Théorie du Signal :
Partie 1 : Filtrage de signaux analogiques

Definition 0.1. *On définit les notions suivantes :*

1. *Un* **signal** *unidimensionnel est une fonction* $t \to f(t)$ *où* t *est le temps dans* $\mathbb{R}$ *et* $f(t)$ *est dans* $\mathbb{C}$.
2. *Si* τ *est un réel et* f *un signal,* f_τ *le* **signal retardé** *est le signal définit par* $f_\tau(t) = f(t-\tau)$.
3. *Un* **filtre** L *est un opérateur linéaire sur les signaux.*
4. *Il est* **homogène** *si* $Lf_\tau = (Lf)_\tau$ *(c'est à dire* $Lf = g \Rightarrow Lf(t-\tau) = g(t-\tau)$*).*
5. *Le dirac* δ *vérifie* $\int_{\mathbb{R}} f(t)\delta(t)dt = f(0)$. *Plus généralement,*
$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(u)\delta(t-u)du.$$
6. *Si* L *est adapté et régulier, on appelle* **réponse impulsionnelle** *la quantité* $h(t) = L[\delta]$. *On a*
$$Lf = \int_{\mathbb{R}} f(u)h(t-u)du = f \star h$$
(où $\star$ *est la convolution :* $(f \star g)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy$.
7. *La transformée de Fourier de* f *fonction* L^1 *est*
$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\omega t}d\omega.$$
Alors si $\hat{f}$ *est* L^1, *on peut retrouver* f *et* Lf *à partir de* $\hat{f}$ *:*
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad Lf(t) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\omega)\hat{h}(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$
(cela vient de $f \hat{\star} g = \hat{f}\hat{g}$.
8. **Parseval** *Si* f *est* L^2, *on peut définir aussi* $\hat{f}$ *qui est* L^2 *de même énergie* $\int |f|^2 = \frac{1}{2\pi}\int |\hat{f}|^2$.

Exercice 1. Transformation de Fourier

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction indicatrice de $[-1;1]$: $f(t) = 1_{t\in[-1;1]}$. Est elle L^1 ?
2. Soit f une fonction L^1, $\hat{f}$ sa transformée de Fourier et a un réel.
   (a) Calculer la transformée de Fourier de $t \to af(t)$ en fonction de $\hat{f}$.
   (b) Calculer la transformée de Fourier de $t \to f(at)$ en fonction de $\hat{f}$.
   (c) Calculer la transformée de Fourier de $t \to f(t-a)$ en fonction de $\hat{f}$.
   (d) Calculer la transformée de Fourier de $t \to e^{iat}f(t)$ en fonction de $\hat{f}$.
   (e) On suppose que f est $\mathcal{C}^1$ et f' est intégrable, calculer la transformée de Fourier de f' en fonction de $\hat{f}$.
3. Montrer que si f est à valeur réelles et est paire alors $\hat{f}$ prend des valeurs réelles.

Exercice 2. Transformée de Fourier de la Gaussienne

On cherche à calculer la transformée de Fourier de $f(t) = \exp(-t^2)$.

1. Soit $I = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$. À l'aide d'un changement de coordonnées polaire, calculer I. En déduire la valeur de $\hat{f}(0)$.
2. Montrer que $\hat{f}$ est dérivable et trouver une équation différentielle vérifiée par $\hat{f}$.
3. En déduire la valeur de $\hat{f}$.

Exercice 3. Inversion de la transformée de Fourier

On cherche à montrer que si $\hat{f}$ est L^1 alors on peut reconstruire f à partir de $\hat{f}$ grâce à la formule suivante :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega.$$

On va se donner l'hypothèse simplificatrice supplémentaire (non nécessaire pour que le résultat soit vrai) que f est continue et bornée. On définit pour cela l'intégrale

$$I_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega \in \mathbb{R}} e^{i\omega t} e^{-(\varepsilon\omega)^2} \hat{f}(\omega) d\omega.$$

1. Montrer que
$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega \in \mathbb{R}} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega..$$
2. Montrer que $I_\varepsilon(t) = f \star g_\varepsilon$ avec
$$g_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\varepsilon} e^{-\frac{t^2}{4\varepsilon^2}}.$$
3. Calculer $\int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon$.
4. En déduire que $I_\varepsilon(t) \to f(t)$ lorsque $\varepsilon \to 0$.
5. Conclure.

Exercice 4. Transformée de Fourier

1. Calculer la transformée de Fourier de
$$t \to \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$
(on pourra utiliser les exercices précédents).
2. Calculer la transformée de Fourier de
$$t \to max(0, 1 - |t|).$$

1. Si f est intégrable, et $g(x) = af(bx + c)$ où a, b, c sont trois réels. Donner la transformée de Fourier de g en fonction de celle de f.
2. Calculer $\mathbb{1}_{-1<x<1} \star \mathbb{1}_{-1<x<1}$, la convolution de la fonction $\mathbb{1}_{-1<x<1}$ avec elle-même.
3. Soit la fonction $g(x) = (1 - |x|)\mathbb{1}_{-1<x<1}$. Tracer le graphe de g et trouver sa transformée de Fourier. (On pourra utiliser la question précédente et le fait que la transformée de $\mathbb{1}_{-1<x<1}$ est $\hat{f}(\omega) = 2\frac{\sin(\omega)}{\omega}$.)

4. En déduire la valeur de
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^4 dx.$$
5. Soit h la fonction
$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 2+x & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant -1 \\ 1 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2-x & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } 2 \leqslant x \end{cases}$$
Tracer le graphe de h. En utilisant la fonction g pour réexprimer h, trouver la transformée de Fourier de h.

Exercice 5. Soient les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par
$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} \qquad g(t) = e^{-|t|}.$$
1. f est-elle L^1 ? L^2 ? Même questions pour g.
2. Quelles est la transformée de Fourier de g ?
3. En déduire la transformée de Fourier de f

Théorie du Signal :
Partie 2 : Discrétisation de signal

Exercice 6. Convergence uniforme de la reconstruction à partir de l'échantillonnage
Soit f une fonction L^2 telle que $\hat{f}(\omega) = 0$ pour tout $|\omega| > \pi$. On pose

$$f_N(t) = \sum_{|n| \leqslant N} f(n) \operatorname{sinc}(\pi(t-n)).$$

($\operatorname{sinc}(t) = \sin(t)/t$). On aimerait savoir à quelle vitesse est ce que f_N converge vers f.

1. Quelle est $\hat{\rho}_n$ la transformée de Fourier de $\rho_n(t) = \operatorname{sinc}(\pi(t-n))$?
2. Montrer que $\hat{f}_N$ est la projection orthogonale de $\hat{f}$ sur l'espace engendré par $\{\hat{\rho}_{-N}, \dots, \hat{\rho}_N\}$.
3. En déduire que $\hat{f}_N$ converge dans L^2 vers $\hat{f}$.
4. En déduire que $\hat{f}_N$ converge dans L^1 vers $\hat{f}$.
5. En déduire que f_N converge uniformément vers f.

Exercice 7. Convergence simple de la reconstruction à partir de l'échantillonnage
On continue l'exercice précédent.

1. Montrer que $\sum_{|n|>N} |f(n)|^2$ tend vers 0.
2. En déduire que
$$|f_N(t) - f(t)| = o(N^{-\frac{1}{2}}).$$

Exercice 8. Limitation dans la convergence simple de la reconstruction à partir de l'échantillonnage
On continue les exercices précédents. Soit

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n n^{-\frac{1+\varepsilon}{2}} \operatorname{sinc}(\pi(t-n)).$$

1. Montrer que f est L^2 et que sa transformée de Fourier est nulle pour $|\omega| > \pi$.
2. Montrer que
$$|f_N(\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2})| \geqslant C_\varepsilon N^{-\frac{1+\varepsilon}{2}}.$$

Exercice 9. Convergence rapide de la reconstruction à partir de l'échantillonnage
On continue les exercices précédents. Cette fois on suppose que $\hat{f}$ est nul si $|\omega| > a$ où $0 < a < \pi$. On se donne g une fonction telle que $\hat{g}$ est $\mathcal{C}^\infty$ qui vaut 1 sur $[-a; a]$ et nulle sur le complémentaire de $[-\pi; \pi]$.

1. Montrer que
$$f(t) = \sum_n f(n)(\operatorname{sinc}(\pi(t-n)) \star g).$$
2. Montrer que
$$f(t) = \sum_n f(n) g(t-n).$$

3. Montrer que à l'infini $g(x) = o(|x|^k)$.
4. En déduire que pour tout t, pour tout k,

$$|f_N(t) - f(t)| = o(N^{-k})$$

Théorie du Signal :
DM : Transformée de Fourier finie

On fixe N dans $\mathbb{N}^*$. Un signal fini est un élément

$$(f_0, \dots, f_{N-1}) \in \mathbb{C}^N.$$

Pour plus de facilité on préfère travailler en périodisant ces signaux. On définit donc

$$\mathcal{F}_N = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} | \forall n, f_{n+N} = f_n\}.$$

On note δ dans $\mathcal{F}_N$ le signal fini $\delta_n = 1_{n \equiv 0[N]}$ et θ l'opérateur sur $\mathcal{F}_n$ dit opérateur de retard définit par $(\theta f)_n = f_{n-1}$

1. Quelle est la dimension du $\mathbb{C}$ espace vectoriel $\mathcal{F}_n$?
2. Montrer que l'opérateur θ est inversible, exprimer l'opérateur θ^k pour k dans $\mathbb{Z}$.
3. Trouver en une base de $\mathcal{F}_N$ en fonction des $\theta^k \delta$.

On définit la convolution sur $\mathcal{F}_N$ par

$$(f \circledast g)_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k g_{n-k}.$$

1. Montrer que c'est une opération commutative et associative.
2. Montrer que $\theta(f \circledast g) = (\theta f) \circledast g = f \circledast (\theta g)$.
3. Calculer pour f dans $\mathcal{F}_N$ et k dans $\mathbb{Z}$ le signal $(\theta^k \delta) \circledast f$.

Soit L un opérateur linéaire sur $\mathcal{F}_N$ tel que $L \circ \theta = \theta \circ L$. On pose $h = L\delta$, on l'appelle la réponse impulsionnelle.

1. Montrer que pour tout f dans $\mathcal{F}_N$, $Lf = f \circledast h$.

On pose pour $0 \leqslant p < N$, k entier, e_p le signal

$$(e_p)_n = e^{\frac{2i\pi pn}{N}}.$$

Et pour f un signal on définit sa transformée de Fourier qui est le signal

$$\hat{f}_p = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{\frac{-2i\pi pn}{N}}.$$

1. Montrer que les e_p sont les vecteurs propres de L de valeur propre associée $\hat{h}_p$.
2. Montrer la formule de reconstruction

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \hat{f}_p e^{\frac{2i\pi pn}{N}}.$$

On définit le produit scalaire sur $\mathcal{F}_N$:

$$< f, g >= \sum_{n=0}^{N-1} f_n \bar{g}_n.$$

On note $\|.\|$ la norme associée.

1. Montrer que les e_p forment une base othogonale pour ce produit scalaire.
2. Calculer $\|e_p\|^2$.
3. Montrer que l'on a pour tout signaux f, g,

$$\widehat{f \circledast g} = \hat{f}\hat{g}.$$

$$< f, g >= \frac{1}{N} < \hat{f}, \hat{g} > .$$

$$\|f\| = \frac{1}{\sqrt{N}}\|\hat{f}\|$$

On s'intéresse au nombre d'étape qu'il faut pour calculer $\hat{f}$ à partir de f.

1. Montrer qu'on peut calculer les valeurs $\hat{f}_0, \ldots, \hat{f}_{N-1}$ en faisant au total $O(N^2)$ opérations.

On suppose désormais que $N = 2^m$ pour un certain entier m et on cherche à trouver une méthode pour calculer $\hat{f}$ en C_m où C_m sera beaucoup plus petit que N^2.

1. Montrer que pour tout p,

$$\hat{f}_{2p} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} (f_n + f_{n+\frac{N}{2}}) e^{\frac{-2i\pi pn}{N/2}}.$$

$$\hat{f}_{2p+1} = e^{\frac{-2i\pi n}{N}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} (f_n - f_{n+\frac{N}{2}}) e^{\frac{-2i\pi pn}{N/2}}.$$

2. En déduire un algorithme de calcul de $\hat{f}$ à partir des parties paires et impaires de f qui sont les signaux dans $\mathcal{F}_{N/2}$:

$$(f_{paire})_n = f_n + f_{n+\frac{N}{2}}$$

$$(f_{impaire})_n = e^{\frac{-2i\pi n}{N}} (f_n - f_{n+\frac{N}{2}}).$$

En déduire qu'on peut calculer $\hat{f}$ en au plus C_m opérations où la constante C_m vérifie

$$C_m \leqslant 2C_{m-1} + AN$$

pour une certaine constante A fixe.

3. En déduire qu'on peut s'en sortir en au plus $O(N \ln_2 N)$ étapes si N est une puissance de 2.

Cette algorithme est appelé transformée de Fourier rapide et permet de calculer de manière efficace des transformées de Fourier de signaux finis (et donc aussi des convolutions de signaux finis).

Théorie du Signal :
Codage de signaux et entropie

Exercice 10. On considère des messages qui sont des suites de symboles $X_i \in \{M, P, R, U, Y, Z\}$. Les fréquences d'apparition sont

$$\mathbb{P}(X_i = M) = \frac{1}{16} \qquad \mathbb{P}(X_i = P) = \frac{1}{16} \qquad \mathbb{P}(X_i = R) = \frac{1}{16}$$

$$\mathbb{P}(X_i = U) = \frac{1}{4} \qquad \mathbb{P}(X_i = Y) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(X_i = Z) = \frac{1}{16}$$

1. Calculer l'entropie de cette distribution
2. Calculer le code de Huffmann associé (donner l'arbre).
3. Pour ce code quel est le nombre moyen de bits par lettre ?
4. Montrer que pour toute suite finie $y_1, \ldots, y_n$ de 0 et 1 il existe un message $x_1 \ldots x_n$ dont le codage commence par $y_1 \ldots y_n$.
5. Quel est le codage de YUM ?
6. Si on change le premier bit du code, obtient on le code d'un autre mot ? Si oui lequel ?

Exercice 11. On considère des messages qui sont des suites de symboles $X_i \in \{A, C, F, R\}$. Les fréquences d'apparition sont

$$\mathbb{P}(X_i = A) = \frac{1}{4} \qquad \mathbb{P}(X_i = C) = \frac{1}{8} \qquad \mathbb{P}(X_i = F) = \frac{1}{4} \qquad \mathbb{P}(X_i = R) = \frac{1}{2}$$

1. Calculer l'entropie de cette distribution.
2. Calculer le code de Huffmann associé (donner l'arbre).
3. Pour ce code quel est le nombre moyen de bits par lettre ?
4. Quel est le codage de ARC ?
5. Le code 00100001 est-il le code d'un mot, si oui lequel ?

Exercice 12. On considère des messages qui sont des suites de symboles $X_i \in \{E, N, S, T, Z\}$. Les fréquences d'apparition sont

$$\mathbb{P}(X_i = E) = \frac{5}{18} \qquad \mathbb{P}(X_i = N) = \frac{2}{9} \qquad \mathbb{P}(X_i = S) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(X_i = T) = \frac{1}{9} \qquad \mathbb{P}(X_i = Z) = \frac{1}{18}$$

1. Calculer le code de Huffmann associé (donner l'arbre).
2. Pour ce code quel est le nombre moyen de bits par lettre ?
3. Quel est le codage de EST ?
4. Si on change le premier bit du code de EST, obtient on le code d'un autre mot ? Si oui lequel ?

Exercice 13. On considère des messages qui sont des suites de symboles $X_i \in \{A, B\}$. Les fréquences d'apparition sont

$$\mathbb{P}(X_i = A) = \varepsilon \qquad \mathbb{P}(X_i = B) = 1 - \varepsilon$$

1. Calculer l'entropie de cette distribution
2. Calculer le code de Huffmann associé (donner l'arbre).
3. Pour ce code quel est le nombre moyen de bits par lettre ? Que dire en fonction de la valeur de ε de l'efficacité de ce codage ?

Exercice 14. On généralise le codage de Huffmann au cas où les lettres du message $X_1X_2...$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$ (un ensemble infini). On suppose que les fréquences d'apparition sont données par

$$\mathbb{P}(X_i = k) = 2^{-k}.$$

1. Calculer H l'entropie de la distribution.
2. En s'inspirant du codage de Huffmann trouver un codage (et un arbre) pour ces messages.
3. Pour ce code quel est le nombre moyen de bits par lettre ?

Exercice 15. On fixe $p_1, \dots, p_K$ une probabilité sur $\{1, \dots, K\}$ et on définit $q_k = p_1 + \cdots + p_k$. Étant donné un message $x_1 \dots x_n$ avec x_i dans $\{1, \dots, K\}$ on définit la suite d'intervalle $I_k = [a_k, b_k]$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ de la manière suivante : $I_0 = [0; 1]$ et si $I_{k-1} = [a_{k-1}, b_{k-1}]$ alors

$$I_k = a_{k-1} + (b_{k-1} - a_{k-1})[q_{x_k - 1}; q_{x_k}[.$$

Pour coder $x_1 \dots x_n$ on regarde l'intervalle I_n et on prend un réel $z = \sum_{j=i}^{L_n} z_i 2^{-i}$ dyadique (les z_i valent 0 ou 1) dans cet intervalle, avec L_n minimal. Le codage arithmétique de $x_1 \dots x_n$ est alors la suite $z_1 \dots z_{L_n}$.

1. On suppose que $K = 2$ et $p_1 = 1 - p_2 = 0,25$. Appliquer cette procédure pour coder les 3 messages 0, 01, 010.
2. Décrire une procédure de décodage.
3. Calculer la longueur de I_n en fonction des p_{x_i}.
4. En déduire que pour tout ε, pour n assez grand la longueur de codage vérifie

$$\frac{1}{n} L_n \leqslant H + \varepsilon$$

Théorie du Signal – Examen – Durée : 3h
Documents non autorisés – Calculatrices non autorisées – Chaque réponse doit être justifiée

On rappelle que la transformée de Fourier d'une fonction f intégrable est

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Exercice 16. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ intégrable,

1. Montrer que si pour tout x, $f(x) = -f(-x)$ alors pour tout ω, $\hat{f}(\omega)$ est imaginaire pure.
2. Calculer la transformée de Fourier de

$$x \mathbb{1}_{-1 \leqslant x \leqslant 1}.$$

Exercice 17.

1. Si f est intégrable, et $g(x) = af(bx + c)$ où a, b, c sont trois réels. Donner la transformée de Fourier de g en fonction de celle de f.
2. Calculer $\mathbb{1}_{-1<x<1} \star \mathbb{1}_{-1<x<1}$, la convolution de la fonction $\mathbb{1}_{-1<x<1}$ avec elle-même.
3. Soit la fonction $g(x) = (1 - |x|)\mathbb{1}_{-1<x<1}$. Tracer le graphe de g et trouver sa transformée de Fourier. (On pourra utiliser la question précédente et le fait que la transformée de $\mathbb{1}_{-1<x<1}$ est $\hat{f}(\omega) = 2\frac{\sin(\omega)}{\omega}$.)
4. En déduire la valeur de
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^4 dx.$$
5. Soit h la fonction
$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 2 + x & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant -1 \\ 1 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } 2 \leqslant x \end{cases}$$
Tracer le graphe de h. En utilisant la fonction g pour réexprimer h, trouver la transformée de Fourier de h.

Exercice 18. Soient les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f(t) = \frac{1}{1 + t^2} \qquad g(t) = e^{-|t|}.$$

1. f est-elle L^1 ? L^2 ? Même questions pour g.
2. Quelles est la transformée de Fourier de g ?
3. En déduire la transformée de Fourier de f

Exercice 19. On considère des messages qui sont des suites de symboles $X_i \in \{A, C, F, R\}$. Les fréquences d'apparition sont

$$\mathbb{P}(X_i = A) = \frac{1}{4} \qquad \mathbb{P}(X_i = C) = \frac{1}{8} \qquad \mathbb{P}(X_i = F) = \frac{1}{4} \qquad \mathbb{P}(X_i = R) = \frac{1}{2}$$

1. Calculer l'entropie de cette distribution.
2. Calculer le code de Huffmann associé (donner l'arbre).
3. Pour ce code quel est le nombre moyen de bits par lettre ?
4. Quel est le codage de ARC ?
5. Le code 00100001 est-il le code d'un mot, si oui lequel ?

Exercice 20. On considère des messages qui sont des suites de symboles $X_i \in \{E, N, S, T, Z\}$. Les fréquences d'apparition sont

$$\mathbb{P}(X_i = E) = \frac{5}{18} \qquad \mathbb{P}(X_i = N) = \frac{2}{9} \qquad \mathbb{P}(X_i = S) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(X_i = T) = \frac{1}{9} \qquad \mathbb{P}(X_i = Z) = \frac{1}{18}$$

1. Calculer le code de Huffmann associé (donner l'arbre).
2. Pour ce code quel est le nombre moyen de bits par lettre ?
3. Quel est le codage de EST ?
4. Si on change le premier bit du code de EST, obtient on le code d'un autre mot ? Si oui lequel ?

Théorie du Signal – Examen – Correction

Exercice 21.

1. En faisant le changement de variable $s = -t$ on a :

$$\hat{f}(\omega) = \int f(t)e^{-i\omega t}dt = -\int f(s)e^{i\omega t}dt = -(\int f(s)e^{-i\omega t}dt)^* = -(\hat{f}(\omega))^*$$

   donc $\hat{f}(\omega)$ est l'opposé de son conjugué donc est imaginaire pure.

2. Sa transformée de Fourier est

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} te^{-i\omega t}dt = \frac{-1}{i\omega}\int_{-1}^{1} t(e^{-i\omega t})'dt \\
&= \frac{-1}{i\omega}([te^{-i\omega t}]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t}dt) \\
&= \frac{-1}{i\omega}(e^{-i\omega} + e^{i\omega} - \frac{-1}{i\omega}(e^{-i\omega} - e^{i\omega})) \\
&= \frac{2i}{\omega}(\frac{\sin\omega}{\omega} - \cos\omega)
\end{aligned}$$

Exercice 22.

1. En faisant le changement de variable $y = bx + c$ on a :

$$\hat{g}(\omega) = \int af(bx+c)(e^{-i\omega x})'dx = \frac{a}{b}\int f(y)(e^{-i\omega(y-c)/b})'dy = \frac{ae^{i\omega c/b}}{b}\hat{f}(\omega/b)$$

   Si f est intégrable, et $g(x) = af(bx+c)$ où a, b, c sont trois réels. Donner la transformée de Fourier de g en fonction de celle de f.

2. On a :

$$f(x) = (\mathbb{1}_{-1<x<1} \star \mathbb{1}_{-1<x<1})(y) = \int \mathbb{1}_{-1<y<1}\mathbb{1}_{-1<x-y<1}dy = \int \mathbb{1}_{y\in]-1;1[\cap]x-1;x+1[} = \text{Leb}(]-1;1[\cap]x-1;x+1$$

   Les deux intervalles sont disjoints si $|x| \geqslant 2$, alors la fonction vaut 0. Si $0 \leqslant x \leqslant 2$, $\text{Leb}(]-1;1[\cap]x-1;x+1[) = \text{Leb}(]x-1;1[) = 2-x$. De même si $-2 \leqslant x \leqslant 0$, $\text{Leb}(]-1;1[\cap]x-1;x+1[) = \text{Leb}(]-1;x+1[) = 2+x$. Ainsi

$$f(x) = (2-|x|)\mathbb{1}_{-2<x<2}.$$

3. Puisque $g(x) = f(x/2)$.
   Soit la fonction $g(x) = (1-|x|)\mathbb{1}_{-1<x<1}$. Tracer le graphe de g et trouver sa transformée de Fourier. (On pourra utiliser la question précédente et le fait que la transformée de $\mathbb{1}_{-1<x<1}$ est $\hat{f}(\omega) = 2\frac{\sin(\omega)}{\omega}$.)

4. En déduire la valeur de

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^4 dx.$$

5. Soit h la fonction
$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 2+x & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant -1 \\ 1 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2-x & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } 2 \leqslant x \end{cases}$$
Tracer le graphe de h. En utilisant la fonction g pour réexprimer h, trouver la transformée de Fourier de h.

Exercice 23. Soient les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par
$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} \qquad g(t) = e^{-|t|}.$$
1. f est-elle L^1 ? L^2 ? Même questions pour g.
2. Quelles est la transformée de Fourier de g ?
3. En déduire la transformée de Fourier de f

Exercice 24. On considère des messages qui sont des suites de symboles $X_i \in \{A, C, F, R\}$. Les fréquences d'apparition sont
$$\mathbb{P}(X_i = A) = \frac{1}{4} \qquad \mathbb{P}(X_i = C) = \frac{1}{8} \qquad \mathbb{P}(X_i = F) = \frac{1}{4} \qquad \mathbb{P}(X_i = R) = \frac{1}{2}$$
1. Calculer l'entropie de cette distribution.
2. Calculer le code de Huffmann associé (donner l'arbre).
3. Pour ce code quel est le nombre moyen de bits par lettre ?
4. Quel est le codage de ARC ?
5. Le code 00100001 est-il le code d'un mot, si oui lequel ?

Exercice 25. On considère des messages qui sont des suites de symboles $X_i \in \{E, N, S, T, Z\}$. Les fréquences d'apparition sont
$$\mathbb{P}(X_i = E) = \frac{5}{18} \qquad \mathbb{P}(X_i = N) = \frac{2}{9} \qquad \mathbb{P}(X_i = S) = \frac{1}{3}$$
$$\mathbb{P}(X_i = T) = \frac{1}{9} \qquad \mathbb{P}(X_i = Z) = \frac{1}{18}$$
1. Calculer le code de Huffmann associé (donner l'arbre).
2. Pour ce code quel est le nombre moyen de bits par lettre ?
3. Quel est le codage de EST ?
4. Si on change le premier bit du code de EST, obtient on le code d'un autre mot ? Si oui lequel ?