{i_1 \dots i_n}$, avec $K_{i_1 \dots i_n} = \bigcup_{\ell=1}^p K_{i_1 \dots i_n \ell}$. Ceci permet de construire récursivement une suite $a = (a_1 a_2 \dots) \in \{1 \dots p\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $z \in K_{a_1 \dots a_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc $z = z_a$.

(3) *Continuité* : Montrons que κ est lipschitzienne. Soient $a, b \in \mathcal{C}_p$. On rappelle que $d_{\mathfrak{R}}(a, b) = k_{a_1} \dots k_{a_{n-1}}$, où $n = \min\{\ell \in \mathbb{N}^* \mid a_\ell \neq b_\ell\}$. Leurs images $\kappa(a)$ et $\kappa(b)$ appartiennent à $K_{a_1 \dots a_{n-1}}$, cette partie étant de diamètre $|K_{a_1 \dots a_{n-1}}| \leq k_{a_1} \dots k_{a_{n-1}} |K|$. L'application κ est donc lipschitzienne, de constante de Lipschitz $|K|$. \square

Remarque 9.17. L'application κ entrelace les IFS Φ et Ψ , au sens où on a l'égalité $f_i \circ \kappa = \kappa \circ \psi_i$ pour tout $1 \leq i \leq p$. Pour $a = (a_1 \dots a_n \dots) \in \mathcal{C}_p$ et $1 \leq i \leq p$, on a en effet

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_p & \xrightarrow{\psi_i} & \mathcal{C}_p \\ \kappa \downarrow & & \downarrow \kappa \\ K & \xrightarrow{f_i} & K \end{array} \quad \begin{array}{l} \{\kappa(\psi_i(a))\} = \bigcap_{n \geq 1} K_{i a_1 \dots a_n} = \bigcap_{n \geq 1} f_i(K_{a_1 \dots a_n}) \\ \supset f_i(\bigcap_{n \geq 1} K_{a_1 \dots a_n}) = \{f_i(\kappa(a))\}. \end{array}$$

Les ensembles $\{\kappa(\psi_i(a))\}$ et $\{f_i(\kappa(a))\}$ étant des singletons, le résultat suit.

Corollaire 9.18. Majoration de la dimension de Hausdorff

Soit $\Phi = (f_1, \dots, f_p)$ un IFS sur un espace métrique complet X , où les $f_i : X \rightarrow X$ sont des applications lipschitziennes, de meilleures constantes de Lipschitz $0 < k_i < 1$. Soit K l'attracteur de Φ . Soit $s = \dim_S \Phi$ l'unique solution de l'équation $\sum_{i=1}^p k_i^s = 1$. Alors $\mathcal{H}^s(K) < \infty$, et

$$\dim_H K \leq s.$$

Preuve Par construction de Ψ , on a $\dim_S \Psi = \dim_S \Phi = s$. Puisque κ est $|K|$ -lipschitzienne, la démonstration de la proposition 7.21 puis le théorème 9.4 montrent que $\mathcal{H}^s(K) \leq |K|^s \mathcal{H}^s(\mathcal{C}_p, d_{\mathfrak{R}}) < \infty$. Ainsi $\dim_H K \leq s$. \square

Remarque 9.19. On a bien sûr intérêt à choisir pour k_i la meilleure de constante de Lipschitz de f_i pour obtenir ainsi la meilleure majoration de $\dim_H K$. Lorsque les $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont des similitudes de $X = \mathbb{R}^d$ euclidien, les k_i sont les rapports de ces similitudes.

On peut très facilement se passer de l'application κ dans la démonstration du corollaire 9.18 (recopier *mutatis mutandis* la démonstration du paragraphe A.1). C'est dans le paragraphe D que κ nous éclairera véritablement.

C Compacts auto-similaires : séparation stricte

En général (et même pour un IFS sur \mathbb{R}^d qui est constitué de similitudes) il n'y a aucune raison pour qu'on ait l'égalité $\dim_H K = \dim_S \Phi$ entre la dimension de Hausdorff de l'attracteur et la dimension de similitude de l'IFS (revoir l'exercice 9.11 où l'on obtient le Cantor $\mathcal{C}^{(1/3)}$ comme attracteur de plusieurs IFS ayant des dimensions de similitude distinctes). Pour assurer l'égalité $\dim_H K = \dim_S \Phi$, nous devons supposer que notre IFS Φ satisfait une condition de séparation.

Nous commençons dans ce paragraphe par la condition de séparation la plus simple à exploiter, mais qui est aussi la plus restrictive.

Définition 9.20. Séparation stricte

Soit $\Phi = (f_1, \dots, f_p)$ un IFS sur un espace métrique complet X . On dit que cet IFS satisfait la condition de séparation stricte lorsque son attracteur K vérifie la condition

$$f_i(K) \cap f_j(K) = \emptyset \text{ pour } 1 \leq i < j \leq p. \quad (9.5)$$

Alternativement, dire que l'IFS satisfait la condition de séparation stricte, c'est dire que son attracteur est réunion disjointe

$$K = \sqcup_{i=1}^p f_i(K).$$

Exemple 9.21. L'IFS de décalage Ψ sur $\mathcal{C}_p = \{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}^*}$ vérifie la condition de séparation stricte.

Comment s'assurer que la condition de séparation stricte est satisfaite si on ne connaît pas l'attracteur, ou si celui-ci est un peu compliqué ?

Lemme 9.22. Soit $\Phi = (f_1, \dots, f_p)$ un IFS sur un espace métrique complet X . Supposons qu'il existe un compact non vide $L \subset X$ pour lequel

$$\cup_{i=1}^p f_i(L) \subset L \quad (9.6)$$

$$f_i(L) \cap f_j(L) = \emptyset \text{ pour tous } i \neq j. \quad (9.7)$$

Alors l'attracteur K de Φ vérifie $K \subset L$, et l'IFS Φ vérifie la condition de séparation stricte.

Preuve Puisque $\cup_{i=1}^p f_i(L) \subset L$, on a vu (exercice 4.18) que l'attracteur K s'obtient comme intersection décroissante $K = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^p f_i^k(L)$ des compacts images itérées de L . On a donc séparation stricte puisque $K \subset L$, et donc $f_i(K) \cap f_j(K) \subset f_i(L) \cap f_j(L) = \emptyset$ pour tous $i \neq j$. \square

Exemple 9.23. Ce lemme s'applique à l'IFS $\Phi = (f_1, f_2)$ définissant le Cantor $\mathcal{C}^{(1/3)}$ (exemple 9.13), en prenant par exemple $L = [0, 1]$.

C.1 Topologie de l'attracteur

Théorème 9.24. Soient $\Phi = (f_1, \dots, f_p)$ un IFS sur un espace métrique complet X et K son attracteur. On suppose que :

1. chaque application $f_i : X \rightarrow X$ est injective
2. l'IFS satisfait la condition de séparation stricte.

Alors K est homéomorphe à l'ensemble de Cantor abstrait $\mathcal{C} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, muni de la topologie produit.

Ce théorème résulte des deux lemmes suivants.

Lemme 9.25. *Sous les hypothèses du théorème 9.24, l'application de codage $\kappa : a \in \mathcal{C}_p \mapsto z_a \in K$ est un homéomorphisme.*

Preuve Nous savons déjà que $\kappa : \mathcal{C}_p \rightarrow K$ est continue, et surjective (proposition 9.16). Montrons qu'elle est injective. Soient $a = (a_1 a_2 \dots)$ et $b = (b_1 b_2 \dots)$ deux points distincts de \mathcal{C}_p . Soit $n \geq 1$ le premier entier pour lequel $a_n \neq b_n$. On a $z_a \in K_{a_1 \dots a_n}$ et $z_b \in K_{b_1 \dots b_n}$. Les compacts K_{a_n} et K_{b_n} étant disjoints, leurs images par l'application injective $f_{a_1} \circ \dots \circ f_{a_{n-1}}$ sont encore disjointes, donc $z_a \neq z_b$.

Puisque κ est une bijection continue, et l'ensemble de départ est compact, l'application κ est bien un homéomorphisme. \square

Lemme 9.26. *Soit $p \geq 3$. Le produit infini d'un ensemble à p éléments par lui-même, soit $\mathcal{C}_p = \{a_0, \dots, a_{p-1}\}^{\mathbb{N}^*}$, est homéomorphe à l'ensemble de Cantor abstrait $\mathcal{C} = \mathcal{C}_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$.*

Preuve Soit $p \geq 3$. Comme produit dénombrable d'espaces métriques compacts, la topologie produit fait de \mathcal{C}_p un espace (métrisable) compact. Pour construire un homéomorphisme entre \mathcal{C}_p et \mathcal{C} , il suffit donc de construire une application continue bijective $j : \mathcal{C}_p \rightarrow \mathcal{C}$.

Un élément de \mathcal{C}_p est un mot infini en les p lettres a_0, \dots, a_{p-1} . Un élément de \mathcal{C} est un mot infini en les 2 lettres 0, 1.

L'application j sera définie en remplaçant chacune des lettres a_i par un mot en 0, 1 comme suit :

$$\begin{aligned} a_0 &\longrightarrow 0 \\ a_1 &\longrightarrow 10 \\ &\vdots \\ a_{p-1} &\longrightarrow 1 \dots 10 \\ a_p &\longrightarrow 1 \dots 11. \end{aligned}$$

La lettre a_0 est remplacée par la lettre 0. Pour $1 \leq k \leq p-1$, la lettre a_k est remplacée par un mot constitué de $k+1$ lettres : d'abord k lettres 1, suivies de la lettre 0. La lettre a_p est remplacée par un mot constitué de p lettres 1. Il n'est pas compliqué de vérifier que $j : \mathcal{C}_p \rightarrow \mathcal{C}$ ainsi construite est une bijection continue, et donc un homéomorphisme de \mathcal{C}_p sur \mathcal{C} . \square

Exercice 9.27.

1. Démontrer qu'une intersection décroissante de compacts connexes un est compact connexe.
2. Montrer que le triangle de Sierpinski et la courbe de von Koch sont connexes.
3. Déterminer les composantes connexes de l'ensemble de Cantor \mathcal{C} .
4. Montrer que ni le triangle de Sierpinski, ni la courbe de von Koch, ne sont l'attracteur d'un IFS satisfaisant la condition de séparation stricte.

C.2 Dimension de Hausdorff des compacts auto-similaires

Pour avoir un espoir de savoir déterminer la dimension de Hausdorff de l'attracteur en termes de l'IFS, on doit se placer dans un cadre restreint, par exemple supposer que les applications qui interviennent sont des similitudes de \mathbb{R}^d euclidien (voir la remarque 9.35).

Proposition 9.28. *Soit $\Phi = (f_1, \dots, f_p)$ un IFS sur \mathbb{R}^d euclidien, pour lequel les $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont des similitudes contractantes. On suppose que la condition de séparation stricte est satisfaite. Soit $s = \dim_S \Phi$. Alors, l'application $\kappa : (\mathcal{C}_p, d_{\mathcal{R}}) \rightarrow K$ est un homéomorphisme bi-lipschitzien. On a donc $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$, et l'égalité $\dim_H K = \dim_S \Phi$.*

Preuve On va montrer que l'homéomorphisme $\kappa : (\mathcal{C}_p, d_{\mathcal{R}}) \rightarrow K$, dont on sait qu'il est lipschitzien (proposition 9.16, lemme 9.25), est une application bi-lipschitzienne. Soit $\rho = \inf_{i \neq j} d(K_i, K_j) > 0$ la distance minimale entre les images de K par deux similitudes f_i et f_j , distinctes, de l'IFS.

Soient $a, b \in \mathcal{C}_p$ distincts, et $n = \min\{\ell \in \mathbb{N}^* \mid a_\ell \neq b_\ell\}$. Rappelons que $d_{\mathcal{R}}(a, b) = k_{a_1} \dots k_{a_{n-1}}$. Par ailleurs $z_a \in K_{a_1 \dots a_{n-1} a_n}$ et $z_b \in K_{a_1 \dots a_{n-1} b_n}$, où

$$\begin{aligned} d(K_{a_1 \dots a_n}, K_{a_1 \dots b_n}) &= d(f_{a_1} \dots f_{a_{n-1}}(K_{a_n}), f_{a_1} \dots f_{a_{n-1}}(K_{b_n})) \\ &= k_{a_1} \dots k_{a_{n-1}} d(K_{a_n}, K_{b_n}) \\ &\geq k_{a_1} \dots k_{a_{n-1}} \rho. \end{aligned}$$

On a donc $d(z_a, z_b) \geq \rho d_{\mathcal{R}}(a, b)$, ce qu'on voulait.

La seconde assertion suit de la proposition 7.21 et de sa preuve : la mesure de Hausdorff est quasi-invariante sous homéomorphisme bi-lipschitzien. \square

D Séparation de Moran

Pour avoir l'égalité $\dim_H K = \dim_S \Phi$, où K est l'attracteur d'une famille de similitudes Φ sur \mathbb{R}^d , on pourra se contenter d'une condition, dite de Moran, qui est moins restrictive que la condition de séparation stricte 9.5.

Sans surprise, la démonstration du théorème 9.34 sera plus délicate que celle de la proposition 9.28. En effet, l'application $\kappa : (\mathcal{C}_p, d_{\mathcal{R}}) \rightarrow K$ n'est alors plus injective – et elle n'est donc a fortiori plus un homéomorphisme bi-lipschitzien.

Définition 9.29. Condition de Moran

Soient $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ des similitudes contractantes sur \mathbb{R}^d euclidien.

L'IFS $\Phi = (f_1, \dots, f_p)$ satisfait la condition de Moran si il existe un ouvert borné non vide $V \subset \mathbb{R}^d$ tel que

$$\bigcup_{i=1}^p f_i(V) \subset V \tag{9.8}$$

$$f_i(V) \cap f_j(V) = \emptyset \text{ pour tous } i \neq j. \tag{9.9}$$

Comparer aux conditions de séparation (9.6) (9.7) du lemme 9.22, qui impliquent la séparation stricte. Voir également le lemme 9.31.

Lemme 9.30. *La condition de séparation stricte (9.5) est plus forte que la condition de séparation de Moran.*

Preuve Supposons en effet les compacts $(f_i(K))_{1 \leq i \leq p}$ deux à deux disjoints.

Pour $\varepsilon = \inf\{d(f_i(K), f_j(K)) \mid 1 \leq i < j \leq p\} > 0$, on introduit l'ouvert borné non vide $V = \mathcal{V}_{\varepsilon/2}(K) \subset \mathbb{R}^d$ qui est le $\varepsilon/2$ -voisinage de K .

Les $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ étant des similitudes, on a $f_i(V) = \mathcal{V}_{k_i \varepsilon/2}(f_i(K))$. Les images $f_i(V)$ et $f_j(V)$ sont disjointes lorsque $i \neq j$, car $(k_i + k_j)\varepsilon/2 < \varepsilon$.

De plus $\cup_{i=1}^p f_i(V) = \cup_{i=1}^p \mathcal{V}_{k_i \varepsilon/2}(f_i(K)) \subset \mathcal{V}_{\varepsilon/2}(K) = V$. \square

Dans la pratique, donné un IFS, on cherchera à montrer (lorsque c'est le cas, et s'il ne vérifie pas trivialement la condition de séparation stricte!) qu'il vérifie la condition de Moran. Pour cela, il faudra être capable d'exhiber un ouvert V satisfaisant les conditions (9.8) et (9.9). Pour orienter la recherche d'un tel ouvert, on utilisera le lemme suivant.

Lemme 9.31. *Si la condition de Moran est satisfaite pour un ouvert borné $V \subset \mathbb{R}^d$, alors cet ouvert vérifie $K \subset \bar{V}$.*

Ainsi, l'ouvert V doit être assez gros pour que son adhérence contienne K , mais pas trop, de sorte qu'il vérifie la condition de disjonction (9.9). La condition de Moran exprime quantitativement le fait que les images $f_i(K)$ de l'attracteur "ne se chevauchent pas trop".

Preuve L'adhérence de l'ouvert borné V est compacte non vide. Puisque $f_i(V) \subset V$ pour $1 \leq i \leq p$, la continuité de f_i assure que $f_i(\bar{V}) \subset \overline{f_i(V)} \subset \bar{V}$. On a donc $\Phi(\bar{V}) \subset \bar{V}$, et donc $K \subset \bar{V}$ (exercice 4.18). \square

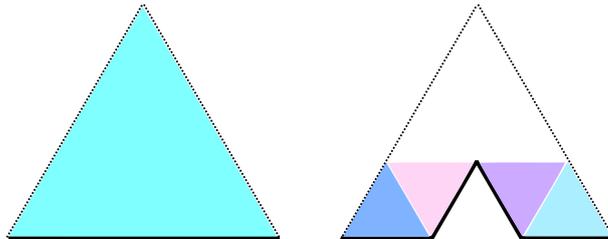
Exercice 9.32. Triangle de Sierpinski

1. Déterminer un IFS constitué de trois similitudes contractantes de rapports $1/2$ dont l'attracteur est le triangle de Sierpinski.
2. Montrer que cet IFS satisfait la condition de Moran.
3. En déduire la dimension de Hausdorff du triangle de Sierpinski.

Exercice 9.33. Courbe de von Koch

Traiter de même l'exemple de la courbe de von Koch.

Images du segment $[0, 1]$, et du triangle équilatéral ouvert V porté par ce segment, par les quatre similitudes de rapport $1/3$ constituant l'IFS définissant la courbe de von Koch.



L'intérêt de la condition de Moran réside bien sûr dans le résultat suivant.

Théorème 9.34. *Soit $\Phi = (f_1, \dots, f_p)$ un IFS sur \mathbb{R}^d euclidien, pour lequel les $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont des similitudes contractantes de rapports $0 < k_i < 1$. On suppose que la condition de Moran est satisfaite.*

Alors, si on note $s = \dim_S \Phi$ l'unique solution de $\sum_{i=1}^p k_i^s = 1$, on a $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$ et donc

$$\dim_H K = \dim_S \Phi. \quad (9.10)$$

Remarque 9.35. Il ne faudra pas espérer obtenir une “formule magique” équivalente à (9.10) pour calculer la dimension de Hausdorff de l'attracteur d'un IFS quelconque. Ne serait-ce que pour un IFS sur \mathbb{R} associé à des fonctions de classe C^∞ dont la dérivée varie (en restant à valeurs dans un intervalle compact $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon] \subset]-1, 1[$) il faudra adapter la méthode à chaque cas particulier pour obtenir des estimations de la dimension de Hausdorff, les techniques que nous développons ici restant d'actualité.

Nous voulons maintenant montrer le théorème 9.34, sous l'hypothèse de séparation de Moran. Nous avons déjà majoré la dimension de Hausdorff de l'attracteur (proposition 9.18). Il nous reste à la minorer. Comme dans la preuve du théorème 9.4 (IFS associé au décalage), on va montrer que la mesure invariante associée à l'IFS est Frostman.

Rappelons que μ est la mesure borélienne de probabilité sur \mathcal{C}_p invariante associée à (Ψ, c) , où $c = (k_1^s, \dots, k_p^s)$.

Lemme 9.36. *Soit $m = \kappa_* \mu$ la mesure de probabilité image de μ par κ . La mesure m est la mesure invariante sur K associée à (Φ, c) .*

Preuve On a en effet, d'après la remarque 9.17, l'égalité

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p k_i^s (f_i)_* m &= \sum_{i=1}^p k_i^s (f_i)_* (\kappa_* \mu) = \sum_{i=1}^p k_i^s (f_i \circ \kappa)_* \mu \\ &= \sum_{i=1}^p k_i^s (\kappa \circ \psi_i)_* \mu = \kappa_* \left(\sum_{i=1}^p k_i^s (\psi_i)_* \mu \right) \\ &= \kappa_* \mu = m. \quad \square \end{aligned}$$

Proposition 9.37. *On suppose que $X = \mathbb{R}^d$, et que l'IFS Φ est constitué de similitudes f_i de rapports k_i ($1 \leq i \leq p$). On suppose que Φ satisfait la condition de Moran pour un ouvert borné $V \subset \mathbb{R}^d$.*

Alors la mesure (Φ, c) -invariante m est s -Frostman pour $s = \dim_S \Phi$.

Preuve du théorème 9.34

On sait déjà que $\dim_H K \leq s$ (proposition 9.18). La minoration $\dim_H K \geq s$ suit de la proposition 9.37 et du principe de répartition de masse 8.4. \square

Pour démontrer la proposition 9.37, on procède comme dans la preuve du théorème 9.4. Il faut juste être un peu soigneux pour majorer la mesure $m(B(z, r))$ des boules pour $z \in K$. La démonstration peut être omise en première lecture.

Rappelons que V est l'ouvert borné intervenant dans la condition de Moran.

Définition 9.38. Soit $0 < r < 1$. On introduit l'ensemble A_r des mots finis $\alpha = (a_1 \dots a_n)$, où $n \geq 1$ et $a_i \in \{1, \dots, p\}$, et qui satisfont les inégalités suivantes, déjà rencontrées en (9.4) :

$$k_{a_1} \dots k_{a_n} \leq r < k_{a_1} \dots k_{a_{n-1}}. \quad (9.11)$$

Pour $\alpha = (a_1 \dots a_n) \in A_r$, on notera V_α l'image $V_\alpha = f_{a_1} \dots f_{a_n} V$.

On notera également $C_\alpha = \psi_{a_1} \dots \psi_{a_n} C$ le cylindre $C_{a_1 \dots a_n} \subset \mathcal{C}_p$.

Lemme 9.39. Soit $0 < r < 1$. Pour deux mots finis $\alpha, \beta \in A_r$ avec $\alpha \neq \beta$, les ouverts V_α et V_β ne s'intersectent pas.

Preuve On peut supposer que $\alpha = (a_1 \dots a_n)$ et $\beta = (b_1 \dots b_m)$ où $m \leq n$. La définition de A_r (9.11) assure que $(a_1 \dots a_m) \neq (b_1 \dots b_m)$.

Soit alors $1 \leq \ell \leq m$ le plus petit indice tel que $a_\ell \neq b_\ell$. L'hypothèse (9.8) de Moran assure que $f_{a_{\ell+1}} \dots f_{a_n}(V) \subset V$ et $f_{b_{\ell+1}} \dots f_{b_m}(V) \subset V$. Puisque $a_\ell \neq b_\ell$, on déduit donc de l'hypothèse de Moran (9.9) que

$$f_{a_\ell} f_{a_{\ell+1}} \dots f_{a_n}(V) \cap f_{b_\ell} f_{b_{\ell+1}} \dots f_{b_m}(V) = \emptyset.$$

Le résultat suit car la similitude $f_{a_1} \dots f_{a_{\ell-1}} = f_{b_1} \dots f_{b_{\ell-1}}$ est injective. \square

Lemme 9.40. Pour $0 < r < 1$ et $z \in K$, on introduit

$$A_r(z) = \{\alpha \in A_r \mid V_\alpha \cap B(z, r) \neq \emptyset\}.$$

Il existe un entier N , qui ne dépend ni de r ni de z , tel que $\text{card } A_r(z) \leq N$.

Preuve Ce résultat va suivre d'une simple estimation de volumes.

L'ouvert non vide V contient une boule de rayon $r_0 > 0$. Puisqu'il est borné, son diamètre $|V|$ est fini. Soit $r > 0$. Pour $\alpha = (a_1 \dots a_n) \in A_r$, la définition (9.11) de A_r assure d'une part que V_α contient une boule de rayon

$$k_{a_1} \dots k_{a_n} r_0 \geq (cr_0) r,$$

où $c = \min\{k_i \mid 1 \leq i \leq p\} > 0$ est le plus petit des rapports de similitude, et permet d'autre part de minorer son diamètre :

$$|V_\alpha| = k_{a_1} \dots k_{a_n} |V| \leq r |V|.$$

Soit maintenant $z \in K$. La réunion $\sqcup_{\alpha \in A_r(z)} V_\alpha$ est donc incluse dans la boule $B(z, r(1 + |V|))$. D'après le lemme 9.39, cette réunion est disjointe. Si ω_d désigne le volume de la boule unité pour la mesure de Lebesgue d -dimensionnelle λ_d , on obtient donc

$$\sum_{\alpha \in A_r(z)} \lambda_d(V_\alpha) = \lambda_d \left(\bigsqcup_{\alpha \in A_r(z)} V_\alpha \right) \leq \omega_d r^d (1 + |V|)^d$$

tandis qu'on a $\lambda_d(V_\alpha) \geq \omega_d r^d (cr_0)^d$ pour tout $\alpha \in A_r$. Le résultat suit donc avec $N = (1 + |V|)^d / (cr_0)^d$. \square

Preuve de la proposition 9.37

Rappelons qu'il s'agit de montrer que la mesure invariante m est Frostman. Soient donc $z \in K$ et $0 < r < 1$. Par définition de $m = \kappa_* \mu$, on a l'égalité $m(B(z, r)) = \mu(\kappa^{-1}B(z, r))$.

Nous cherchons en un premier temps à décrire $\kappa^{-1}B(z, r) \subset \mathcal{C}_p$. Soit donc $a \in \kappa^{-1}B(z, r)$, avec $a = (a_1 \dots a_n \dots)$. Soit $n \geq 1$ l'unique entier tel que $\alpha = (a_1 \dots a_n) \in A_r$. On a $a \in C_\alpha$, et $\kappa(a) \in K_\alpha$ par construction de κ .

Il suit que $\kappa(a) \in K_\alpha \cap B(z, r) \subset \overline{V_\alpha} \cap B(z, r)$ puisque $K \subset \overline{V}$ (lemme 9.31). La boule $B(z, r)$ étant ouverte, l'intersection $V_\alpha \cap B(z, r)$ est également non vide, autrement dit $\alpha \in A_r(z)$. Nous avons donc montré l'inclusion $\kappa^{-1}B(z, r) \subset \cup_{\alpha \in A_r(z)} C_\alpha$.

Nous pouvons maintenant passer à l'estimation de mesure. Le lemme 9.7 majorant les $\mu(C_\alpha)$, il vient

$$\mu(\kappa^{-1}B(x, r)) \leq \sum_{\alpha \in A_r(z)} \mu(C_\alpha) \leq \sum_{\alpha \in A_r(z)} (k_{a_1} \dots k_{a_n})^s.$$

La définition (9.11) de A_r et l'estimation du lemme 9.40 pour le cardinal de $A_r(z)$, fournissent alors la majoration

$$m(B(z, r)) = \mu(\kappa^{-1}B(x, r)) \leq N r^s,$$

qui montre que m est s -Frostman. \square

10. Topologie générale

 POUR conclure, un petit chapitre de topologie générale, destiné à donner quelques points de repère. Même dans le cas métrisable, il peut être plus pertinent de parler en termes de topologie qu'en termes de métrique. Cela évite en effet le recours explicite à une métrique dont le choix est bien souvent arbitraire : voir la distance produit de l'exercice 10.24, ou la définition (8.1) de la distance δ sur $B_{E'}$.

Nous revenons sur la topologie faible-* et généralisons le théorème de compacité faible-* à un evn non séparable, la topologie faible-* sur $B_{E'}$ étant alors non métrisable. Nous illustrons également sur quelques exemples les écueils à éviter lorsqu'on passe du cas métrisable, qui nous est habituel, à une situation non métrisable.

A Topologie

Dans ce paragraphe et le suivant, il y a essentiellement des définitions. Rien de palpitant, mais il faut bien commencer par là.

Définition 10.1. Topologie

Soit X un ensemble. Une topologie sur X est la donnée $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ d'une famille de parties de X satisfaisant les axiomes suivants :

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $X \in \mathcal{T}$,
2. \mathcal{T} stable par intersections finies par et unions quelconques.

Les éléments de \mathcal{T} sont les ouverts de la topologie \mathcal{T} . On dit alors que (X, \mathcal{T}) (ou simplement X si il n'y a pas d'ambiguïté) est un espace topologique.

Tout de suite deux exemples pas folichons.

Exemple 10.2. La topologie discrète est formée de l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ de toutes les parties de X . On munira la plupart du temps un ensemble fini, ou bien \mathbb{N} , \mathbb{Z} ou encore \mathbb{N}^d , de la topologie discrète.

La topologie grossière est réduite au minimum, à savoir $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.

On peut remarquer que les notions de tribu et de topologie sont très semblables. Dans les deux cas, on distingue une famille de parties de X , mais les axiomes qui définissent tribu ou topologie sont différents.

Il y aura toujours une bonne raison pour munir un ensemble de telle ou telle topologie, qui peut dépendre du contexte dans lequel on travaille : topologie produit, topologie quotient, topologie faible-*. Vous avez déjà construit la tribu engendrée par une famille de parties (par exemple pour construire la tribu borélienne sur un espace métrique). De même, on peut parler de topologie engendrée par une famille de parties : c'est un outil pour construire une topologie répondant à un cahier des charges donné.

Proposition 10.3. Topologie engendrée

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ une famille de parties de X . Il existe une plus petite topologie $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ sur X contenant \mathcal{A} : c'est la topologie engendrée par \mathcal{A} .

Preuve On commence par remarquer qu'il existe des topologies sur X contenant \mathcal{A} . Prendre en effet la topologie discrète, égale à l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ de toutes les parties de X : elle contient \mathcal{A} .

On considère alors l'intersection $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ de toutes les topologies contenant \mathcal{A} . Il est élémentaire de vérifier $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ est une topologie, et qu'elle contient \mathcal{A} . Par construction, $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ est la plus petite topologie sur X contenant \mathcal{A} . \square

Exercice 10.4. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ une famille de parties de X . Montrer que les ouverts de la topologie $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ engendrée par \mathcal{A} sont les parties de X qui s'écrivent comme unions quelconques d'intersections finies d'éléments de \mathcal{A} .

Exemple 10.5. Topologie associée à une distance

Soit (X, d) un espace métrique. La topologie sur X associée à la distance d est la topologie engendrée par la famille des boules ouvertes. Pour cette topologie, une partie de X est ouverte si et seulement si elle est réunion de boules ouvertes.

Définition 10.6. Topologie induite

Soient X un espace muni d'une topologie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, et $Y \subset X$. L'ensemble des traces sur Y des ouverts de X , soit

$$\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\} \subset \mathcal{P}(Y),$$

est une topologie sur Y que l'on appelle la topologie induite.

B Fermés, voisinages, suites, continuité

Définition 10.7. Soient X_1 et X_2 deux espaces topologiques.

Une partie $F \subset X_1$ est fermée lorsque son complémentaire cF est un ouvert de X_1 .

Soit $a \in X_1$. Une partie $V \subset X_1$ est un voisinage de a si elle contient un ouvert contenant a .

Une application $f : X_1 \rightarrow X_2$ est continue au point $a \in X_1$ lorsque l'image réciproque de tout voisinage de $f(a)$ est un voisinage de a .

Lemme 10.8. Une partie $U \subset X$ d'un espace topologique est ouverte si et seulement si elle est voisinage de tous ses points.

Une application $f : X_1 \rightarrow X_2$ est continue (i.e. elle est continue en tout point de X_1) si et seulement si l'image réciproque par f de tout ouvert de X_2 est un ouvert de X_1 .

Preuve La preuve, élémentaire, est laissée en exercice. □

Définition 10.9. On dit qu'une topologie est séparée lorsque deux points distincts sont contenus dans des ouverts disjoints (ou, de façon équivalente, ont des voisinages disjoints).

Les topologies intéressantes que vous utiliserez cette année sont séparées (en particulier la topologie sur un espace métrique, exemple 10.5, est séparée). Il faut cependant garder en tête des exemples comme 10.16 ou 10.29.

Définition 10.10. On dit qu'une topologie sur l'espace X est métrisable si elle provient d'une distance comme dans l'exemple 10.5.

Dans ce cas, la distance n'est pas unique.

Deux distances d_1 et d_2 sur l'ensemble X induisent la même topologie si et seulement si elles sont topologiquement équivalentes, c'est-à-dire si l'identité $\text{Id} : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$ est un homéomorphisme.

Exemple 10.11. Les distances définies sur \mathbb{R} par $d_1(x, y) = |x - y|$ et $d_2(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ sont topologiquement équivalentes. Elles induisent sur \mathbb{R} sa topologie usuelle.

Exercice 10.12. Si d est une distance sur X , l'expression $d_1 = \inf(d, 1)$ définit une distance sur X qui est topologiquement équivalente à d .

Définition 10.13. Soit X un espace topologique et $x_n \in X$ ($n \geq 0$). La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$ lorsque, pour tout voisinage V de x , il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, on a $x_n \in V$.

Remarque 10.14. Dans un espace topologique qui n'est pas métrisable, les caractérisations en termes de suites des propriétés de fermeture, continuité, compacité... peuvent être mises en défaut. Voir les exercices 10.56 et 10.57.

Définition 10.15. Soient \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 deux topologies sur un ensemble X . On dit que \mathcal{T}_1 est plus fine que \mathcal{T}_2 si $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$: il y a plus d'ouverts dans \mathcal{T}_1 que dans \mathcal{T}_2 . C'est le cas si et seulement si $\text{Id} : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ est continue.

La topologie de Zariski, que nous étudions dans l'exercice suivant, est chère aux géomètres algébristes. Dans leur univers, qui est l'espace \mathbb{K}^n où \mathbb{K} est un corps commutatif, les seules fonctions fréquentables sont les fonctions polynomiales (ou rationnelles). La topologie de Zariski est donc bien la topologie naturelle à considérer dans ce contexte.

Pour se familiariser avec cette topologie, il faut commencer par étudier le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On obtient une topologie non séparée sur \mathbb{R}^n , qui est moins fine que sa topologie usuelle.

Exercice 10.16. Topologie de Zariski. Soit $n \geq 1$.

Pour une partie $S \subset \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, on définit

$$Z(S) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0, \forall f \in S\}$$

comme le lieu des zéros commun à toutes les fonctions polynomiales en n variables appartenant à S .

1. Soit $S \subset \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, et $\langle S \rangle$ l'idéal engendré par S . Décrire $\langle S \rangle$ puis montrer l'égalité $Z(S) = Z(\langle S \rangle)$.
2. Soient I et J deux idéaux de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. Montrer qu'on a l'égalité $Z(I) \cup Z(J) = Z(I \cap J)$.
3. Soit $(I_k)_{k \in K}$ une famille d'idéaux de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.
 - (a) Montrer que $\langle \bigcup_{k \in K} I_k \rangle = \sum_{k \in K} I_k$ (où le terme de droite est constitué des sommes finies d'éléments des I_k).
 - (b) Montrer que $\bigcap_{k \in K} Z(I_k) = Z(\sum_{k \in K} I_k)$.
4. Montrer qu'il existe une topologie sur \mathbb{R}^n dont les fermés sont tous les ensembles $Z(I)$ (où I est un idéal de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$). C'est la topologie de Zariski.
5. Décrire les fermés de Zariski de la droite \mathbb{R} .
6. Si $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, on note $V(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$. Montrer que les $V(f)$ constituent une base d'ouverts pour la topologie de Zariski.
7. Montrer que tout ouvert de Zariski de \mathbb{R}^n est dense pour la topologie usuelle.
8. Montrer que deux ouverts de Zariski non vides de \mathbb{R}^n s'intersectent : la topologie de Zariski n'est pas séparée.
9. On rappelle qu'un anneau \mathbb{A} est dit noetherien lorsque ses idéaux sont de type fini. Lorsque \mathbb{A} est noetherien, l'anneau de polynômes $\mathbb{A}[X]$ est également noetherien.
En déduire que toute partie de \mathbb{R}^n , muni de la topologie de Zariski, possède la propriété de Borel-Lebesgue.
10. Déterminer (et comparer) les adhérences du graphe

$$G = \{(x, e^x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

pour la topologie usuelle, et pour la topologie de Zariski.

11. Généraliser les questions 1 à 9 à un corps commutatif \mathbb{K} (pour la question 8, il faut supposer que le corps \mathbb{K} est infini).

C Topologie initiale, topologie finale

Le choix de la topologie dont on va munir un ensemble est dicté par les circonstances. Voici deux exemples de telles situations : la notion de topologie initiale (illustrée par la topologie produit) et la notion de topologie finale (illustrée par la topologie quotient). Dans l'un et l'autre cas, on cherche à rendre continue une application, ou une famille d'applications.

C.1 Topologie produit

Soient Y un espace topologique, et X un ensemble. Pour rendre une application $f : X \rightarrow Y$ continue, il faut munir X d'une topologie qui a suffisamment d'ouverts (tous les $f^{-1}(U)$ avec $U \subset Y$ ouvert doivent être des ouverts de X).

A l'extrême, si X est muni de la topologie discrète (pour laquelle toutes les parties sont ouvertes), toute application définie sur X à valeurs dans tout espace topologique sera continue.

Proposition 10.17. Topologie initiale

Soient X un ensemble, et une famille d'applications $f_i : X \rightarrow (Y_i, \mathcal{T}_i)$, indexée par $i \in I$, à valeurs dans des espaces topologiques (Y_i, \mathcal{T}_i) .

Il existe une topologie la moins fine \mathcal{T} sur X qui rende continues toutes les applications $(f_i)_{i \in I}$. On l'appelle la topologie initiale associée aux $(f_i)_{i \in I}$.

Preuve La topologie \mathcal{T} est la topologie engendrée par toutes les parties de la forme $(f_i^{-1}(U_i))$, où $i \in I$ et $U_i \subset Y_i$ est ouvert pour \mathcal{T}_i . \square

Exercice 10.18. Les ouverts de X , muni de la topologie initiale associée aux (f_i) sont les parties de X qui s'écrivent

$$\bigcup_{\text{quelconque}} \bigcap_{\substack{i \in J \\ J \subset I \text{ fini}}} f_i^{-1}(U_i)$$

où chaque $U_i \subset Y_i$ est ouvert.

Le premier exemple de topologie initiale est la topologie produit.

La topologie produit est la topologie initiale, sur un produit d'espaces topologiques, associée à la famille des projections sur chacun des facteurs.

Définition 10.19. Topologie produit

Soient $(Y_i)_{i \in I}$ des espaces topologiques. La topologie produit sur le produit $X = \prod_{i \in I} Y_i$ est la topologie la moins fine pour laquelle chaque projection

$$p_j : (y_i)_{i \in I} \in X \mapsto y_j \in Y_j$$

(pour $j \in I$) est continue.

Lemme 10.20. *Un ouvert de $X = \prod_{i \in I} Y_i$, pour la topologie produit, est une réunion quelconque de “pavés”*

$$\prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \in I \setminus J} Y_i,$$

où $J \subset I$ est une partie finie et chaque $U_j \subset Y_j$ est un ouvert de Y_j ($j \in J$).

Exercice 10.21. Avec les notations de la définition précédente, soit $x = (y_i) \in X$ un point de l'espace produit $X = \prod_{i \in I} Y_i$. Une partie $V \subset X$ est voisinage de x si il existe un ensemble fini d'indices $J \subset I$ et, pour chaque indice $j \in J$, un ouvert $U_j \subset Y_j$ contenant y_j , tels que V contienne le pavé

$$\prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \in I \setminus J} Y_i.$$

Autrement dit, se donner un voisinage de x dans X , c'est se donner des contraintes (ouvertes) sur un nombre fini de facteurs.

Exemple 10.22. Topologie de la convergence simple

Soient X un ensemble et Y un espace topologique.

On identifie l'ensemble $\mathcal{F}(X, Y)$ des applications de X dans Y avec le produit Y^X (produit de multiples copies, indexées par l'ensemble X , de l'espace topologique Y). La topologie produit sur $\mathcal{F}(X, Y) \sim Y^X$ est la “topologie de la convergence simple”, terminologie confortée par l'exercice 10.21. En particulier :

Exercice 10.23. Soient X un ensemble et Y un espace topologique. On se donne $f_n : X \rightarrow Y$ une suite d'applications, et $f : X \rightarrow Y$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans l'espace Y^X muni de la topologie produit si et seulement si la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur X .

Exercice 10.24. Produit dénombrable d'espaces métriques

Soit $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un produit dénombrable d'espaces métriques.

Dans le photocopié de Topologie, Calcul Différentiel (voir aussi le chapitre 3), on a muni l'espace produit $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ de la distance définie pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ par

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \inf(1, d_n(x_n, y_n)).$$

Montrer que la distance d induit sur le produit X la topologie produit (on utilisera le résultat de l'exercice 10.12).

En particulier, il suit que la topologie produit sur un produit (fini ou) dénombrable d'espaces métriques est métrisable.

Cette distance sur le produit dénombrable $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ est définie par une tambouille qui est tout sauf canonique. Ainsi qu'on l'a déjà fait remarquer, bien d'autres choix de distances sur ce produit font l'affaire car induisent sur $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ cette même topologie produit. Même lorsqu'on reste dans le cadre métrisable, comme ici, il est donc pertinent de parler en termes de topologie pour éviter d'introduire une métrique spécifique, pas toujours naturelle.

Exercice 10.25. Topologie produit

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. On note X l'espace topologique produit et $\pi_i : X \rightarrow X_i$ les projections canoniques ($i \in I$).

1. Décrire les suites convergentes dans le produit X .
2. Montrer que X est séparé si et seulement si chaque X_i ($i \in I$) est séparé.
3. (a) Soit Z un espace métrique. Montrer que tout point $z \in Z$ admet une famille dénombrable de voisinages $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = \{z\}$.
 (b) On suppose que, pour chaque j dans une partie $J \subset I$ non dénombrable, l'espace X_j n'est pas un singleton. Montrer que X n'est pas métrisable.
4. Montrer que, si l'espace topologique produit X est compact, chaque facteur X_i est compact. La réciproque est vraie (théorème de Tychonov 10.39).
5. On dit qu'un espace topologique est connexe si il n'admet pas de partition en deux ouverts non triviaux.
 (a) Montrer qu'un espace topologique Z est connexe si et seulement si toute application continue $f : Z \rightarrow \{0, 1\}$ est constante.
 (b) Montrer que l'espace topologique produit X est connexe si et seulement si chaque facteur X_i est connexe.
6. Soit Z un espace topologique. Montrer que l'application $f : Z \rightarrow X = \prod X_i$ est continue si et seulement si chaque composante $\pi_i \circ f : Z \rightarrow X_i$ est continue ($i \in I$).

C.2 Topologie quotient

On s'intéresse maintenant au problème jumeau du précédent.

Soient X un espace topologique, et Y un ensemble. Pour rendre une application $f : X \rightarrow Y$ continue, il faut munir Y d'une topologie qui a suffisamment peu d'ouverts (on demande en effet que tous les $f^{-1}(U)$ avec $U \subset Y$ ouvert soient ouverts dans X).

A l'extrême, si Y est muni de la topologie grossière (pour laquelle les seules parties ouvertes sont l'ensemble vide et Y lui-même) toute application définie sur un espace topologique quelconque X et à valeurs dans Y sera continue.

Proposition 10.26. Topologie finale

Soient Y un ensemble, et une famille d'applications $f_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \rightarrow Y$, indexée par $i \in I$, définies sur des espaces topologiques (X_i, \mathcal{T}_i) .

Il existe une topologie la plus fine \mathcal{T} sur Y qui rende continues toutes les applications $(f_i)_{i \in I}$. On l'appelle la topologie finale associée aux $(f_i)_{i \in I}$.

Preuve On note $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(Y)$ l'ensemble des parties $V \subset Y$ pour lesquelles chaque $f_i^{-1}(V)$ est ouvert dans (X_i, \mathcal{T}_i) . On vérifie que \mathcal{T} est une topologie sur Y . Par construction c'est la topologie la plus fine pour laquelle les f_i sont continues. \square

Un exemple fondamental est celui de la topologie quotient.

Définition 10.27. Topologie quotient

Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique muni d'une relation d'équivalence \mathcal{R} .

La topologie quotient sur l'espace quotient X/\mathcal{R} est la topologie finale associée à la projection canonique $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$. C'est la topologie la plus fine sur le quotient qui rende cette projection continue.

Exercice 10.28. Soient X un espace topologique et \mathcal{R} une relation d'équivalence sur X . On note $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ la projection canonique.

1. On dit qu'une partie $A \subset X$ est saturée (pour la relation d'équivalence \mathcal{R}) si, lorsque $a \in A$ et $b\mathcal{R}a$, alors on a également $b \in A$.

Constater que, pour toute partie $B \subset X/\mathcal{R}$, l'image inverse $\pi^{-1}(B) \subset X$ est saturée.

2. Soit $V \subset X/\mathcal{R}$. Montrer que V est ouvert (pour la topologie quotient) si et seulement si V est la projection d'un ouvert saturé : il existe un ouvert saturé $U \subset X$ tel que $V = \pi(U)$.
3. Soit Y un espace topologique.
 - (a) Montrer qu'une application $f : X/\mathcal{R} \rightarrow Y$ est continue si et seulement si $f \circ \pi : X \rightarrow Y$ est continue.
 - (b) Si $F : X \rightarrow Y$ est application continue, et si F passe au quotient en une application $f : X/\mathcal{R} \rightarrow Y$, montrer que f est continue.

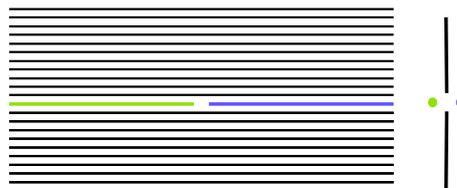
Exercice 10.29. Espace des feuilles

Soit la relation d'équivalence définie sur $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par $(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2)$ si et seulement si $y_1 = y_2 \neq 0$, ou bien $y_1 = y_2 = 0$ et $x_1 x_2 > 0$.

1. Interpréter géométriquement l'espace quotient $Y = X/\mathcal{R}$. Faire un dessin.
2. L'espace topologique quotient Y est-il séparé ?
3. Exhiber une partie $Z \subset Y$ compacte pour la topologie induite, mais non fermée dans Y . (Voir le paragraphe E pour la notion de compacité dans le cadre topologique).

A gauche les feuilles et, en couleurs, les deux feuilles exceptionnelles.

A droite, l'espace quotient (stylisé...) : ce quotient, non séparé, apparaît pourtant de façon bien naturelle.

**D Espaces vectoriels topologiques**

On parle d'espace vectoriel topologique lorsque la topologie est cohérente avec les lois d'espace vectoriel, ce qui est la moindre des choses.

Définition 10.30. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Une topologie sur E en fait un espace vectoriel topologique (ou simplement un e.v.t.) lorsqu'elle rend continues les lois d'espace vectoriel

$$(x, y) \in E \times E \longrightarrow x + y \in E$$

$$(t, x) \in \mathbb{R} \times E \longrightarrow tx \in E.$$

Les produits $E \times E$ et $\mathbb{R} \times E$ sont munis de la topologie produit, engendrée par les produits d'ouverts, et pour laquelle les projections sont continues.

Exemple 10.31. La topologie associée à une norme sur E (on dit alors qu'elle est normable) fait de E un e.v.t.

Exercice 10.32. Dans un e.v.t. les translations $\tau_z : x \in E \mapsto x + z \in E$ sont des homéomorphismes. En particulier une application linéaire entre e.v.t. est continue si et seulement si elle est continue en 0.

Exercice 10.33. Espace vectoriel quotient

Soient E un espace vectoriel topologique sur \mathbb{R} , et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel.

1. (a) Montrer que E/F , muni de la topologie quotient, est un espace vectoriel topologique.
 (b) Montrer que le quotient E/F est séparé si et seulement si le sous-espace vectoriel $F \subset E$ est fermé.
2. On suppose désormais que E est un espace vectoriel normé, et que le sous-espace F est fermé. On munit E/F de la topologie quotient.
 - (a) Montrer que l'application $a \in E/F \mapsto \inf\{\|x\|, x \in a\}$ est une norme sur E/F qui rend la projection canonique $\pi : E \rightarrow E/F$ continue.
 - (b) Montrer que cette norme réalise sur E/F la topologie quotient.
 - (c) Montrer que, si E est un espace de Banach, le quotient E/F est également un espace de Banach.

Sur tout \mathbb{R} -espace vectoriel E on a des formes linéaires. Par exemple, si l'on choisit une base $(e_i)_{i \in I}$ de E , on peut considérer les formes linéaires coordonnées

$$x \in E \longrightarrow x_i \in \mathbb{R}$$

lorsque x s'écrit comme combinaison linéaire $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$.

Si E est un espace vectoriel topologique, on privilégiera bien sûr les formes linéaires continues. Mais en existe-t-il toujours? Le théorème de Hahn-Banach 2.5 répond à cette question par l'affirmative lorsque E est un espace vectoriel normé. Qu'en est-il dans le cas général?

Définition 10.34. Une partie $C \subset E$ d'un espace vectoriel réel E est convexe lorsque

$$x \in C, y \in C, t \in [0, 1] \Rightarrow tx + (1 - t)y \in C.$$

Remarquons que, si $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue sur un \mathbb{R} -espace vectoriel topologique E , alors l'ensemble

$$C = \{x \in E, |\lambda(x)| < 1\}$$

est un voisinage convexe de 0. Cette remarque va nous permettre d'exhiber un espace vectoriel topologique, très naturel, sur lequel la seule forme linéaire continue est la forme linéaire nulle!

Exercice 10.35. Soit l'ensemble

$$L^{1/2} := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \int_0^1 |f|^{1/2} < \infty\},$$

des (classes de) fonctions mesurables sur $[0, 1]$, et de puissance 1/2-intégrables.

(1) Montrer que $L^{1/2}$ est un espace vectoriel.

(2) Montrer que l'expression $d(f, g) := \int_0^1 |f - g|^{1/2}$ définit une distance sur l'espace $L^{1/2}$, puis que cette distance fait de $L^{1/2}$ un espace vectoriel topologique.

(3) Montrer que l'enveloppe convexe de la boule $B(0, R) \subset L^{1/2}$ contient la boule $B(0, \sqrt{2}R)$.

Pour $f \in L^{1/2}$, on pourra introduire $a \in [0, 1]$ tel que $\int_0^a |f|^{1/2} = \int_a^1 |f|^{1/2}$.

(4) En déduire que la seule forme linéaire continue sur l'e.v.t. $L^{1/2}$ est la forme nulle.

Mentionnons par contre que le théorème de Hahn-Banach que nous avons démontré dans le cadre des espaces vectoriels normés s'étend (avec pratiquement la même démonstration) aux espaces vectoriels topologiques "qui possèdent suffisamment de parties convexes", c'est-à-dire dans lesquels l'origine admet une base de voisinages convexes, autrement dit les espaces vectoriels topologiques localement convexes.

E Compacité

Définition 10.36. Espace topologique compact

Un espace topologique X est compact si il est séparé, et si il satisfait la propriété de Borel-Lebesgue : de tout recouvrement de X par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Nous verrons un peu plus loin (exercice 10.59) qu'il n'est plus possible d'utiliser la propriété de Bolzano-Weierstrass pour caractériser la compacité d'un espace topologique non métrisable. Cependant, les résultats suivants que vous connaissez déjà dans le cadre métrique sont encore vrais dans le cadre topologique, avec les mêmes démonstrations... pourvu que l'on utilise la version de ces démonstrations en termes d'ouverts et non de suites.

Lemme 10.37. *Soient X et Y deux espaces topologiques.*

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue, avec X compact et Y séparé. Alors l'image $f(X)$ est compacte.

Il suit qu'une application continue $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ avec X compact est bornée et qu'elle atteint ses bornes.

On suppose X compact. Une partie $F \subset X$ de X est compacte si et seulement si $F \subset X$ est fermée.

Une bijection continue entre deux espaces topologiques compacts est un homéomorphisme.

Vous avez vu le résultat suivant dans le cours de Topologie.

Rappel 10.38. *Un produit fini, ou bien dénombrable, d'espaces métriques compacts est (métrisable) compact.*

Ce résultat de compacité s'étend aux produits quelconques d'espaces métriques (l'espace produit n'est alors plus métrisable en général, voir l'exercice 10.25, mais il reste compact), et même aux produits quelconques d'espaces topologiques.

Théorème 10.39. de Tychonov

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques compacts. L'espace topologique produit $X = \prod_{i \in I} X_i$ est alors compact.

Preuve du théorème de Tychonov

La preuve n'est pas difficile, mais elle nécessite de prendre les choses par le bon bout. Elle repose sur le lemme de Zorn. Cette preuve peut, sans aucun dommage, être omise en première lecture ! En effet, la méthode suivie est *ad hoc* et vous aurez peu d'occasions de vous en inspirer pour autre chose.

Il va s'agir d'utiliser la propriété de Borel-Lebesgue, donc de manipuler des recouvrements de l'espace produit $X = \prod_{i \in I} X_i$ par des ouverts.

Définition 10.40. *Soit X un espace topologique.*

Un mauvais recouvrement de X est un recouvrement ouvert de X dont on ne peut pas extraire un sous-recouvrement fini.

Lemme 10.41. *Soit X un espace topologique. Supposons que X admette des mauvais recouvrements.*

Alors, l'ensemble des mauvais recouvrements de X possède un élément maximal pour l'inclusion.

Preuve L'ensemble des mauvais recouvrements de X , que l'on ordonne partiellement par l'inclusion, est inductif. En effet, si $(\mathcal{R}_a)_{a \in A}$ est une famille totalement ordonnée de mauvais recouvrements, alors $\mathcal{R} = \cup_{a \in A} \mathcal{R}_a$ est un mauvais recouvrement. L'assertion découle alors du lemme de Zorn. \square

Lemme 10.42. *Soit X un espace topologique et \mathcal{R} un mauvais recouvrement maximal de X . Soient V et W deux ouverts de X .*

- (1) *On suppose que $W \subset V$. Si $W \notin \mathcal{R}$, alors $V \notin \mathcal{R}$.*
- (2) *Si $V \notin \mathcal{R}$ et $W \notin \mathcal{R}$, on a également $V \cap W \notin \mathcal{R}$.*

Preuve Le mauvais recouvrement \mathcal{R} étant maximal, lorsqu'on adjoint à \mathcal{R} un nouvel ouvert, le nouveau recouvrement n'est plus mauvais.

(1) Si $W \notin \mathcal{R}$, il existe une famille finie $(U_i)_{1 \leq i \leq p}$ d'ouverts appartenant à \mathcal{R} telle que (U_1, \dots, U_p, W) recouvre X .

Puisqu'on a supposé $W \subset V$, la famille (U_1, \dots, U_p, V) recouvre également X . Puisque \mathcal{R} est un mauvais recouvrement, c'est que $V \notin \mathcal{R}$.

(2) Puisque $V \notin \mathcal{R}$ et $W \notin \mathcal{R}$, il existe des ouverts $U_1, \dots, U_p, U'_1, \dots, U'_q$ de \mathcal{R} telles que (U_1, \dots, U_p, V) et (U'_1, \dots, U'_q, W) soient deux recouvrements de X . Alors la famille $(U_1, \dots, U_p, U'_1, \dots, U'_q, V \cap W)$ fournit un recouvrement ouvert de X , donc $V \cap W \notin \mathcal{R}$. \square

Lemme 10.43. *Soit X un espace topologique. On suppose que la topologie de X est engendrée par une famille de parties $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$.*

Si X admet un mauvais recouvrement, il admet un mauvais recouvrement par des ouverts qui appartiennent à \mathcal{A} .

Preuve Soit \mathcal{R} un mauvais recouvrement maximal de X . Il en existe grâce au lemme 10.41. On va voir que $\mathcal{R} \cap \mathcal{A}$ recouvre X (ce sont les ouverts de \mathcal{R} qui appartiennent à \mathcal{A}); ce sera, comme \mathcal{R} , un mauvais recouvrement.

Soit donc $x \in X$. Puisque \mathcal{R} est un recouvrement de X , il existe $V \in \mathcal{R}$ avec $x \in V$. Puisque \mathcal{A} engendre la topologie, il existe $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ avec $x \in A_1 \cap \dots \cap A_k \subset V$.

Comme $V \in \mathcal{R}$, le lemme 10.42 (1) (ou plutôt sa contraposée) assure que $A_1 \cap \dots \cap A_k \in \mathcal{R}$.

En appliquant plusieurs fois le lemme 10.42 (2) (ou plutôt sa contraposée) on obtient l'existence d'un indice $i \in \{1, \dots, k\}$ avec $A_i \in \mathcal{R}$. Puisque $x \in A_i$ avec $A_i \in \mathcal{R} \cap \mathcal{A}$, et que ceci est valable pour tout $x \in X$, c'est que $\mathcal{R} \cap \mathcal{A}$ est un recouvrement ouvert (donc un mauvais recouvrement) de X . \square

Preuve du théorème de Tychonov

L'espace topologique produit $X = \prod_{i \in I} X_i$ est séparé, comme chacun des facteurs (voir l'exercice 10.25).

Soit \mathcal{A} la famille des ouverts de X de la forme $U \times \prod_{i \neq j} X_i$, où $U \subset X_j$ est ouvert. Cette famille engendre la topologie produit.

Supposons par l'absurde que X admette un mauvais recouvrement. Il admet donc, d'après le lemme 10.43 un mauvais recouvrement \mathcal{R} par des ouverts appartenant à \mathcal{A} .

Pour chaque $j \in I$ et on note $\mathcal{R}_j \subset \mathcal{P}(X_j)$ l'ensemble des ouverts $U \subset X_j$ pour lesquels $U \times \prod_{i \neq j} X_i \in \mathcal{R}$. De deux choses l'une :

- Soit il existe un indice $j \in I$ tel que \mathcal{R}_j recouvre X_j . Comme X_j est supposé compact, on peut extraire de \mathcal{R}_j un sous-recouvrement fini $(U_a)_{a \in A}$ de X_j . Il lui correspond donc un sous-recouvrement fini $(U_a \times \prod_{i \neq j} X_i)_{a \in A}$ de X par des ouverts de \mathcal{R} . Contradiction.

- Sinon, pour chaque $j \in I$, la famille d'ouverts \mathcal{R}_j ne recouvre pas X_j . On choisit alors pour chaque indice $j \in I$ un point $x_j \in X_j$ non recouvert par \mathcal{R}_j . Le point $x := (x_j) \in X$ n'est pas recouvert par \mathcal{R} . Contradiction également. \square

F Topologie faible-*

Nous revenons maintenant sur la topologie faible-*, déjà rencontrée au chapitre 8. Nous commençons par définir cette topologie sur le dual E' de tout espace vectoriel normé. Dans le cas séparable, cette topologie induit sur la boule $B_{E'}$ la topologie métrisable définie au théorème 8.8 (paragraphe F.1).

Même s'il n'y a pas autant d'applications que dans le cas séparable, on sera (peut-être) satisfaits de constater que la boule unité du dual d'un evn non séparable est encore compacte pour la topologie faible-* – cependant cette boule n'est alors plus *-faiblement métrisable (paragraphe F.2).

Rappelons que, lorsque E est un espace vectoriel normé de dimension infinie, la boule unité fermée $B_{E'}$ du dual n'est jamais compacte pour la topologie forte (associée à la norme sur E').

Pour avoir plus de parties compactes dans E' , nous allons affaiblir sa topologie, c'est-à-dire introduire une topologie sur E' qui a moins d'ouverts que la topologie forte. Ainsi, la propriété de Borel-Lebesgue qui doit être vérifiée pour qu'une partie $A \subset E'$ soit compacte sera plus facile à obtenir (il y aura moins de façons de recouvrir A par des ouverts, donc moins de conditions à vérifier!). Cette nouvelle topologie est la topologie faible-*.

Définition 10.44. Soient E un evn et E' son dual continu. La topologie faible-* sur E' est la topologie la moins fine qui rende chaque application d'évaluation

$$e_x : f \in E' \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

(pour $x \in E$) continue.

La topologie faible-* sur E' est la topologie initiale associée à la famille d'applications $(e_x)_{x \in E}$. Si l'on voit $E' \subset \mathbb{R}^E$ comme une partie de l'ensemble des fonctions $g : E \rightarrow \mathbb{R}$, la topologie faible-* sur E' est induite par la topologie de la convergence simple sur l'espace \mathbb{R}^E (exemple 10.22).

Exercice 10.45. Une suite (f_n) de formes linéaires continues sur E converge vers $f \in E'$ pour la topologie faible-* (on notera $f_n \xrightarrow{*} f$) si elle converge simplement, c'est-à-dire si et seulement si $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour tout $x \in E$.

Lemme 10.46. La topologie faible-* fait de E' un evt séparé.

Preuve Soient $f, g \in E'$ distinctes. Il existe donc un vecteur $x \in E$ pour lequel $|f(x) - g(x)| = \varepsilon > 0$. Les parties

$$\begin{aligned} V &= \{h \in E' \mid |h(x) - f(x)| < \varepsilon/2\} \\ W &= \{h \in E' \mid |h(x) - g(x)| < \varepsilon/2\} \end{aligned}$$

sont deux ouverts de E' pour la topologie faible-*. Ils sont disjoints, avec $f \in V$ et $g \in W$. La topologie faible-* est donc séparée. On vérifie facilement que, pour cette topologie, les lois d'espace vectoriel sont continues. \square

Proposition 10.47. *En dimension infinie, tout voisinage de 0 dans E' pour la topologie faible-* contient une droite vectorielle. La boule unité $B_{E'}$ n'est donc pas un voisinage de 0 pour la topologie faible-**.

Preuve Se donner un voisinage V de 0 pour la topologie faible-*, c'est en effet se donner les contraintes sur les valeurs prises en un nombre fini de points (x_1, \dots, x_k) de E (exercice 10.21).

Le théorème de Hahn-Banach permet alors de construire une forme linéaire continue $f \in E'$ non identiquement nulle, mais qui s'annule sur chacun des points $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$. La droite $\mathbb{R}f$ est alors incluse dans V . \square

F.1 Dual d'un evn séparable

Lorsque l'espace vectoriel normé E est séparable, la restriction à la boule $B_{E'} \subset E'$ de la topologie faible-* est une vieille connaissance. Rappelons que, dans ce cas, on a introduit une distance δ (8.1) sur $B_{E'}$ qui en fait un espace métrique compact (théorème de Banach-Alaoglu 8.8), et qui a les mêmes suites convergentes que la boule $(B_{E'}, \mathcal{T}_*)$ munie de la topologie faible-*. Cela va nous suffire à montrer que ces deux topologies coïncident puisque $(B_{E'}, \delta)$ est... métrisable.

Proposition 10.48. Théorème de Banach-Alaoglu séparable

Soit E un espace vectoriel normé séparable. La boule unité fermée $B_{E'}$, munie de la topologie faible-, est un espace topologique métrisable compact.*

Preuve Nous voulons montrer que l'application

$$\text{Id} : (B_{E'}, \delta) \rightarrow (B_{E'}, \mathcal{T}_*)$$

est un homéomorphisme. Puisque la topologie faible-* est séparée (lemme 10.46) et la boule $(B_{E'}, \delta)$ est compacte, le lemme 10.37 assure qu'il suffit de voir que cette application (bijective) est continue.

L'espace $(B_{E'}, \delta)$ étant... métrisable il suffit, pour que l'application $\text{Id} : (B_{E'}, \delta) \rightarrow (B_{E'}, \mathcal{T}_*)$ soit continue, qu'elle soit séquentiellement continue. C'est bien le cas puisque, si $f_n, f \in B_{E'}$, on a $\delta(f_n, f) \rightarrow 0$ si et seulement si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur E . \square

En dimension finie, la topologie faible-* sur E' est la topologie associée à la norme subordonnée sur E' ... ou à n'importe quelle norme sur E' .

Nous allons voir par contre que la topologie faible-* sur le dual tout entier E' d'un espace de Banach n'est métrisable que lorsque cet espace de Banach E , et donc E' , est de dimension finie.

Proposition 10.49. *Soit E un espace de Banach. On suppose que le dual continu E' , muni de la topologie faible-*, est métrisable. Alors E est de dimension finie.*

Preuve Supposons que E' , muni de la topologie faible-*, soit métrisable. Alors tout point de E' , et en particulier la forme linéaire nulle, admet une base dénombrable de voisinages $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (voir la remarque 10.58).

Quitte à restreindre ces voisinages, nous pouvons supposer que

$$V_k = \{f \in E' \mid \forall x \in A_k, |f(x)| < \varepsilon_k\} \quad (10.1)$$

où chaque $A_k \subset E$ est une partie finie de E , et $\varepsilon_k > 0$ (exercice 10.18).

Nous allons voir que $E = \text{vect}(\cup_{k \in \mathbb{N}} A_k)$. Autrement dit, l'espace de Banach E admet une base algébrique finie ou dénombrable. Il suit alors du théorème de Baire que E est de dimension finie (exercice 1.4).

Soient en effet $y \in E$ et $\varepsilon > 0$, et introduisons le voisinage (pour la topologie faible-*)

$$W = \{f \in E' \mid |f(y)| < \varepsilon\}$$

de la forme linéaire nulle. Par définition d'une base de voisinages, il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $V_k \subset W$. Il suit que toute forme linéaire $f \in E'$ qui s'annule en tout point x de la partie finie A_k prend une valeur plus petite que ε au point y . Par homogénéité, cette forme linéaire f s'annule en fait au point y . Le théorème de Hahn-Banach 2.5 assure alors que y appartient à l'espace vectoriel $\text{vect}(A_k)$ engendré par la famille finie de vecteurs de A_k .

Finalement, tout vecteur $y \in E$ est combinaison linéaire des vecteurs de la partie dénombrable $A := \cup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, ce qu'on voulait. \square

On est en droit de trouver louche que la boule $B_{E'}$ puisse être métrisable pour la topologie faible-*, sans que l'espace E' ne le soit ! On devrait alors être rassurés par la proposition 10.47 : en dimension infinie, la boule unité $B_{E'}$ n'est pas un voisinage de 0 pour la topologie faible-*

F.2 Dual d'un evn quelconque

Lorsque l'espace vectoriel normé E n'est plus supposé séparable, la topologie faible-* sur la boule unité $B_{E'}$ n'est plus métrisable mais elle fait toujours de la boule $B_{E'}$ un espace topologique compact.

Théorème 10.50. Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki

Soit E un espace vectoriel normé. La boule unité fermée $B_{E'}$ du dual, munie de la topologie faible-, est compacte.*

Preuve C'est une conséquence du théorème de Tychonov.

Une forme linéaire $f \in E'$ est connue... lorsque l'on connaît les valeurs qu'elle prend sur tout vecteur $x \in E$. De plus, pour toute forme linéaire $f \in B_{E'}$ et tout vecteur $x \in E$, on a $f(x) \in [-\|x\|, \|x\|]$. L'application

$$J : f \in B_{E'} \rightarrow (f(x))_{x \in E} \in \prod_{x \in E} [-\|x\|, \|x\|]$$

est donc bien définie et injective, c'est donc une bijection sur son image.

Notons $S = \prod_{x \in E} [-\|x\|, \|x\|]$ l'espace topologique produit. Le théorème de Tychonov assure que S est compact.

On commence par remarquer que l'application J est un homéomorphisme de $B_{E'}$, munie de la topologie faible-*, sur son image $J(B_{E'}) \subset S$, munie de la topologie induite : il s'agit en effet, de part et d'autre, de la topologie de la convergence simple. On laisse au lecteur le soin d'approfondir ce point si nécessaire (sans utiliser de suites, cela va de soi).

On montre ensuite que l'image $J(B_{E'})$ est une partie fermée de S . En exprimant en effet que $s \in J(B_{E'})$ est l'image d'une forme *linéaire*, on obtient que

$$J(B_{E'}) = \{s = (s_x)_{x \in E} \in S \mid s_{x+y} = s_x + s_y, s_{tx} = ts_x \forall t \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E\}.$$

Si l'on note $\pi_x : s = (s_x)_{x \in E} \in S \mapsto s_x \in [-\|x\|, \|x\|]$ les projections sur chacun des facteurs ($x \in E$), ces projections sont continues et

$$J(B_{E'}) = \left(\bigcap_{x, y \in E} (\pi_{x+y} - \pi_x - \pi_y)^{-1}(0) \right) \left(\bigcap_{x \in E, t \in \mathbb{R}} (\pi_{tx} - t\pi_x)^{-1}(0) \right)$$

est fermé dans S comme intersection de fermés.

Comme le produit S est compact, $J(B_{E'})$ également (lemme 10.37), et on a le résultat annoncé. \square

Remarque 10.51. La proposition 10.47 nous rassure : ce théorème ne contredit pas le théorème de compacité de Riesz !

Théorème 10.52. Théorème de compacité de Riesz

Soit E un espace vectoriel topologique. Si l'origine y admet un voisinage compact, l'espace est de dimension finie.

Exercice 10.53. Topologie faible-* sur le dual de $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

Soient $E = \ell^\infty(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme sup, et E' son dual.

1. Soit $f_n : (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E \mapsto x_n \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) l'application d'évaluation à la place n . Montrer que $f_n \in E'$, et déterminer sa norme.
2. Peut-on extraire de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge simplement ? Est-ce que cela contredit le théorème de Banach-Alaoglu ? Voir également le paragraphe G.2.

G Emboscades

Les exercices suivants illustrent des différences qui apparaissent lorsqu'on passe d'une topologie métrique (ou plutôt, métrisable) à une topologie qui ne l'est pas. Mieux vaut être prévenu...

G.1 Critères séquentiels

Définition 10.54. On dit qu'une partie $A \subset X$ d'un espace topologique est séquentiellement fermée si, lorsqu'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A converge vers $\alpha \in X$, la limite α appartient encore à A .

Une application $f : X \rightarrow Y$ entre deux espaces métriques est séquentiellement continue si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X convergeant vers $\alpha \in X$, la suite image $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(\alpha)$ dans Y .

Lorsque X et Y sont des espaces métriques une partie $A \subset X$ est fermée si et seulement si elle est séquentiellement fermée. De même, une application $f : X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si elle est séquentiellement continue (ce sont les critères séquentiels de fermeture, ou de continuité).

Qu'en est-il dans un espace topologique ? On commence par une bonne nouvelle.

Exercice 10.55. Fermé implique séquentiellement fermé. Continu implique séquentiellement continu.

Soient X et Y deux espaces topologiques.

1. Soit $A \subset X$ une partie fermée de X . Montrer que si $a_n \in A$ ($n \in \mathbb{N}$) et si $a_n \rightarrow \alpha$, alors $\alpha \in A$.
2. Soit $f : X \rightarrow Y$ continue. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X . Montrer que si $x_n \rightarrow \alpha$ dans X , alors $f(x_n) \rightarrow f(\alpha)$ dans Y .

Par contre, pour la réciproque, les choses se gâtent !

Exercice 10.56. Séquentiellement continu n'implique pas continu.

Soit $X \subset [0, 1]^{[0, 1]}$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, que l'on munit de la topologie de la convergence simple, i.e. de la topologie induite par la topologie produit sur $[0, 1]^{[0, 1]}$ (exemple 10.22).

1. Décrire les ouverts pour cette topologie.
2. Montrer que la forme linéaire $I : f \in X \mapsto \int_0^1 f(t) dt \in \mathbb{R}$ est séquentiellement continue mais qu'elle n'est pas continue.

Exercice 10.57. Séquentiellement fermé n'implique pas fermé.

Identifions l'espace de Hilbert $H = \ell^2(\mathbb{N}^*)$ à son dual par le théorème de représentation de Riesz. On munit alors H de la topologie faible-*. On note $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la base hilbertienne canonique de H . Soit $A = \{\sqrt{n} e_n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \subset H$.

1. Démontrer que l'origine appartient à l'adhérence de A pour la topologie faible-* (cela signifie que tout voisinage de 0, pour la topologie faible-*, rencontre A).

2. Soit $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite avec $x_p \in A$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. On suppose que la suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge pour la topologie faible-*. Dédurre du théorème de Banach-Steinhaus 1.7 que la suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est bornée en norme.
3. Montrer alors que A est séquentiellement fermé dans H , mais pas fermé.

Remarque 10.58. Pourquoi suffit-il, dans un espace métrique, de travailler avec des suites (donc des familles *dénombrables*) et que ce n'est plus le cas dans un espace topologique quelconque ?

La raison en est que tout point x d'un espace métrique admet une base *dénombrable* de voisinage, qu'on peut donc tous visiter rien qu'avec une suite. Cela signifie qu'il existe une famille dénombrable $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de voisinages de x tels que tout voisinage W de x contient l'un des V_n , soit $V_n \subset W$. Dans un espace métrique, prendre simplement $V_n = B(x, 1/n)$, une famille dénombrable de boules de rayon tendant vers 0.

G.2 Borel-Lebesgue versus Bolzano-Weierstrass

Terminons cette série d'exercices en revenant sur la notion de compacité. Dans un espace métrique, les propriétés de Borel-Lebesgue et de Bolzano-Weierstrass sont équivalentes, et permettent l'une ou l'autre de caractériser les espaces métriques compacts. Dans un espace topologique quelconque, même séparé, aucune de ces propriétés n'implique l'autre (voir également l'exercice 10.53). 

Exercice 10.59. Propriétés de Borel-Lebesgue et de Bolzano-Weierstrass.

1. Soit $X = (\mathbb{S}^1)^{[0,1]}$ muni de la topologie produit. Cet espace s'identifie avec l'espace $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{S}^1)$ des fonctions définies sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs dans \mathbb{S}^1 , muni de la topologie de la convergence simple.

Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = e^{2i\pi nx}$ n'admet pas de sous-suite convergente. Pourtant, X est compact.

Ceci donne un exemple d'espace topologique qui vérifie la propriété de Borel-Lebesgue (car compact) mais pas la propriété de Bolzano-Weierstrass.

2. Soient maintenant $Y = [0,1]^{\mathbb{R}}$, muni de la topologie produit, et $A \subset Y$ l'ensemble des familles $(a_x)_{x \in \mathbb{R}}$ de réels de $[0,1]$ qui sont nulles hors d'une infinité dénombrable de places (ou encore, de support au plus dénombrable).
 - (a) Montrer que $A \subset Y$ est dense dans Y .
 - (b) En déduire que A , muni de la topologie induite, n'est pas compact. L'espace topologique A , séparé, ne vérifie donc pas la propriété de Borel-Lebesgue.
 - (c) Montrer que A est séquentiellement fermé dans Y .
 - (d) Montrer que A vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass.

Ceci donne un exemple d'espace topologique qui vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass, mais pas la propriété de Borel-Lebesgue.

Lexique

- $\mathbb{1}$, 69, 99
- $|A|$, 82
- $B_f(x, r)$, 72
- $\text{Bor}(X)$, 61
- $C^0(X)$, 69
- $C_{2\pi}^0$, 18
- $\mathcal{C}^{(1/3)}$, 57, 58, 91, 110, 111
- \mathcal{C}_p , 106
- $C_{i_1 \dots i_n}$, 108
- D_n , 24
- \mathcal{H}^s , 84
- \mathcal{I}_m , 98
- $K \prec f \prec V$, 71
- $K_{i_1 \dots i_n}$, 111
- $\mathcal{K}(X)$, 51
- K_n , 25
- $\text{Lip}_1(a)$, 101
- Lip_k , 101
- $L^2(\mathbb{R})$, 10
- $L_{2\pi}^2$, 10, 18
- $S_1 \prec S_0$, 47
- $S_n f$, 20
- T_m , 70
- \sqcup , 61, 92
- \mathcal{V}_δ , 83
- $\mathcal{V}_r(A)$, 51, 76
- $\| \cdot \|_2$, 18
- $\| \cdot \|_\infty$, 18
- c_0 , 22
- \dim_H , 88
- $f_n \xrightarrow{*} f$, 49, 133
- ℓ^2 , 10, 12, 17
- $\ell^2(I)$, 13
- $\ell^2(\mathbb{N})$, 31
- ℓ^∞ , 22, 44
- ℓ^p , 38, 44
- λ_1 , 62, 68, 82
- λ_d , 84
- m^* -mesurable, 64
- $\sigma_n f$, 25
- anti-linéaire, 9
- application ouverte, 32
- approximation de l'unité, 20
- attracteur d'un IFS, 56
- base algébrique, 12, 28
- base de voisinages, 135, 138
- base hilbertienne, 14, 16, 17, 19, 29
- Bessel (inégalité de), 17
- bidual, 38
- Bolzano-Weiersrass, 43
- Borel-Lebesgue, 43, 130, 133
- coefficient de Fourier, 20
- combinaison linéaire, 12
- compacité faible, 49
- compact (espace métrique), 43
- compact (espace topologique), 130
- compact auto-similaire, 51, 56
- compact invariant, 56
- complet (espace métrique), 10
- condition de Moran, 116
- contractante (application), 55
- critère de Carathéodory, 66

- critère de densité de
 - Hahn-Banach, 38
- dense, 46
- dimension de Hausdorff, 88
- dimension de similitude, 92
- distance de Hausdorff, 51, 52
- distance de Hutchinson, 101
- dragons jumeaux, 2, 59
- du Bois-Reymond, 21
- dual, 36
- dual continu, 36, 49
- élément maximal, 41, 131
- ensemble triadique de Cantor, 57
- éponge de Menger, 2, 59
- équicontinuité, 45
- espace de Hilbert, 10, 37, 38
- espace hermitien, 9
- espace topologique, 121
- evn, 29
- *-faiblement compact, 96
- faible-* (convergence), 96
- fonctions de Hermite, 16
- forme linéaire positive, 69
- Fourier (séries de), 31
- graphe, 34
- identité de Pythagore, 10
- identité du parallélogramme, 11
- IFS, 55, 99
- inégalité de Cauchy-Schwarz, 10
- inductif, 41, 131
- injectivité de Fourier, 23
- intégrale de Lebesgue, 70
- lemme crucial d'Ascoli, 46
- lemme crucial de Hahn-Banach,
 - 39
- lemme de Riemann-Lebesgue, 22
- lemme de Zorn, 41, 131
- lipschitzienne, 30, 36, 45, 55, 85,
 - 90, 97, 101
- métrique (mesure extérieure), 65,
 - 76
- majorant, 41
- mauvais recouvrement, 131
- mesurable (espace, partie), 61
- mesurable au sens de
 - Carathéodory, 63
- mesure, 61
- mesure borélienne, 61
- mesure de Hausdorff, 92
- mesure de Lebesgue, 68, 70
- mesure de probabilité, 61, 98
- mesure de Radon, 60
- mesure extérieure, 62, 65, 83
- mesure extérieure de Lebesgue, 62
- mesure Frostman, 93
- mesure invariante, 100, 104
- mesure régulière, 19, 72, 77
- mesures de Hausdorff, 84
- norme hermitienne, 10
- noyau de Dirichlet, 24, 31
- noyau de Féjer, 25
- Parseval (égalité de), 14, 21
- partition de l'unité, 71, 77, 97
- pavé, 126
- précompacité, 53
- principe de répartition de masse,
 - 94
- procédé d'orthonormalisation de
 - Gram-Schmidt, 13, 16
- procédé diagonal, 47, 49, 53
- produit scalaire, 10
- produit scalaire hermitien, 9
- projection orthogonale, 14, 20
- Pythagore, 10, 15
- relation d'ordre, 41
- relativement compact, 43, 47
- séparable, 12, 16, 17, 44, 49
- séquentiellement continu, 137
- séquentiellement fermé, 137
- série de Fourier, 21, 31

- similitude, 50
- somme partielle de Fourier, 20
- sommes de Féjer, 25
- support d'une fonction, 71
- système de fonctions intérées, 55
- théorème d'Ascoli, 47
- théorème de Banach-Picard, 101
- théorème de Baire, 27
- théorème de Banach-Alaoglu
séparable, 95, 134
- théorème de Banach-Alaoglu-
Bourbaki,
135
- théorème de Banach-Steinhaus,
21, 30
- théorème de Carathéodory, 64
- théorème de compacité de Riesz,
95, 136
- théorème de Hahn-Banach, 37,
135
- théorème de l'application ouverte,
32
- théorème de l'isomorphisme de
Banach, 31
- théorème de la projection
orthogonale, 11
- théorème de représentation de
Riesz (pour un Hilbert),
11, 37
- théorème de représentation de
Riesz-Markov, 70, 78, 98,
99
- théorème de Riesz-Fischer, 10
- théorème de Stone-Weierstrass,
19
- théorème de Tychonov, 131, 135
- théorème du graphe fermé, 34
- topologie, 121
- topologie de Zariski, 124
- topologie discrète, 121
- topologie engendrée, 122
- topologie faible-*, 49, 96, 133
- topologie finale, 127
- topologie forte sur E' , 95
- topologie grossière, 121
- topologie induite, 122
- topologie initiale, 125
- topologie produit, 125
- topologie quotient, 128
- topologie séparée, 123
- totale (famille), 14
- triangle de Sierpinski, 58, 111
- tribu, 61
- tribu borélienne, 61
- tribu engendrée, 61
- union disjointe, 61
- Urysohn (lemme d'), 71