Transformée de Fourier :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f(t)\, dt$$

À ne pas confondre avec fonction caractéristique en proba :

$$\boxed{\Phi_\mu(\lambda) = E\left[e^{i\lambda X}\right] = \int e^{i\lambda x}\, d\mu(x)}$$

où $X \sim \mu$

On étudiait la reconstruction d'un signal $f(t)$ où $|\hat{f}(\omega)| = 0$ si $|\omega| > \frac{\pi}{T}$ grâce à :

$$f(t) = \sum_{\mathbb{Z}} \underbrace{f(nT)}_{\text{valeurs discrétisé}} \times h_T(t - nT)$$

On a étudié la convergence de

$$f_N(t) = \sum_{-N}^{N} f(nT) \times h_T(t - nT) \longrightarrow f(t)$$

On a vu si $f \in L^2$:

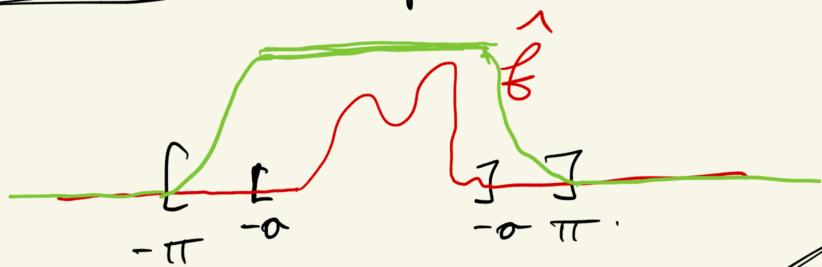
① $f_N \xrightarrow{U} f$

② $\forall t,\ f_N(t) - f(t) = o(N^{-1/2})$

Mais $\forall \varepsilon, \exists f, \exists t : \quad f_N(t) - f(t) \neq o(N^{-1/2-\varepsilon})$

Si l'hypothèse est + forte $|\hat{f}(\omega)| = 0$ sur $|\omega| > a$ où $a < \frac{\pi}{T}$ mais qu'on utilise quand même la reconstruction avec T, que se passe t-il ?

<u>**Exo 9**</u> : on fixe $T = 1$.



$$\hat{g} = \begin{cases} 1 \text{ sur } [-a;a] \\ 0 \text{ sur } [-\pi;\pi]^c \\ C^\infty \end{cases}$$

<u>Indication</u> : 1) calculer $\widehat{f*g}$

$$\widehat{f*g} = \underbrace{\hat{f}}_{\text{nul si } |\omega|>a} \hat{g} = \hat{f}\, \mathbb{1}_{[-a;a]} \underbrace{\hat{g}}_{1 \text{ sur } [-a;a]}$$

$$= \hat{f}\, \mathbb{1}_{[-a;a]}$$

$$= \hat{f}$$

Donc $\widehat{f*g} = \hat{f}$. (reconstruction de f à partir de $\hat{f}$ formule d'inversion)

Par reconstruction.

$$f = f * g = \left(\sum_n f(n) \operatorname{sinc} \pi(t-n)\right) * g$$

$$= \sum_n f(n) \operatorname{sinc} \pi(t-n) * g.$$

2) $(\operatorname{sinc}\pi(t-n) * g) = (\operatorname{sinc} \pi t * g)(t-n)$ ←

$$\widehat{\operatorname{sinc}\pi t * g} = \widehat{\operatorname{sinc}\pi t}\; \hat{g}$$

$$= \mathbb{1}_{\omega\in[-\pi;\pi]}\; \hat{g} \underset{\hat{g}(\omega)=0 \text{ si } |\omega|>\pi}{=} \hat{g}$$

Donc : $\text{sinc}\,\pi t * g = g$ par unicité de rec. $(T=1)$

Donc $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\, g(t-n)$ (formule d'inversion de Fourier).

Lemme : $(f_a * g) = (f*g)_a$

Dém $(f_a * g)(t) = \int f_a(y)\, g(t-y)$

$= \int f(y-a)\, g(t-y)$

$y' = y-a \quad = \int f(y')\, g((t-a)-y)$

$= f*g(t-a) = (f*g)_a$ $\square$

3) On va montrer que $x^k g(x)$ fonction bornée :

On a vu que si f et f' sont L^1

$$\widehat{f'} = +i\omega \hat{f}(\omega)$$

Plus généralement si $f, f', \dots f^{(p)}$ sont L^1

$$\widehat{f^{(p)}} = (i\omega)^p \hat{f}(\omega).$$

Ici par inversion de la transfo de F. ($\hat{g} \in L^2$) on a :

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i\omega t}\, \hat{g}(\omega)\, d\omega$$

Donc $\hat{\hat{g}} = 2\pi\, g(-t)$

$$\widehat{\hat{g}^{(p)}} = 2\pi (it)^p g(-t).$$

$\forall p\ \hat{g}^{(p)}$ C^∞ à support compact donc L^1.

~~Par inversion de la formule~~ ~~($\hat{g}^{(p)} \in L^2$)~~

$$\cancel{\hat{g}^{(p)}(\omega) = \int e^{i\omega t}(it)^p g(-t)\,dt}$$

~~Donc~~

$$t^p g(-t) = \frac{1}{2\pi i^p}\int \underbrace{\hat{g}^{(p)}(\omega)}_{|\cdot| \le C_p 1_{[-\pi;\pi]}} e^{-i\omega t}\, d\omega$$

$$|t^p g(-t)| \le \frac{1}{2\pi}\int C_p 1_{-\pi;\pi}\, d\omega \le 1.$$

Donc : $|g(-t)| \le \frac{C_p}{|t^p|} \quad \forall t.$

Vrai pour $p = k+1$

$\Rightarrow$ en $\pm\infty$ $\quad |g(t)| \le \frac{C_k}{|t|^{k+1}} = o\left(\frac{1}{|t|^k}\right)$

$\hat{g}$ est C^∞ à support dans $[-\pi;\pi]$

$\hat{g}^{(p)}$ aussi $\quad C_p = \sup_{[-\pi;\pi]} |\hat{g}^{(p)}| < \infty$

ii) $|f_N - f(t)|$

$$= \Big|\sum_{|n|>N} f(n)g(t-n)\Big|$$

$f(t) = \sum f(n) g(t-n)$

et même raisonnement

$f_N(t) = \sum_{-N}^{N} f(n)g(t-n)$

$$\le \sup_n |f(n)| \sum_{|n|>N} |g(t-n)|$$

$\hookrightarrow$ $\forall k$ si $t-n$ est grand $\ge N_\varepsilon$

$\le \frac{\varepsilon}{(t-n)^k}$

Si on prend $N > 2|t|$ alors

$|n| > N \Rightarrow |t-n| > |n|/2 > N/2.$

N_ε tq $|n| \ge N_\varepsilon \Rightarrow |g(n)| \le \frac{\varepsilon}{n^k}$

Alors $|f_N - f|(t) \le \sup_n |f(n)| \sum_{|n|>N} \frac{\varepsilon}{(|n|/2)^k}$

$t-n \ge N_\varepsilon$

$N > 2|t|$ et $N \ge 2N_\varepsilon$

$$\leq \underbrace{\sup_n |f(n)|}_{< \infty \,?} \; 2^k \varepsilon \times 2 \underbrace{\sum_{n>N} \frac{1}{n^k}}_{O(N^{-(k-1)})}$$

(comparaison avec intégrale).

on a vu :

$$\|f\|_2^2 = c\sum |f(n)|^2 < \infty$$

Donc $|f(n)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Donc le sup est fini.

Donc $|f_N - f|(t) = O(N^{-(k-1)})$

vrai $\forall k$ donc $= o(N^{-k})$.