Pure and Applied Mathematics Quarterly
Volume 4, Number 2
(*Special Issue: In honor of
Fedya Bogomolov, Part 1 of 2*)
1—37, 2008

Fibrations Méromorphes Sur Certaines Variétés à fibré Canonique Trivial

Ekaterina Amerik and et Frédéric Campana

A F.A. Bogomolov, en l'honneur de ses 60 ans

1. Introduction

Cet article présente quelques observations motivées par la recherche de variétés lisses projectives complexes X munies d'un endomorphisme $f : X \to X$ de degré d au moins 2.

Si l'application f est régulière, il semble difficile de produire des exemples qui ne soient pas déduits des exemples évidents (variétés toriques ou abéliennes), par produits, passage au quotient par un groupe fini, et cetera. Ce qu'indiquent [ARV], [A], [F], [N].

Lorsque f est rationnelle, il y a de nouveaux exemples, mais certains d'entre eux sont encore des versions relatives des précédents. Par exemple, si S est une surface projective de dimension canonique, ou de Kodaira, égale à 1, il est facile de voir que S admet un endomorphisme rationnel de degré $d > 1$ (que S ait ou non une section). Un tel endomorphisme f doit cependant "respecter" la fibration elliptique ϕ (d'Iitaka-Moishezon), c'est-à-dire, envoyer une fibre de ϕ

Received July 2, 2006.

sur une fibre de ϕ. Si la base est de genre ≥ 2, une puissance de f préserve donc la fibration.

Si S est une surface K3 spéciale (par exemple, elliptique ou de Kummer), elle admet encore de tels endomorphismes rationnels. Si S est générique (telle que $Pic(S) = \mathbb{Z}$, disons), on ne connaît, par contre, aucun exemple (mais il semble difficile de démontrer la non-existence).

Cependant, il est observé dans [V] qu'il existe des familles $\{X_t, t \in T\}$ de variétés X_t avec $K_{X_t} = 0$, et $Pic(X_t) = \mathbb{Z}$ pour $t \in T$ générique, munies d'un endomorphisme f_t de degré $d > 1$ pour tout $t \in T$. On peut prendre pour X_t la variété de Fano des k-plans dans une hypersurface cubique lisse V_t de $\mathbb{P}^n$, pour k et n convenables.

Par exemple, lorsque $k = 1$ et $n = 5$, il s'agit de la variété $X_t = \mathcal{F}(V_t)$ ($\mathcal{F}$ pour "Fano") des droites d'une cubique lisse V_t de dimension 4; X_t est alors lisse de dimension 4. De plus, X_t est hyperkählerienne irréductible, équivalente par déformation à $Hilb^2(S)$ où S est une surface K3 de degré 14 ([BD]). Pour t générique, $Pic(X_t) \cong \mathbb{Z}$. L'endomorphisme f associe à l, droite générique de $V_t \subset \mathbb{P}^5$, la droite l' résiduelle à l dans $P \cap V_t$, où P est l'unique plan dans $\mathbb{P}^5$ tangent à V_t le long de l (on calcule facilement $N_{l,V} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$, d'où l'existence et l'unicité de P) . Dans [V], Voisin montre que le degré d de f est 16.

Une question naturelle est de savoir si ces exemples sont "nouveaux" dans le sens de la discussion ci-dessus. Et, en effet, nous montrons tout d'abord que, pour X un membre général d'une famille comme ci-dessus, un endomorphisme rationnel de X ne préserve aucune fibration non-triviale.

Plus précisement, nous démontrons le résultat suivant:

Théorème 2.1 *Soit X une variété lisse projective, telle que $K_X = 0$ et le groupe de Néron-Severi $NS(X) \cong \mathbb{Z}$. Alors toute fibration rationnelle $g : X \dashrightarrow B$, $0 < dim(B) < dim(X)$, est en variétés de type général.*

Dans la section 4, nous associons une fibration méromorphe à tout endomorphisme méromophe dominant:

Théorème 4.1 *Soit X une variété kählérienne compacte, et $f : X \dashrightarrow X$ un endomorphisme méromorphe dominant. Il existe une application méromorphe dominante f-invariante $g : X \dashrightarrow T$, dont la fibre générale X_t est l'adhérence de Zariski de l'ensemble des itérés par f d'un point général de X_t.*

Ici comme dans le reste de l'article, le mot "général" veut dire "en dehors d'une reunion dénombrable de fermés analytiques stricts".

Les deux théorèmes précédents impliquent facilement que, pour $X = \mathcal{F}(V)$ comme ci-dessus et assez général, l'ensemble des itérés par f d'un point général de X est Zariski-dense dans X. En effet, $Pic(X) = \mathbb{Z}$; le théorème 2.1 garantit que $f^k, k > 0$ ne préserve pas de fibration non-triviale (une variété de type général n'admet pas d'endomorphisme méromorphe de degré $d > 1$). Il s'ensuit, par la décomposition de Stein, que $dim(T) = 0$ ou $dim(X)$ (T comme dans le théorème 4.1); $dim(T) = dim(X)$ est impossible par $deg(f) > 1$. Donc T est un point.

Si l'on suppose X projectif, l'analogue du théorème 4.1 est vrai sur tout corps K algébriquement clos de caractéristique nulle. Si K est dénombrable, cet enoncé n'a aucun contenu non-trivial: il se peut qu'aucun point de $X(K)$ n'est "général" au sens du théorème 4.1. Par contre, nous pouvons appliquer le théorème à des variétés définies sur un corps non-dénombrable. Ainsi, un corollaire immédiat de théorèmes 4.1 et 2.1 est la proposition suivante, motivée par [HT2]:

Proposition 4.8 *Soit F un corps non-dénombrable (par exemple, le corps des fonctions méromophes sur une courbe complexe). Soit X une variété lisse projective sur $\bar{F}$, vérifiant $K_X = 0$, $Pic(X) = \mathbb{Z}$, et munie d'un endomorphisme rationnel $f : X \dashrightarrow X$ de degré $d > 1$. Alors il existe une extension finie L de F, telle que $X(L)$ soit Zariski-dense dans X.*

La construction de C. Voisin ci-dessus fournit des exemples satisfaisant les conditions de la proposition 4.8.

Dans [HT2], des exemples analogues sont obtenus par une méthode différente. Notamment, les auteurs construisent des surfaces K3 de groupe de Picard cyclique, dont l'ensemble des points sur un corps des fonctions est Zariski-dense. Comme nous l'avons déjà indiqué, on ne sait pas si une telle surface admet des endomorphismes rationnels de degré $d > 1$.

Puisque l'exemple de Voisin est hyperkählérien, nous sommes naturellement amenés à l'étude des fibrations rationnelles (méromorphes) sur les variétés hyperkählériennes irréductibles, lorsque la fibre générique est de dimension de Kodaira nulle (section 3). Les fibrations régulières ont été étudiées dans [M1], où des résultats très précis sont obtenus. Notre résultat principal ici est le:

Théorème 3.6 *Soit X hyperkählerienne irréductible projective de dimension 4, et $f : X \dashrightarrow B$ une fibration à fibre générique de dimension de Kodaira nulle. Alors f possède un modèle holomorphe, à un flop près.*

Précisons la phrase "f possède un modèle holomorphe, à un flop près": elle veut dire qu'il existe une X' hyperkählerienne irréductible projective, et un flop $\alpha : X \dashrightarrow X'$, telle que $f\alpha^{-1} : X' \dashrightarrow B$ *possède un modèle holomorphe*, c'est-à-dire qu'il existe une $\beta : B \dashrightarrow B^0$ birationnelle avec $\beta f \alpha^{-1}$ holomorphe.

Après un flop, la situation est donc celle de [M1]. En particulier, les fibres de la fibration initiale sont lagrangiennes, birationnelles à des surfaces abéliennes.

La preuve repose sur les résultats de Wierzba ([W]) et de Matsuki ([Mat]), dont on déduit que, sur une X comme ci-dessus, tout diviseur sans composante fixe peut être rendu nef à l'aide d'une suite finie de flops de Mukai.

Dans la section 5 nous avons rassemblé quelques remarques sur la base d'une fibration méromorphe $g : X \dashrightarrow B$ avec X hyperkählerienne irréductible . Notamment, nous observons que cette base B n'a pas de tenseur holomorphe covariant non trivial. Cette propriété entraîne la connexité rationnelle de B si $dim(B) \leq 3$, et conjecturalement en toute dimension.

Finalement, dans la section 6, nous situons l'étude des endomorphismes $f : X \dashrightarrow X$ dans le cadre général de la classification des variétés kählériennes compactes.

On montre (théorème 6.1) dans le cas général (X kählerienne compacte) qu'un itéré f^N de f préserve le *coeur* de X, introduit dans [C2]. En particulier, si la f-orbite d'un point est Zariski dense dans X, alors X est spéciale au sens de [C2]. En général, pour un certain $N > 0$, la fibration $g_N : X \dashrightarrow T_N$, associée à f^N par le théorème 4.1, factorise le coeur de X.

Quelques mois après avoir terminé la première version de ce texte (math.AG/ 0510299), nous avons lu l'article [M2] de D. Matsushita (math.AG/0601114), dont le sujet est très lié au celui du nôtre. Ce travail de Matsushita nous a permis de généraliser notre Proposition 3.1. Le théorème 3.6 peut, lui aussi, en être déduit; mais nous avons néanmoins préféré exposer notre démonstration initiale. En effet, celle-ci est très élémentaire, et nous croyons que notre point de vue peut avoir une certaine utilité. Nous remercions D. Matsushita qui a attiré notre attention sur [M2].

Avec un très grand plaisir, nous dédions ce texte à Fedya Bogomolov, auteur de travaux fondateurs sur les variétés hyperkählériennes et de nombreux autres sujets. Ses articles en collaboration avec Yuri Tschinkel sur la densité potentielle de points rationnels ont aussi été une source d'inspiration.

Notations et terminologie:

On dénote par $\kappa(X)$ la dimension canonique, ou de Kodaira, de X, et par $\kappa(X, L)$ la dimension d'Iitaka-Moishezon d'un fibré en droites L.

Soient X, B normales. Une *fibration* est un morphisme surjectif $f : X \to B$ à fibres connexes. Une *fibration rationnelle* ou *méromorphe* est une application rationnelle dominante $g : X \dashrightarrow B$ à fibres connexes. Une *fibre* X_b d'une fibration méromorphe g est $\{\pi(x)|x \in \Gamma \textit{ et } f(x) = b\}$, où Γ est la fermeture du graphe de g dans $X \times B$, et $\pi : \Gamma \to X$, $f : \Gamma \to B$ sont les deux projections. Parfois on appelle aussi une *fibre* de g une fibre de la fibration $Y \to B$, où Y est une désingularisation de Γ.

Nous dirons qu'une fibration est en variétés de type général, en courbes, en sous-variétés lagrangiennes, etc., si sa fibre générique est une variété de type général, une courbe, une sous-variété lagrangienne, etc.

Toutes les variétés dans cet article sont compactes kähleriennes, et, dans les deux sections suivantes, elles sont, de plus, supposées projectives.

Une variété *hyperkählerienne irréductible*, ou *symplectique irréductible*, est une variété lisse et simplement connexe X, telle que $H^0(X, \Omega^2_X)$ est engendré par une 2-forme holomorphe σ, partout non-dégénérée sur X. Une telle variété est de dimension paire $2n$, de classe canonique triviale, et si $n = 1$, X est une surface $K3$.

On notera parfois de la même façon un diviseur de Cartier et le fibré en droites correspondant. Pour un tel diviseur D, $|D|$ dénote le système linéaire complet associé.

"Général" veut dire "en déhors d'une réunion dénombrable de fermés analytiques stricts; "générique" veut dire "en déhors d'un fermé analytique strict".

Une fibration méromorphe est dite presque holomorphe si sa fibre générique ne rencontre pas le lieu d'indétermination.

2. Fibrations sur les variétés K-triviales générales

Toute variété projective X est birationnelle à une fibration en diviseurs de base $\mathbb{P}^1$: il suffit de considérer un pinceau de sections $P \subset |L|$ d'un fibré en droites L. Si $K_X = 0$ et si L est ample, les membres lisses de $|L|$ sont de type général. Cependant, il se peut que P n'ait aucun membre lisse.

Théorème 2.1 *Soit X une variété lisse projective, telle que $K_X = 0$ et $NS(X) \cong \mathbb{Z}$. Alors toute fibration rationnelle $g : X \dashrightarrow B$, $0 < dim(B) < dim(X)$, est en variétés de type général.*

Preuve: Soit g une telle fibration. La résolution des singularités fournit alors une variété lisse projective Y, une fibration $f : Y \to B$ et un morphisme birationnel $\pi : Y \to X$:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "g"] & & B \end{tikzcd}$$

Soit H un diviseur très ample sur B et $L = \pi_* f^* H$ (on rappelle qu'ici, π_* est considéré au sens de cycles; comme X est lisse, L est un diviseur de Cartier), de sorte que l'application g est donnée par un système linéaire $U \subset |L|$. On a alors

$$\pi^* L = f^* H + \sum_i a_i E_i,$$

où les E_i sont les diviseurs π-exceptionnels et $a_i \geq 0$. D'autre part, puisque X est lisse et K-triviale,

$$K_Y = \sum_i e_i E_i$$

avec e_i strictement positifs. La restriction à la fibre générique F de f donne

$$\pi^* L|_F = \sum_i a_i E_i|_F; \; K_F = \sum_i e_i E_i|_F,$$

puisque le fibré normal de F dans Y est trivial. Mais, comme tous les e_i sont strictement positifs, il existe un entier positif m tel que $\pi^* L|_F < m K_F$, c'est-à-dire, $m K_F - \pi^* L|_F$ est effectif. Ceci implique

$$\kappa(F, \pi^* L|_F) \leq \kappa(F).$$

Rappellons maintenant que $NS(X) = \mathbb{Z}$, et que, par construction, L est un diviseur effectif et non-nul. Donc L est ample, $\kappa(F, \pi^* L|_F) = dim(F)$, et $\kappa(F) = dim(F)$.

Corollaire 2.2 *Soit X comme dans le théorème 2.1, et $h : X \dashrightarrow X$ un endomorphisme rationnel de degré > 1. Alors h ne préserve pas de fibration non-triviale.*

En effet, les variétés de type général ne possèdent pas d'endomorphismes rationnels de degré > 1.

Variantes et remarques:

1) L'argument de la démonstration du théorème 2.1 montre aussi la variante suivante:

Soit X telle que $\kappa(X) \geq 0$, L un fibré en droites sur X, et $U \subset |L|$ un système linéaire définissant une fibration rationnelle $g : X \dashrightarrow B$. Si F est une fibre générique de g, alors

$$\kappa(X, L) \leq dim(B) + \kappa(F) \leq dim(U) + \kappa(F).$$

De plus, un léger raffinement de cet argument permet de préciser le théorème 2.1 comme suit:

Théorème 2.3 *Soit X compacte kählérienne telle que $K_X = 0$. Soit $g : X \dashrightarrow B$ une fibration méromorphe avec B projective, et $L := \pi_*(f^*(H)) \in Pic(X)$, H ample sur B. Si F est la fibre générique d'une résolution $f : Y \to B$, alors $\kappa(X, L) = dim(B) + \kappa(F)$.*

Démonstration: On conserve les notations introduites dans la démonstration de 2.1. Soit E' un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif et π-exceptionnel arbitraire sur Y. Alors $\kappa(Y, \pi^*(L)+E') = \kappa(X, L) = \kappa(Y, \pi^*(L))$, par le théorème d'Hartogs (qui permet d'étendre à X les sections de mL, $m > 0$ entier, définies sur l'ouvert au-dessus duquel π est un isomorphisme). On peut choisir E' tel que $\pi^*(L)+E' = f^*(H)+D$ où $D = \sum_i d_i E_i$ avec $d_i > 0$ pour tout i, de sorte que D contient tout diviseur π-exceptionnel. Comme dans 2.1, on a $\kappa(F) = \kappa(F, D|_F) = \kappa(F, (f^*(H)+D)|_F)$. La conclusion résulte donc du lemme suivant:

Lemme 2.4 *Soit $f : Y \to B$ une fibration holomorphe, avec Y une variété complexe compacte et B projective. Soit H un fibré en droites ample sur B et D un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif sur Y. Alors, pour F la fibre générique de f,*

$$\kappa(Y, f^*(H) + D) = dim(B) + \kappa(F, D|_F)$$

.

Preuve: Puisque D est effectif, la réduction d'Iitaka $I : Y \to Z$ de $f^*(H) + D$ factorise f. On en déduit que la fibre générique de I coincide avec celle de I_F, la réduction d'Iitaka de $(f^*(H) + D)|_F = D|_F$. Lemme 2.5 en résulte immédiatement.

2) Ce même argument s'applique aussi lorsque X est $\mathbb{Q}$-factorielle à singularités terminales (le diviseur L est alors $\mathbb{Q}$-Cartier, et son image inverse et sa dimension d'Iitaka-Moishezon sont donc définies; et les "discrépances" des diviseurs exceptionnels sont toujours strictement positives).

Cependant, il existe des variétés K-triviales à points doubles, à groupe de Picard cyclique, admettant une fibration rationnelle non triviale en variétés de κ nulle: telle est la *quintique de Horrocks-Mumford* ([Bor]). Nous remercions B. Hassett pour nous avoir signalé cet exemple.

3) Une variété K-triviale peut être non trivialement dominée par une famille de variétés de dimension canonique nulle: par exemple, toute surface K3 est (génériquement) recouverte par des courbes elliptiques (en général singulières, [MM]). Si le groupe de Picard est cyclique, une telle famille ne fournit cependant jamais de fibration méromorphe.

3. Fibrations sur les variétés hyperkählériennes

Les exemples de C. Voisin (mentionnés dans l'introduction) de dimension minimale (quatre) sont hyperkählériens irréductibles. Il est donc intéressant de comprendre les fibrations méromorphes sur les variétés hyperkähleriennes irréductibles, dont les fibres ne sont pas de type général. A l'aide de la fibration d'Iitaka-Moishezon rélative, on se ramène aux fibrations méromorphes dont les fibres génériques sont de dimension canonique nulle.

De tels exemples existent pour les variétés plus spéciales (de nombre de Picard 2 au moins), tels $Hilb^n(S)$ pour certaines surfaces S de type K3 (voir par exemple [HT1]). Les exemples connus sont des fibrations en tores lagrangiens de dimension moitié.

Dans [M1], il est démontré que si X est hyperkählérienne irréductible projective de dimension $2n$ et $f : X \to B$ est une fibration régulière, alors la fibre générique de f est un tore lagrangien de dimension n, $Pic(B) = \mathbb{Z}$ et B est $\mathbb{Q}$-Fano à singularités log-terminales $\mathbb{Q}$-factorielles.

On peut espérer que si $g : X \dashrightarrow B$ est seulement rationnelle à fibres de dimension de Kodaira nulle, la situation reste semblable à celle de [M1].

Question 3.0: *Si $g : X \dashrightarrow B$ est une fibration rationnelle non triviale, avec X hyperkählérienne irréductible et projective, à fibre générique F telle que $\kappa(F) = 0$, alors les propriétés suivantes sont-elles satisfaites?*

1. $2dim(B) = dim(X)$
2. *F est lagrangienne, et birationnelle à une variété abélienne.*

Montrons d'abord qu'une telle fibration est donnée par des sections d'un fibré en droites L tel que $L^{dim(X)} = 0$.

Soit $g : X \dashrightarrow B$ comme ci-dessus. On fixe $H \in Pic(B)$ engendré par ses sections, et soit $L = g^*H$. Plus précisement, comme dans la première section, $L = \pi_* f^* H$, où

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & \overset{\pi}{\swarrow} & & \overset{f}{\searrow} & \\ X & & \overset{g}{\dashrightarrow} & & B \end{array}$$

est une résolution du lieu d'indétermination de g (avec Y lisse). On a alors $\pi^*L = f^*H + \sum a_i E_i$ avec E_i π-exceptionnels, $a_i \geq 0$.

On dénote par σ la forme symplectique sur X. Soit q la forme quadratique de Beauville-Bogomolov sur $H^2(X, \mathbb{R})$. On rappelle (voir par exemple [H1]) que pour α de type $(1,1)$,

$$q(\alpha) = c \int \alpha^2 (\sigma\overline{\sigma})^{n-1},$$

où c est une constante positive, et qu'il existe une autre constante c' telle que pour tout α, $\alpha^{2n} = c' q(A)^n$.

Proposition 3.1 *1) La classe du fibré en droites L dans $H^2(X, \mathbb{R})$ est isotrope par rapport à la forme q. Par conséquent, $L^{dim(X)} = 0$.*

2) Soit maintenant $g : X \dashrightarrow B$ une application donnée par un système linéaire de sections d'un fibré en droites L, $q(L) = 0$. Alors la fibre générique de g n'est pas de type général.

Preuve: Remarquons d'abord que L est sans composantes fixes, d'où $q(L) \geq 0$. En effet, soient L_1, L_2 deux membres irréductibles distincts de $|L|$; $V = L_1 \cap L_2$ est donc de codimension pure deux dans X. On a

$$q(L) = c \int L^2(\sigma\overline{\sigma})^{n-1} = c \int_V (\sigma\overline{\sigma})^{n-1} \geq 0$$

puisque $(\sigma\overline{\sigma})^{n-1}$ est positive.

Supposons $q(L) > 0$. Alors, selon [Bouck], théorème 4.3 (i), L est dans l'intérieur du cône pseudo-effectif de X, donc c'est un fibré "vaste", ou "grand" (traduction de *big*). Il s'ensuit que pour la fibre générique F de f, $\pi^*L|_F$ est vaste aussi. Comme on l'a déjà remarqué dans la démonstration du théorème 2.1, pour un certain entier positif m, $mK_F - \pi^*L|_F$ est effectif. Donc $\kappa(F) \geq \kappa(F, \pi^*L|_F) = dim(F)$, autrement dit, F est de type général, une contradiction.

Réciproquement, étant donné un L sans composantes fixes, tel que $q(L) = 0$, on voit que $\kappa(L) < dim(X)$ (nous remercions S. Boucksom pour cette remarque): en effet, $q(L, M) \geq 0$ pour tout M effectif. Si L est vaste, alors $L = A + B$ avec A ample et B effectif. Par consequent, $q(L) \geq q(A) > 0$. Le second enoncé du proposition 3.1 résulte donc de 2.3.

Remarque: Cet argument est inspiré par [M2]. Notre argument initial marchait modulo le programme de modèles minimaux (MMP) pour les variétés de dimension de Kodaira nulle en dimension $\leq dim(X) - 1$. Le MMP servait à trouver, par un point générique de X, une courbe C telle que $LC = 0$. On en déduisait $q(L) = 0$ à l'aide de [H2].

Le corollaire suivant est motivé par les exemples de Hassett et Tschinkel dans [HT1]; ils démontrent que $Hilb^2(S)$, où S est une surface $K3$ générique de degré $2m^2, m > 1$, est isomorphe à une fibration en tores au-dessus de $\mathbb{P}^2$ (si $m = 1$, il est clair que $Hilb^2(S)$ est birationnelle à une telle fibration; en effet, S est un revêtement double $h : S \to \mathbb{P}^2$, et h induit $g : Hilb^2(S) \dashrightarrow (\mathbb{P}^2)^*$, où pour Z générique, $g(Z)$ est la droite de $\mathbb{P}^2$ contenant $h(Z)$).

Corollaire 3.2 *Soit S une surface K3 générique de degré $d \neq 2m^2, m \in \mathbb{Z}$. Alors $Hilb^2(S)$ n'est pas birationnelle à une fibration en variétés de dimension canonique nulle.*

En effet, si $d \neq 2m^2$, alors la forme de Beauville-Bogomolov ne représente pas zéro sur $Pic(Hilb^2(S))$.

Par conséquent, toute fibration méromorphe non-triviale de $Hilb^2(S)$ comme dans le corollaire, est en variétés de type général.

La proposition suivante est l'analogue du fait que, dans le cas où $g : X \to B$ est holomorphe, $Pic(B) = \mathbb{Z}$ ([M1]):

Proposition 3.3 *Pour tout $M \in Pic(B)$, $\pi_* f^* M$ est proportionnel à L.*

Preuve: Il suffit de démontrer l'enoncé pour M très ample, puisque de tels M engendrent $Pic(B)$. Soit $N = \pi_* f^* M$. On montre, comme dans la proposition précédente, que $q(N) = 0$; de plus, pour a, b assez grands, $|aH + bM|$ est très ample, d'où $q(aL + bN) = 0$ pour a, b assez grands, et par conséquent pour a, b arbitraires.

On sait ([M1]) que, pour $A \in Pic(X)$ ample et $B \in Pic(X)$ q-isotrope, $BA^{2n-1} = 0$ implique $B = 0$. Fixons $A \in Pic(X)$ ample; alors, pour un certain $\lambda \in \mathbb{Q}$, $(\lambda L - M)A^{2n-1} = 0$, d'où la proposition.

Voici encore une application immédiate de la proposition 3.1:

Proposition 3.4 *La dimension de la fibre générique F de g est $\geq n$ (où $2n = dim(X) \geq 4$).*

Preuve: Supposons le contraire. Soit $b = f(F)$, et soit $V \subset T_b B$ un sous-espace de codimension 2. Remplaçons, si nécessaire, H par lH avec l assez grand, et considérons deux diviseurs $H_1, H_2 \in |H|$ passant par b, tels que $V = T_b(H_1 \cap H_2)$. Soient L_i les transformées strictes des H_i sur X; comme $0 = q(L) = c \int_{L_1 \cap L_2} (\sigma\overline{\sigma})^{n-1}$, la restriction de σ^{n-1} à toute composante irréductible de $L_1 \cap L_2$

est nulle (sinon l'intégrale serait strictement positive). Donc la restriction de σ à une telle composante est dégénérée. Soit $c \in C = \pi(F)$ générique; donc C est lisse en c et π est un isomorphisme au voisinage de c. On en déduit que pour tout sous-espace W de codimension 2 dans T_cX, contenant T_cC, la restriction de σ à W est dégénérée. Un calcul facile d'algèbre linéaire montre alors que c'est impossible, puisque σ est non-dégénérée.

Nous allons ensuite étudier en détail le cas $dim(X) = 4$.

On se place donc, jusqu'à la fin de cette partie, dans la situation suivante:

$(*)$ *Soit $g : X \dashrightarrow B$ une fibration rationnelle non triviale, avec X hyperkählérienne irréductible et projective de dimension 4, à fibre générique F telle que $\kappa(F) = 0$. On garde les notations déjà introduites (Y, f, π etc.). H désigne un diviseur très ample sur B, et $L = \pi_* f^* H$.*

On fera appel au résultat suivant de Wierzba ([W]):

Théorème (J. Wierzba) *Soit X une variété hyperkählerienne irréductible projective de dimension 4 et D un diviseur sans composante fixe sur X. Il existe une autre variété hyperkählerienne irréductible projective X' de dimension 4 et une application birationnelle $\phi : X \dashrightarrow X'$, telle que la transformée stricte $D' = \phi_* D$ est nef sur X'. De plus, ϕ est un produit fini de flops de Mukai (projectifs).*

Remarque: B. Fu nous a signalé que la preuve de [W] est incomplète; mais que l'erreur se trouve dans l'argument de la terminaison de flops. Puisque cette terminaison est démontré en dimension 4 par Matsuki ([Mat]), nous pouvons utiliser ce résultat.

Soit donc $g : X \dashrightarrow B$ notre fibration donnée par un système linéaire $U \subset |L|$; considérons $\phi : X \dashrightarrow X'$ comme dans le théorème de Wierzba; ϕ est un isomorphisme en codimension un. La transformée stricte $L' = \phi_* L$ est nef; on a un système linéaire $U' = \phi_* U \subset |L'|$ qui détermine une fibration rationnelle $g' : X' \dashrightarrow B'$. La fibre générique de g' est birationnelle à celle de g. De plus, L' est isotrope pour la forme de Beauville-Bogomolov.

Autrement dit, pour comprendre la fibre générique $\pi(F)$ de g, on peut supposer que L est nef.

Lemme 3.5 *Dans la situation* $(*)$, *g est presque holomorphe si $L = \pi_* f^* H$ est nef.*

Preuve: Ecrivons $\pi^* L = f^* H + \sum_i a_i E_i$, $a_i \geq 0$; $\pi^* L$ est nef, donc $\sum_i a_i E_i$ est f-nef: $(\sum_i a_i E_i|_F) \cdot C \geq 0$ pour tout courbe C dans une fibre de f. En particulier, $\sum_i a_i E_i|_F$ est nef sur F. Mais cette somme est supportée par le diviseur canonique de F, et $\kappa(F) = 0$. Comme $dim(X) = 4$, on a $dim(F) = 2$ ou 3; F possède donc un modèle minimal F_0, et il y a un diagramme

$$\begin{tikzcd} & \tilde{F} \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\tilde{h}"] & \\ F \arrow[rr, dashed, "h"] & & F_0 \end{tikzcd}$$

avec μ et $\tilde{h}$ des morphismes birationnels. Le diviseur $\mu^*(\sum_i a_i E_i|_F)$ est nef, supporté par une partie du diviseur canonique de $\tilde{F}$. Le diviseur canonique de $\tilde{F}$ est contracté par $\tilde{h}$. Un diviseur nef et contractible est nul. Donc $\mu^*(\sum_i a_i E_i|_F)$ est nul, et $E_i \cap F = \emptyset$ dès que E_i intervient dans $\pi^* L$. Donc g est presque holomorphe: en effet, aucune courbe C π-exceptionnelle mais non f-exceptionnelle ne rencontre F (puisque $(\sum_i a_i E_i)C < 0$), ce qui implique que $\pi(F)$ ne rencontre pas le lieu d'indétermination.

Remarques: 1) L'implication "si L est nef, alors g est presque holomorphe" est vraie en toute dimension modulo le programme de modèles minimaux (MMP). De plus, dans ce cas, MMP ramène notre situation a celle de [M2]: $\kappa(F) = 0$ implique alors que la dimension numérique de L n'est pas maximale. Comme on l'a déjà dit dans l'introduction, nous allons cependant continuer notre démonstration, qui peut présenter un intérêt indépendant.

2) On voit déjà facilement que la fibre F est de dimension 2 (la proposition 3.4 et la presque-holomorphie de F empêchant $dim(B) = 1$) et que F est lagrangien (l'argument de 3.4), et est par conséquent un tore (théorème de Liouville sur les systèmes intégrables, [Arn], p. 271). Nous allons démontrer un résultat plus précis:

Théorème 3.6 *Si L est nef, g possède un modèle holomorphe, c'est-à-dire qu'il existe une application birationnelle $\psi : B \dashrightarrow B_0$, telle que ψg est régulière. Ainsi, toute fibration $X \dashrightarrow B$ à fibre générique de dimension de Kodaira nulle possède un modèle holomorphe à un flop près.*

Par conséquent, la réponse à la question 3.0 est positive en dimension 4: le cas holomorphe étant vrai par [M1].

Avant de commencer la démonstration, établissons un lemme technique facile:

Lemme 3.7 *Soit $f : X \to B$ une fibration holomorphe (on suppose X, B normales projectives mais pas nécéssairement lisses; a fortiori, on ne suppose pas, dans ce lemme, que X est symplectique de dimension 4). Soit E un diviseur de Cartier effectif sur X, ne dominant pas B et f-nef. Alors, pour chaque composante irréductible $A \subset f(Supp(E))$ de codimension 1 dans B, $Supp(E)$ contient $f^{-1}(a)$ pour $a \in A$ générique.*

Preuve: Soit $r : X' \to X$ une désingularisation. Alors $r^*(E)$ satisfait à la condition du lemme, et la conclusion pour $r^*(E)$ entraine celle pour E; on peut donc supposer que X est lisse. B étant normale, une courbe générique ample H sur B est lisse, ainsi que $V = f^{-1}H$, qui est une fibration au-dessus de H dont toutes les fibres ont la même dimension. Alors H coupe toute composante $A \subset Supp(f(E))$ de codimension 1 dans B au point générique de A. Soit S une surface ample assez générale sur V; $f|_S : S \to H$ est une fibration d'une surface lisse sur une courbe lisse. La restriction de E sur S est nef, et supportée sur des fibres de $f|_S$. Le lemme de Zariski ([BPV], p.90) implique que $E|_S = f|_S^* D$ avec $D \in Pic(H)$. Donc $E|_S$ contient toute composante irréductible de toute fibre de f_S qui le supporte; par construction, la même chose est vraie pour E au-dessus d'un point générique de A.

Démonstration du théorème 3.6:

Ecrivons $\pi^*L = f^*H + E$,

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "g"] & & B, \end{tikzcd}$$

où E est π-exceptionnel effectif et H est très ample. Le diviseur E a des composantes de deux types différents: celles qui se projettent sur une courbe de B, et celles dont l'image par f est un point (autrement dit, supportées sur des fibres de dimension 3 de f).

Ecrivons $E = E' + E''$ de sorte que l'ensemble $f(E'')$ est fini, et f est de dimension relative pure égale à 2 sur $Supp(E')$. On a la décomposition en composantes irréductibles $Supp(E') = \cup E'_i$; soit $D_i = f(E'_i)$.

Nous aimerions construire une application birationnelle de B dans la variété de Chow de X qui contracte les D_i, en faisant correspondre le cycle $\pi_*([Y_b])$ à $b \in B$. Nous avons un obstacle pour ce faire: les fibres de f ne sont pas forcément toutes de dimension 2. Après applatissement géométrique et normalisation, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & & \tilde{Y} \arrow[ll, "\tilde{\pi}"'] \arrow[dr, "\tilde{f}"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "g"] & & B & & \tilde{B}, \arrow[ll, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

avec β birationnel, $\tilde{B}$ normal, $\tilde{Y}$ la normalisation de la composante irréductible de $Y \times_B \tilde{B}$ qui domine $\tilde{B}$ (en général, il y a d'autres composantes, ne dominant pas $\tilde{B}$, qui proviennent de fibres de dimension 3 quand on éclate la base au point correspondant), et toutes les fibres de $\tilde{f}$ de dimension 2. Par [Bar2], nous avons un morphisme $p : \tilde{B} \to Chow(X)$, $\tilde{b} \mapsto (\pi\tilde{\pi})_*([\tilde{Y}_{\tilde{b}}])$.

Soit $B_0 = Im(p)$; nous affirmons que l'application $p\beta^{-1}g : X \dashrightarrow B_0$ est holomorphe.

Regardons d'abord l'application $\beta^{-1}g : X \dashrightarrow \tilde{B}$. L'égalité $\pi^*L = f^*H + E$ fournit

$$\tilde{\pi}^*\pi^*L = \tilde{\pi}^*f^*H + \tilde{\pi}^*E = (\tilde{f})^*\beta^*H + \tilde{\pi}^*E,$$

de sorte que $L = (\pi\tilde{\pi})_*(\tilde{f})^*(\beta^*H)$. Le diviseur β^*H n'est pas, en général, très ample, on ne peut donc pas affirmer que $\beta^{-1}g$ est donnée par des sections de L; mais, d'après la proposition 3.3, pour un $\tilde{H}$ très ample sur $\tilde{B}$, $M = (\pi\tilde{\pi})_*(\tilde{f})^*\tilde{H}$ est proportionnel à L, donc à nouveau nef. Nous avons $(\pi\tilde{\pi})^*M = (\tilde{f})^*\tilde{H} + \tilde{E}$ où $\tilde{E}$ est $\pi\tilde{\pi}$-exceptionnel et ne domine pas $\tilde{B}$. De plus, il est $\tilde{f}$-nef parce que M est nef. Toute composante $\tilde{E}_i$ de $\tilde{E}$ se projette par $\tilde{f}$ sur une courbe $\tilde{D}_i \subset \tilde{B}$.

On applique maintenant le lemme 3.7: du moins au point générique d de chaque $\tilde{D}_i$, la fibre de $\tilde{f}$ est toute entière dans le support de $\tilde{E}$.

Ceci veut dire que $p(d)$ est un cycle supporté par le lieu exceptionnel Z de $\pi\tilde{\pi}$. Comme Z est de dimension deux, l'ensemble des valeurs possibles de $p(d)$ est discret. Donc $p(d)$ est constant quand d parcourt $\tilde{D}_i$; autrement dit, p contracte les $\tilde{D}_i$.

Soit maintenant x un point d'indétermination de $p\beta^{-1}g$. Alors il existe une courbe irréductible C sur $\tilde{Y}$, telle que $\pi\tilde{\pi}(C) = x$ et C n'est pas contractée par $p\tilde{f}$. En particulier, C n'est pas contractée par $\tilde{f}$. Comme $(\pi\tilde{\pi})^*M \cdot C = 0$ et $\tilde{H}$ est très ample, on doit avoir $\tilde{E} \cdot C < 0$, donc $C \subset Supp(\tilde{E})$. Par consequent, $\tilde{f}(C) = \tilde{D}_i$ pour un certain i, et donc $f(C)$ est contracté par p, ce qui est absurde. Nous avons donc démontré que le lieu d'indétermination de $p\beta^{-1}g$ est vide, autrement dit, $p\beta^{-1}g$ est holomorphe. On peut donc prendre $p\beta^{-1}$ pour ψ, C. Q. F. D.

Remarques:

1) Une version d'une conjecture bien connue depuis quelques années ([HT3], conjecture 3.8) dit qu'une fibré en droites L nef, non-nul et tel que $q(L) = 0$ définit une fibration lagrangienne (holomorphe) d'une X hyperkählerienne. Ici, nous l'avons démontré en dimension 4, avec une hypothèse supplémentaire que L a du moins un faisceau de sections.

2) L'argument sur la variété de Chow se généralise-t-il en dimension quelconque? Il suffirait, pour une telle généralisation, d'avoir $dim(I(g)) \leq dim(X)/2$, avec $I(g)$ le lieu d'indétermination de g, lorsque L est nef. Une telle généralisation éviterait d'invoquer le résultat difficile de [Kaw] dans [M2].

3) Si $g : X \to B$ est holomorphe, B est une surface $\mathbb{Q}$-Fano à nombre de Picard 1, à singularités log-terminales et $\mathbb{Q}$-factorielles ([M1]). On peut se demander s'il s'agit toujours de $\mathbb{P}^2$. On peut vérifier facilement que c'est le cas si toute fibre de g a une composante réduite. De plus, le lieu lisse de B est simplement connexe. Effectivement, puisque toutes les fibres de g sont de dimension 2 par [M3], $g^{-1}(Sing(B))$ est de codimension 2 dans X (si non-vide), donc $X - g^{-1}(Sing(B))$ est, tout comme X, simplement connexe; ce qui, par la connexité des fibres de g, implique que $B - Sing(B)$ est simplement connexe.

4. Fibration associée à un endomorphisme

Soit X une variété kählérienne compacte et connexe de dimension complexe n, et $f : X \dashrightarrow X$ un endomorphisme méromorphe dominant de X. Pour $x \in X$ général (i.e: dans une intersection dénombrable d'ouverts de Zariski denses de X), l'application f^m est holomorphe en x pour tout entier $m > 0$. On appelle alors l'ensemble des $f^m(x), m \geq 0$ la f-orbite de x, et on note $Z_f^+(x)$ (ou simplement $Z^+(x)$) l'adhérence de Zariski de cette f-orbite dans X. (Par un fermé (resp. un ouvert) de Zariski sur X, nous entendons un fermé (resp. un ouvert) analytique. Lorsque X est projective, c'est la topologie de Zariski "usuelle".)

On se propose de démontrer le résultat suivant:

Théorème 4.1 *Dans la situation précédente, il existe une application méromorphe dominante $g : X \dashrightarrow T$ telle que:*

1. $g \circ f = g$
2. *Pour $x \in X$ général, la fibre de g passant par x est égale à $Z_f^+(x)$.*

En appliquant la décomposition de Stein, on obtient une fibration méromorphe (possiblement triviale) préservée par une certaine puissance de f.

Remarques:

1. Si en un point a de X, toutes les itérées $f^m(a)$ de a par f sont définies, et si elles sont Zariski-denses dans X, il en est donc de même pour un point général de X.

2. Si X et f sont définis sur un corps de nombres, et si la f-orbite d'un point a de X (au sens précédent) est Zariski-dense, on aimerait savoir si l'on peut choisir a défini sur un corps de nombres (auquel cas X serait potentiellement dense). Ceci semble plausible, mais ne peut pas être démontré par les méthodes utilisées ici, puisque les points de X définis sur $\bar{\mathbb{Q}}$ ne sont pas généraux.

3. Si f est de degré $d > 1$, alors X, ainsi que la fibre générale de g, ne sont pas de type général (comme on l'a déjà remarqué, les variétés de type général ne possèdent pas d'endomorphisme de degré > 1).

4. On a $dim(T) = dim(X)$ si et seulement si f est d'ordre fini.

Pour la démonstration, nous avons besoin de quelques préliminaires.

Variantes de la notion d'image par f:

Nous allons en utiliser trois. Soit $X' \subset X \times X$ le graphe de f, et $p, q : X' \to X$ les projections (de sorte que $f = q \circ p^{-1}$). Ainsi p est une modification propre, et q est génériquement finie.

1) Image totale: si $A \subset X$, on note $f_*(A) := q \circ p^{-1}(A)$, et $f_*^{-1}(A) := p \circ q^{-1}(A)$;

2) Image "usuelle": $f(A)$ est formé des $y \in X$ pour lesquels il existe $x \in X$ tel que f est defini en x et $f(x) = y$;

3) Image "propre": pour $A \subset X$ fermé de Zariski , sans composante irréductible dans le lieu d'indétermination de f, $\bar{f}(A)$ est la fermeture de Zariski de $f(A)$ dans X.

On observera que $A \cap f_*^{-1}(B) \neq \emptyset$ si et seulement si $f_*(A) \cap B \neq \emptyset$.

Si A est un fermé de Zariski (dans X), $f_*(A), f_*^{-1}(A)$ le sont aussi.

Si, de plus, $A \neq X$, alors $f_*(A), f_*^{-1}(A)$ sont aussi des fermés de Zariski stricts de X (car p, q sont génériquement finies).

Lieux d'indétermination:

Soit $I', J' \subset X'$ définis respectivement par:

$I' := \{x' \in X' | p \text{ non submersive en } x'\}$, et:

$J' := \{x' \in X' | p \text{ ou } q \text{ non submersive en } x'\}$.

Alors: $I' \subset J'$.

On pose $I := p(I'), J := p(J')$: ils sont fermés de Zariski dans X, par le théorème de Remmert; I est le lieu d'indétermination de f; et J est le lieu en lequel f n'est pas simultanément holomorphe et submersive.

Posons $I_\infty = \cup_{m\in\mathbb{Z}}(f_*)^m I$, et $J_\infty = \cup_{m\in\mathbb{Z}}(f_*)^m J$.

Soient $X^+_\infty = X - I_\infty$, et $X_\infty = X - J_\infty$.

Ainsi, f^m est holomorphe et submersive en x pour tout $m > 0$ si $x \in X_\infty$; de plus, X_∞ est f-invariante.

Adhérence de Zariski des f-orbites:

Pour $x \in X_\infty$, on notera $Z^+(x)$ l'adhérence de Zariski dans X de la f-orbite de x (constituée des $f^m(x)$, pour $m \geq 0$). Soit $d(x) = dim(Z^+(x))$.

Aucune composante irréductible de $Z^+(x)$ n'est contenue dans I_∞, ni donc dans I.

On a alors

$$\bar{f}(Z^+(x)) = Z^+(f(x)) \subset Z^+(x).$$

On note $Z(x)$ la réunion des composantes irréductibles de $Z^+(x)$ qui sont de dimension $d(x)$.

Puisque f est génériquement submersive le long de la f-orbite de x si $x \in X_\infty$, on a aussi:

$$\bar{f}(Z(x)) = Z(f(x)) \subset Z(x).$$

La suite des $(\bar{f})^j(Z^+(x)) = Z^+(f^j(x))$ est donc décroissante pour l'inclusion, et par conséquent stationnaire. Soit $m(x)$ le plus petit des entiers $j \geq 0$ tels que

$$Z^+(f^j(x)) = Z^+(f^{j+1}(x)) = Z^+(f^{m(x)}(x)).$$

Cette égalité est donc satisfaite pour tout $j \geq m(x)$.

Autrement dit, $Z^+(y) = Z(y) = \bar{f}(Z(y))$ si $y = f^j(x)$, pour tout $j \geq m(x)$, et tout $x \in X_\infty$.

Pour d, m entiers positifs, on notera $X_\infty^{d,m}$ l'ensemble des $x \in X_\infty$ tels que $d(x) = d$, et $m(x) = m$.

Pour $y \in X_\infty^{d,m}$, nous avons donc l'égalité que nous appellerons "$(Z = Z^+)$":

$$Z(f^m(y)) = Z^+(f^m(y)).$$

Catégories de Baire analytiques:

On dira que $E \subset X$ est de *première catégorie de Baire analytique dans* X *(ce qui sera noté:* $E \in \mathcal{B}(X)$) si E n'est pas contenu dans une réunion dénombrable de fermés analytiques d'intérieurs vides de X. Nous dirons aussi que $F \subset X$ est *negligeable*, si $F \notin \mathcal{B}(X)$.

Exemples:

1. Si $E \notin \mathcal{B}(X)$, alors $\bar{E} \in \mathcal{B}(X)$, où $\bar{E}$ est le complémentaire de E dans X .

2. Si E est réunion dénombrable des E_m, et si $E \in \mathcal{B}(X)$, alors l'un au moins des $E_m \in \mathcal{B}(X)$.

3. Donc $X_\infty \in \mathcal{B}(X)$, et l'un au moins des $X_\infty^{d,m} \in \mathcal{B}(X)$.

Lemme 4.2: *Si* $A \subset X_\infty \in \mathcal{B}(X)$, *alors* $f^m(A) \in \mathcal{B}(X)$, *pour tout* $m \geq 0$.

Démonstration: Sinon, on aurait: $f^m(A) \subset \cup_{j=0}^{j=\infty} B_j$, les B_j étant des fermés de Zariski stricts dans X. Donc $A \subset \cup_{j=0}^{j=\infty}((f_*)^{-m}(B_j))$. Contradiction, puisque $A \in \mathcal{B}(X)$.

Corollaire 4.3: *Il existe* d, m *tels que si* $R = R_{d,m}$ *est la réunion des* $Z(x)$, *pour* $x \in X_\infty^{d,m}$, *alors* $R \in \mathcal{B}(X)$.

Démonstration: En effet, R contient $f^m(X_\infty^{d,m})$, et $f^m(X_\infty^{d,m}) \in \mathcal{B}(X)$, par le lemme et l'exemple 3 ci-dessus.

L'espace des cycles:

Soit $C(X)$ l'espace des cycles analytiques compacts de dimension pure d'un espace analytique complexe ([Bar1]); lorsque X est projectif, il s'agit simplement de la variété de Chow de X.

Si X est compacte kählérienne, les composantes connexes de X sont compactes ([L]).

Si $t \in C(X)$, on notera Z_t le cycle analytique compact et de dimension pure paramétré par t.

Soit T un sous-ensemble analytique compact et irréductible de $C(X)$ dont le point générique t paramètre un cycle Z_t dont les composantes irréductibles sont toutes de multiplicité 1 et non contenues dans I.

On notera $G = G_T \subset T \times X$ son graphe d'incidence, $r = r_T : G \to X$ et $s = s_T : G \to T$ les projections. On notera aussi $L_T := r_T(G_T) \subset X$ le *lieu de* T.

On dira que Z_t est f-stable si aucune composante de Z_t n'est contenue dans I, et si $\bar{f}(Z_t) = Z_t$, où $\bar{f}$ désigne l'image propre de Z_t par f.

Par exemple, si $x \in f^m(X_\infty^{d,m})$, alors $Z(x)$ est f-stable de dimension d.

Lemme 4.4: *Soit $C_{f-stab}(X)$ l'ensemble des $t \in C(X)$ tels que Z_t soit f-stable, et soit $\bar{C}_{f-stab}(X)$ son adhérence de Zariski dans $C(X)$.*

Alors: pour toute composante irréductible T de $\bar{C}_{f-stab}(X)$, l'intersection $T_{f-stab} := T \cap C_{f-stab}(X)$ contient un ouvert de Zariski (non vide) de T.

(De sorte que T_{f-stab} est Zariski dense dans T et le point générique t de T paramètre un cycle f-stable)

Démonstration: D'abord, il est clair que "ne pas avoir de composante dans I" et "être réduit" sont des conditions ouvertes (de Zariski).

Soit $G'' \subset T \times X$ la fermeture de Zariski de $G' = (id_T \times f)(G_T)$.

Après aplatissement géométrique et modification de T, on peut supposer que G'' est équidimensionnel sur T, normal. Donc G'' est le graphe d'incidence d'une famille analytique de cycles (génériquement images stricts de cycles de G_T), notés

Z''_t, de X, et paramétrée par T. Soit U_T l'ouvert de Zariski dense de T constitué des t tels que Z''_t et Z_t sont réduits et n'ont pas de composante irréductible dans I.

Alors $T_{f-stab} \cap U_T$ est égal à $(F^+ \cap F^-)$, F^+ (resp. F^-) étant constitué des t pour lesquels $Z_t \subset Z''_t$ (resp. $Z''_t \subset Z_t$). Puisque F^+ et F^- sont des fermés de Zariski dans T, le lemme est démontré.

Corollaire 4.5: *Il existe une famille dénombrable de sous-ensembles analytiques compacts et irréductibles $T_k, k \geq 0$ de $C(X)$ tels que, pour chaque k, le membre générique Z_t de T_k soit f-stable, et tels que tout cycle f-stable de dimension pure de X soit paramétré par un point de l'un des T_k.*

Pour chaque $k \geq 0$, soit L_k le lieu de la famille T_k. Rappelons que c'est un fermé de Zariski de X.

On dira que T_k est *couvrante* si $L_k = X$. Il existe des T_k couvrantes (par exemple: celle réduite à $Z_t := X$.

On utilise la notation $R_{d,m}$ introduite dans le corollaire 4.3.

Lemme 4.6: *Pour chaque couple d'entiers (d, m) tel que $R_{d,m} \in \mathcal{B}(X)$, il existe un entier $k \geq 0$ vérifiant les propriétés suivantes:*

1. T_k est couvrante;

2. Il existe $E_k^{d,m} \in \mathcal{B}(X)$, $E_k^{d,m} \subset f^m(X_\infty^{d,m})$, tel que $Z(x) = Z_t$, pour un certain $t = t(x) \in T_k$, dès que $x \in E_k^{d,m}$.

Démonstration: Soit $L \subset X$ la réunion dénombrable des L_k pour lesquels T_k n'est pas couvrante. On choisit (d, m) tel que $R_{d,m} \in \mathcal{B}(X)$. Il existe un tel couple, par le corollaire 4.3. Soit $\tilde{E}^{d,m} = (f^m(X_\infty^{d,m})) \cap (R_{d,m} - L)$. C'est un ensemble de première catégorie de Baire analytique dans X, dont le complémentaire est negligeable dans $f^m(X_\infty^{d,m})$. Alors, si $x \in \tilde{E}^{d,m}$, $Z(x)$ est un cycle de dimension pure d qui est f-stable, donc paramétré par un $t \in T_{k(x)}$, pour un certain $k(x)$, et on a donc: $Z(x) = Z_t$. Si l'on note $\tilde{E}_k^{d,m}$ l'ensemble des $x \in \tilde{E}^{d,m}$ pour lesquels

$t(x) \in T_k$, il existe (par dénombrabilité de l'ensemble des k) au moins un k pour lequel $\tilde{E}_k^{d,m} \in \mathcal{B}(X)$. On pose $E_k^{d,m} = \tilde{E}_k^{d,m}$ pour un tel k. La famille T_k est couvrante, puisque $x \in X - L$, par hypothèse, et $E_k^{d,m}$ satisfait les propriétés annoncées.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème annoncé au début de cette partie.

Preuve du théorème 4.1:

On choisit désormais k, d, m, E comme ci-dessus. On pose $T := T_k$, et on note $r : G \to X$, $s : G \to T$ les projections , si $G \subset T \times X$ est le graphe d'incidence de la famille $T = T_k$.

Démontrons les assertions suivantes:

1. r est une modification propre.

Soit $g = s \circ r^{-1} : X \dashrightarrow T$: c'est une application méromorphe surjective de fibre générique Z_t.

2. $g \circ f = g$.

3. Pour $x \in X$ général, $Z(x) = Z_{g(x)}$.

Montrons l'assertion 1. La surjectivité de r résulte de ce que T est couvrante. De plus, pour $t \in T$ générique, Z_t n'a aucune composante irréductible contenue dans I. On en déduit que si r n'est pas biméromorphe, et si $x \in X$ est générique (c.à.d. en dehors d'un fermé de Zariski strict), il existe (au moins) deux $t \neq t' \in T$ tels que $x \in Z_t \cap Z_{t'}$, avec Z_t et $Z_{t'}$ sans composante irréductible contenue dans I.

Montrons maintenant que si $x \in E$, $E \in \mathcal{B}(X)$ adéquat, alors la fibre de r au-dessus de x ne peut avoir deux tels points t, t'. Cette propriété entraînera bien que r est une modification propre.

Nous choisissons $x \in E_k^{d,m} \subset f^m(X_\infty^{d,m})$, pour (d, m, k) et $E_k^{d,m}$ comme dans le lemme précédent, et raisonnons par l'absurde.

Soient $t \neq t'$ deux points distincts de T, tels donc que: $x \in Z_t \cap Z_{t'} \neq Z_t$. On peut supposer, par notre choix de x, que $Z_t = Z(x)$. Puisque $x = f^m(y), y \in X_\infty^{d,m}$, on a:

$Z_t = Z(x) = Z(f^m(y)) = Z^+(f^m(y)) = Z^+(x)$, ceci par l'égalité $(Z = Z^+)$.

Donc $Z_t \cap Z_{t'} \neq Z_t$ contient x, et est f-stable; autrement dit, $Z_t \cap Z_{t'} \neq Z_t$ contient $Z^+(x)$.

Mais ceci contredit l'égalité $Z_t = Z^+(x)$.

Donc r est bien une modification propre.

La propriété 2 résulte de ce que Z_t est f-stable, pour $t \in T$ générique.

Montrons la propriété 3: si elle n'est pas satisfaite, il existe un sous-ensemble $U \in \mathcal{B}(X)$, tel que pour $x \in U$, $Z(x) \subsetneq G(x)$, où $G(x)$ dénote (l'unique) fibre de g passant par x. Soit $U_\infty = U \cap X_\infty$, et $U_\infty^{d,m} = U \cap X_\infty^{d,m}$. Il existe un couple m', d' tel que $U_\infty^{d',m'} \in \mathcal{B}(X)$, et donc $f^m(U_\infty^{d',m'}) \in \mathcal{B}(X)$. De plus, pour y dans un sous- ensemble adéquat (et dans $\mathcal{B}(X)$) E' de $f^m(U_\infty^{d',m'})$, nous avons toujours $Z(y) \subsetneq G(y)$.

En repétant l'argument du lemme 4.6 et de la preuve de la propriété 1, nous obtenons une seconde fibration f-invariante $g' : X \dashrightarrow T'$, telle que la fibre $G'(y)$ par $y \in E'$ coincide avec $Z(y)$. Au même temps, la fibre $G'(x)$ par $x \in E = E_k^{d,m}$ contient $Z^+(x) \supset Z(x)$, par f-invariance de g'. Ainsi, pour les sous-ensembles $E, E' \in \mathcal{B}(X)$, on a: $Z(x) = Z_{g(x)} \subset Z_{g'(x)} = G'(x)$, pour $x \in E$, et $Z(y) = Z_{g'(y)} \subset Z_{g(y)} = G(y)$, pour $y \in E'$. Puisque ces inclusions définissent des sous-ensembles analytiques fermés de T, T', on a ainsi une contradiction si $T \neq T'$ (en tant qu'une famille de cycles sur X).

Nous avons donc montré que la fibre $G(x)$ de g passant par $x \in X$ général est égale à $Z(x)$. Pour finir, remarquons que cette fibre contient $Z^+(x)$ par f-invariance; d'où $G(x) = Z(x) = Z^+(x)$. Le théorème est démontré.

Pour conclure cette partie, considérons à nouveau l'exemple de Voisin: soit $X = \mathcal{F}(V)$ la variété des droites de V, cubique lisse dans $\mathbb{P}^5$. D'après [BD], nous avons un isomorphisme d'Abel-Jacobi

$$H^4(V, \mathbb{Z}) \cong H^2(X, \mathbb{Z}),$$

induisant un isomorphisme de structures de Hodge. D'autre part, un résultat de Terasoma ([T]) garantit l'existence d'une cubique lisse V définie sur un corps de nombres, et telle que $H^{2,2}(V) \cap H^4(V, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Ceci entraîne évidemment la

Proposition 4.7 *Il existe un X comme ci-dessus, défini sur un corps de nombres et tel que $Pic(X) \cong \mathbb{Z}$.*

La f-orbite d'un point général (sur $\mathbb{C}$) d'un tel X est Zariski-dense par les résultats de cet article. Si l'on pouvait obtenir un énoncé semblable sur $\bar{\mathbb{Q}}$, on aurait la densité potentielle de points rationnels sur X. Mais il est clair que notre argument ne fonctionne pas sur $\bar{\mathbb{Q}}$, puisque nous considérons comme "négligeable" toute réunion dénombrable de fermés stricts, et $\bar{\mathbb{Q}}$ lui-même est dénombrable. Il serait intéressant de trouver des moyens de distinguer les réunions dénombrables de fermés "arbitraires" des réunions dénombrables "naturelles" de fermés, obtenues par exemple par une construction géométrique définie sur un corps de nombres à partir d'un seul fermé.

Pour un corps non-dénombrable F, $car(F) = 0$, la situation est différente. En effet, il est clair que, dans le Théorème 4.1, on peut prendre pour X une variété projective (irréductible) sur $\bar{F}$. On en déduit facilement de nouveaux exemples de la densité potentielle sur un corps de fonctions (cette observation est motivée par le texte [HT2]):

Proposition 4.8 *Soit F un corps non-dénombrable (par exemple, $F = \mathbb{C}(C)$, où C est une courbe complexe). Soit X une variété lisse projective sur $\bar{F}$, vérifiant $K_X = 0$, $Pic(X) = \mathbb{Z}$, et munie d'un endomorphisme rationnel $f : X \dashrightarrow X$ de degré $d > 1$. Alors il existe une extension finie L de F, telle que l'ensemble $X(L)$ est Zariski-dense dans X.*

En effet, les conditions $K_X = 0$, $Pic(X) = \mathbb{Z}$ assurent par 2.1 que f ne peut pas préserver une fibration non-triviale. Par 4.1, il existe donc une réunion dénombrable R de fermés de Zariski stricts de X tel que tout point $x \in X$, $x \notin R$ est de f-orbite définie et Zariski-dense. Puisque F n'est pas dénombrable, R ne contient pas $X(\bar{F})$. Il existe donc un point $x \in X$ dont l'orbite iterée est Zariski-dense, et il suffit de prendre pour L une extension finie de F sur laquelle X, x et f sont définis.

Les exemples de Voisin fournissent tout de suite des variétés X sur $\bar{F}$, $F = \mathbb{C}(C)$, non-isotriviales en tant que familles sur C, satisfaisant les conditions de la proposition 4.8. Il suffit de prendre $C \subset \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^5, \mathcal{O}(3)))$ assez générale, et considérer la famille $\mathcal{X} \to C$, dont chaque fibre X_c est la variété de Fano des droites de la cubique V_c correspondant à $c \in C$. On prend ensuite pour X la fibre générique géométrique $X_{\bar{F}}$.

Alternativement, on peut prendre $x_c \in X_c$ ($c \in C$ assez général), tel que la f_c-orbite de x_c est Zariski-dense dans X_c (ici, f_c dénote l'endomorphisme de Voisin de X_c). On choisit une multisection $\tilde{C}$ passant par x_c; après un changement de base $\tilde{C} \to C$, les sections de $\mathcal{X}$ sont Zariski-denses, c'est-à-dire, les $\mathbb{C}(\tilde{C})$-points de $X_{\bar{F}}$ sont Zariski-denses.

5. Base d'une fibration hyperkählérienne

Soit $g : X \dashrightarrow B$ une fibration méromorphe, avec X hyperkählérienne irréductible (non nécessairement projective) de dimension complexe $2n$, et B lisse kählerienne. On suppose g non triviale: $0 < dim(B) < 2n$. Comme auparavant, on désigne par σ la forme symplectique sur X.

Question: *B est-elle alors une variété rationnelle?*

Remarques:

1. B est une variété projective. En effet, sinon elle admet une 2-forme holomorphe non-nulle (consequence du critère de projectivité de Kodaira et de la

décomposition de Hodge). Son image réciproque u par g est non-nulle et n'est pas de rang maximal. Ceci contredit le fait que X est irréductible (et donc que u et σ sont proportionnelles).

2. Supposons que g ne soit pas presque holomorphe. Alors B est uniréglée. Si donc B n'est pas rationnellement connexe, et si $r : B \dashrightarrow R$ est son quotient rationnel (voir [C1], [KMM]), alors R n'est pas uniréglée par [GHS], et $h = rg : X \dashrightarrow R$ est une fibration non-triviale presque holomorphe. Ainsi, ou bien B est rationnellement connexe, ou bien il existe sur X une fibration $h : X \dashrightarrow R$ non triviale et presque holomorphe.

3. Si B est rationnelle, B est bien sûr rationnellement connexe, et les tenseurs holomorphes covariants sur B s'annulent tous. Conjecturalement, cette propriété entraîne la connexité rationnelle de B.

Cette propriété d'annulation est effectivement verifiée, par une généralisation de l'argument très simple de la remarque 1:

Proposition 5.1 *Soit $g : X \dashrightarrow B$ comme ci-dessus. Soient $m > 0, p > 0$ des entiers.*

Alors $H^0(B, Sym^m(\Omega^p_B)) = 0$.

La proposition résulte du lemme suivant:

Lemme 5.2 *Soit X hyperkahlérienne irréductible. Pour m, p des entiers strictement positifs, l'application $c : Sym^m(H^0(X, \Omega^p_X)) \to H^0(X, Sym^m(\Omega^p_X))$ est un isomorphisme.*

Le groupe $H^0(X, Sym^m(\Omega^p_X))$ est donc nul si p est impair, et est égal à $\mathbb{C}(\sigma^{\wedge q})^{\otimes m}$ si $p = 2q$ est pair.

Ce lemme paraît bien connu, résultant de l'existence d'une métrique de Kähler Ricci-plate sur X et du principe de Bochner (voir par exemple [Kob] pour un raisonnement semblable).

Supposons maintenant qu'il existe $s \in H^0(B, Sym^m(\Omega^p_B))$ non-nul. Soit $0 \neq s' := g^*(s) \in H^0(X, Sym^m(\Omega^p_X))$: ce tenseur est bien défini par le théorème de Hartogs. Le lemme 5.2 montre que $p = 2q$ est pair, et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, non nul, tel que $s' = \lambda(\sigma^{\wedge q})^{\otimes m}$. Mais un calcul standard en coordonnées locales montre que ceci est impossible dès que $dim(B) < 2n$: au point générique $x \in X$, on construit facilement un élément $\tau \in (\Lambda^{2q} T_x X)^{\otimes m}$ annulé par tous les $g^*(s)$ mais non par $(\sigma^{\wedge q})^{\otimes m}$.

Si $dim(B) = 2$, cette annulation implique que B est rationnelle, par le critère de Castelnuovo. En général, on dit que $\kappa_+(B) = -\infty$ si $\kappa(B') = -\infty$ pour tout B' dominé par B (c.à.d. tel qu'existe $h : B \dashrightarrow B'$ méromorphe dominante). Le théorème 5.1 implique, bien sûr, que dans notre situation, $\kappa_+(B) = -\infty$.

De l'existence du quotient rationnel ([C1],[KMM]) et de [GHS], on déduit que $\kappa_+(B) = -\infty$ si et seulement si B est rationnellement connexe, pourvu que les variétés de dimension $\leq dim(B)$ avec $\kappa = -\infty$ soient uniréglées. Comme cette assertion est demontrée en dimension 3, nous avons:

Corollaire 5.3 *Si $g : X \dashrightarrow B$ est comme ci-dessus, B est rationnelle si $dim(B) = 2$, et B est rationnellement connexe si $dim(B) = 3$.*

6. Endomorphismes et classification

Soit X une variété Kählérienne compacte lisse et connexe, et soit $f : X \dashrightarrow X$ un endomorphisme méromorphe dominant de X de degré $d \geq 1$. On se propose ici de montrer que f respecte certaines fibrations intrinsèquement attachées à X.

Parmi celles-ci, figurent le quotient rationnel $r : X \dashrightarrow R$ ([C1],[KMM]), la fibration d'Iitaka-Moishezon $\phi : X \dashrightarrow J$ (si $\kappa(X) \geq 0$) , et le *coeur* $c : X \dashrightarrow C$ ([C2],3.1,3.3, p. 544; 5.8, p. 579). Ils sont définis à équivalence biméromorphe près seulement. Nous modifierons donc les modéles choisis au gré des besoins.

Proposition 6.0 *Dans la situation précédente, il existe des endomorphismes dominants $r_f : R \to R$ et $\phi_f : J \to J$, tels que $r \circ f = r_f \circ r$ et $\phi \circ f = \phi_f \circ r$.*

De plus, $\phi_f : J \to J$ est biméromorphe.

Démonstration: Soit F une fibre générale de r. Alors F est rationnellement connexe. Donc $f(F)$ l'est aussi; de plus, $dim(F) = dim(f(F))$. De la propriété universelle du quotient rationnel résulte donc que $f(F)$ est une fibre de r.

Considérons maintenant la fibration ϕ. L'application f induit, par image réciproque, un automorphisme de $H^0(X, mK_X)$ pour tout m entier. En effet, l'image réciproque envoit injectivement, et donc surjectivement, $H^0(X, mK_X)$ dans lui-même. Nous avons alors, pour un certain m, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ll} X \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}(H^0(X, mK_X)^*) \\ f\downarrow \qquad\qquad\quad \downarrow \\ X \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}(H^0(X, mK_X)^*) \end{array}$$

L'application ϕ_f est la restriction sur $J = Im(\phi)$ de la seconde flèche verticale (l'automorphisme correspondant de $\mathbb{P}(H^0(X, mK_X)^*)$). Elle est évidemment biméromorphe.

Remarque: La structure de r_f peut être arbitrairement compliquée comme des exemples très simples (produits) le montrent.

Pour le "coeur", qui "scinde" naturellement la structure de X en ses deux composantes antithétiques ("spéciale" et " de type général"), la situation est très claire:

Théorème 6.1 *Soit X une variété kählérienne compacte lisse et connexe, et $c : X \to C$ le "coeur" de X . Si $f : X \dashrightarrow X$ est un endomorphisme méromorphe dominant de X de degré $d \geq 1$, alors:*

1. *Il existe $c_f : C \dashrightarrow C$ biméromorphe telle que $c \circ f = c_f \circ c$;*

2. Il existe $N > 0$ entier tel que f^N préserve c (ie: $c \circ f^N = c$).

En particulier:

3. c se factorise par l'application $g_N : X \dashrightarrow T_N$ du théorème 4.1 correspondant à une certaine puissance f^N de f;

4. Si l'application $g_N : X \dashrightarrow T_N$ est constante (autrement dit, si un point x de X a une f-orbite Zariski dense dans X), alors X est "spéciale" au sens de [C2], *2.1, p.527.*

Démonstration: Les propriétés 3 et 4 sont des conséquences immédiates des propriétés 1 et 2 que nous montrons maintenant.

Rappelons que les fibres générales S de c sont spéciales et sa base orbifolde de type général (propriétés qui déterminent c). Comme l'image de S, fibre générale de c, par f est spéciale et de même dimension que F, $f(S)$ doit être une fibre de c (par construction de c). D'où l'existence de c_f telle que $c \circ f = c_f \circ c$.

Il reste à voir que c_f est biméromorphe et d'ordre fini (c.à.d. que $(c_f)^N = id_C$, pour un $N > 0$ adéquat).

Pour la première assertion (c_f biméromorphe), rappelons que si $(C/\Delta(c))$ est la base orbifolde de c, et si $p := dim(C) > 0$, alors $L_X := \lceil c^*(K_C + \Delta(c)) \rceil \subset \Omega^p_X$ est (sur un modèle biméromorphe adéquat) localement libre de rang 1, et de dimension de Moishezon-Iitaka égale à p (autrement dit: un faisceau *de Bogomolov*). Voir [C2], Section 2.6 pour détails.

Un tel faisceau L_X est unique, puisque l'on a unicité du "coeur" c, et que L_X est déterminé par c. Donc $f^*(mL_X) \subset mL_X$, pour tout entier $m > 0$. Autrement dit, f^* induit un automorphisme de $H^0(X, mL_X)$. Puisque, pour m assez grand et divisible, le système linéaire $|mL_X|$ (disons, de dimension M) fournit c, nous pouvons conclure, par le même diagramme que dans la preuve du 6.0, qu'il existe $g \in PGl(M + 1, \mathbb{C})$ avec $g \circ c = c \circ f$. L'application c_f, biméromorphe, est la restriction de g sur l'image C de c.

Pour démontrer la finitude, établissons les lemmes suivants (dont le second est une généralisation orbifolde directe de ([U]), 14.3), montrant que le groupe des automorphismes biméromorphes d'une variété de type général est fini:

Lemme 6.2 *Dans la situation précédente, $g_*(\Delta(c)) = \Delta(c)$. (Autrement dit: l'automorphisme g préserve la base orbifolde de c)*

Démonstration: Soit $u : X' \to X$ une modification, avec X' lisse, telle que $f' := f \circ u : X' \to X$ soit holomorphe.

Nous avons: $g_*(\Delta(c)) = \Delta(g \circ c) = \Delta(g \circ c \circ u) = \Delta(c \circ f') \geq \Delta(c)$, où, pour des $\mathbb{Q}$-diviseurs A, B, $A \geq B$ signifie que $A - B$ est effectif ou nul. Puisque g est un automorphisme de C, ceci entraîne que $g_*(\Delta(c)) = \Delta(c)$.

Lemme 6.3 *Soit $c : X \to C \subset \mathbb{P}^M$ le modèle précédent du coeur de X, fourni par le système linéaire mL_X, pour $m > 0$ assez grand et divisible. Le groupe G_X des $g \in \mathbb{P}GL(M+1, \mathbb{C})$ préservant C, tels que $g_*(\Delta(c)) = \Delta(c)$, est fini.*

Démonstration: Soit H_C le sous-groupe des $g \in \mathbb{P}GL(M+1, \mathbb{C})$ préservant C. Le groupe G_X s'injecte naturellement dans H_C. Le théorème 14.1 de [U] (basé sur un résultat de Rosenlicht) montre que si H_C n'est pas fini, il contient un sous-groupe linéaire algébrique $K \subset \mathbb{P}GL(2, \mathbb{C})$ de dimension 1, et que C est biméromorphe à $W \times \mathbb{P}^1$, pour une certaine variété W. Ceci de telle sorte que les sous-variétés $\{w\} \times \mathbb{P}^1$ soient les adhérences de Zariski des orbites de K agissant sur C. Changeant de modèle biméromorphe pour X et c, nous supposerons que $c' : X \to C' = W \times \mathbb{P}^1$ est le coeur de X. Le diviseur canonique orbifolde $K_{C'} + \Delta(c')$ de la base orbifolde de c' est donc encore de type général (puisque le coeur est une fibration de type général, ce qui signifie que les bases orbifoldes de *tous* ses modèles biméromorphes sont de type général), de sorte que pour $w \in W$ générique, $\{w\} \times \mathbb{P}^1$ rencontre le support de $\Delta(c)$ en au moins 3 points. Par ailleurs l'action naturelle de $K \subset \mathbb{P}GL(2, \mathbb{C})$ sur $\{w\} \times \mathbb{P}^1$ doit préserver ce support, d'après 6.2. On a donc une contradiction, et ainsi la finitude de G_X.

Les deux lemmes entraînent que c_f est d'ordre fini, C.Q.F.D.

Finalement, considérons la fibration d'Iitaka ϕ. Nous avons déjà remarqué que ϕ_f est toujours biméromorphe. Il est alors naturel de poser la question suivante: est-il vrai que ϕ_f est toujours d'ordre fini? Bien que, a priori, il semble peu probable que la réponse soit positive, la question mérite l'étude. Pour mieux comprendre la situation, montrons que la réponse est positive pour les surfaces:

Proposition 6.4: *Soit X une surface kählérienne compacte avec $\kappa(X) = 1$. Soit $\phi : X \to B$ sa fibration d'Iitaka-Moishezon, et $f : X \dashrightarrow X$ un endomorphisme méromorphe de degre $d \geq 1$ de X. Soit $g : B \to B$ l'automorphisme de B induit par f . Alors g est d'ordre fini.*

Preuve: Tout d'abord, l'assertion est claire si le genre de B est au moins 2. Si B est elliptique, g est encore d'ordre fini, puisqu'induit par une action linéaire dans un plongement. Nous pouvons donc supposer que $B = \mathbb{P}^1$, et que X est relativement minimale.

Soit $M \subset B$ le lieu de fibres multiples de ϕ; il est conservé par g. Montrons que le lieu de fibres singulières non multiples $S \subset B$ est également conservé. Soit $b \in B$ tel que $X_{g(b)}$ soit lisse, donc elliptique. Soit $\mu : X' \to X$ une modification telle que $f' := f \circ \mu : X' \to X$ soit holomorphe. Les courbes exceptionnelles de μ au-dessus de X_b sont rationnelles, donc envoyées sur des points par f'. D'où f est holomorphe au voisinage de X_b, et l'une des composantes irréductibles de X_b est elliptique. Ceci entraine bien (voir par exemple [BPV], V.7, p. 150) que $(X_b)_{red}$ est lisse elliptique.

Le lieu $E = M \cup S$ de fibres singulières de ϕ est donc conservé par g; si g est d'ordre infini, E a au plus deux éléments. Il est bien connu qu'une fibration en courbes de base $\mathbb{P}^1$ qui n'a que deux fibres singulières, est à modules constants: en effet, le revêtement universel de $\mathbb{P}^1$ privé de deux points est $\mathbb{C}$, qui n'admet pas d'application holomorphe non-constante dans le domaine de périodes (l'espace de Siegel, ou le demi-plan supérieur dans le cas d'une fibration elliptique).

Si g est d'ordre infini, X est donc à modules constants. Le lemme suivant montre que ceci est impossible pourvu que $\kappa(X) = 1$.

Lemme 6.5 *Soit $h : X \to B$ une surface kählérienne elliptique relativement minimale de base $B \cong \mathbb{P}^1$, à modules constants, ayant au plus 2 fibres singulières. Alors $\kappa(X) = -\infty$.*

Démonstration: La monodromie de h préserve une classe de Kähler sur les fibres lisses. Cette monodromie est donc finie cyclique. Quitte à faire un changement de base fini $C \to B$, ramifié seulement au-dessus de 2 points au plus, on peut donc supposer cette monodromie triviale; on a encore $C \cong P^1$, et la surface X', obtenue par ce changement de base, a au plus deux fibres singulières.

D'après Kodaira ([K], table I,p.604), la famille étant isotriviale de monodromie triviale et relativement minimale, les fibres singulières sont donc multiples elliptiques. On déduit alors de la formule pour le fibré canonique d'une telle fibration ([BPV], 12.1,12.3) que $\kappa(X') = \kappa(X) = -\infty$.

Remarque: Dans le cas où X n'est pas à modules constants, on peut borner effectivement l'ordre de g en utilisant les courbes modulaires, et ceci même sans supposer $\kappa(X) = 1$. Plus précisément: l'ordre de g est majoré par 210ν, où ν est le degré géométrique de l'application modulaire $j : B \to \mathbb{P}_1$ associant à $b \in B$ générique l'invariant modulaire $j(X_b)$ de la courbe elliptique X_b.

Voici l'esquisse de la démonstration:

Soit $h : X \to B$ une surface elliptique à modules non constants, $j : B \to \mathbb{P}^1$ l'application modulaire correspondante, B^0 la partie de B paramétrant les fibres lisses, $X^0 = h^{-1}B^0$. Pour $b \in B$ générique, soit $G = G_b(f)$ le groupe des automorphismes de X_b préservant les fibres de f. C'est un sous-groupe fini de translations de X_b.

Il existe un entier $m \geq 1$, tel que G contient toute translation dont l'ordre divise m, autrement dit, le sous-groupe complet de m-torsion $T(m)$ du groupe des translations de X_b. Des arguments élémentaires sur la structure des groupes abéliens finis montrent que le quotient $G_b(f)/T(m)$ est cyclique. On pose $T = T(m)$ pour m maximal, $C = G_b(f)/T(m) = G/T$ le groupe cyclique quotient.

En considérant la correspondance $\Sigma_f \subset X \times_B X$, formée des (x, y) tels que $f(x) = f(y)$, on voit facilement que l'application quotient par T se prolonge en une application "de multiplication par m" $u : X \dashrightarrow X' = Pic^m(X)$ au-dessus de B.

Ainsi, f se factorise en produit $c \cdot u$, avec $c : X' \dashrightarrow X$ une application telle que, pour la fibre générique fixée X'_b, le groupe des translations de X'_b commutant avec la restriction de c est cyclique (d'ordre $|C|$). On notera H ce sous-groupe.

L'application c induit g sur la base B et donne un relèvement de j en une application $j(c) : B \to X_0(|C|)$. Donc $X_0(|C|)$ est rationnelle. Remarquons que $X_0(N)$ est rationnelle pour 15 valeurs de N seulement (plus précisement, on doit avoir $N \in F$, avec $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 16, 18, 25\}$).

Enfin, l'application f n'est pas, en général, déterminé par le sous-groupe G; mais si le même G correspond à $f_1, f_2 : X \dashrightarrow X$, alors pour les automorphismes de la base $g_1, g_2 : B \to B$ induits, $g_1 g_2^{-1}$ commute avec j. Il en va de même pour H et c.

Maintenant, itérons f: on a $f^n = c_n u_n$; soit H_n le sous-groupe cyclique correspon- dant. Puisque $B \cong \mathbb{P}^1$, on n'a que 15 possibilités pour $|H_n|$ - sa valeur doit se trouver dans la liste F; et pour chaque valeur N dans F, on n'a que $\psi(N) = N\Pi_{p|N}(1 + 1/p)$ choix de H_n possibles, puisque $\psi(N)$ est le nombre de sous-groupes cycliques d'ordre N dans $Aut(X'_b)$.

Soit $A = \sum_{N \in F} \psi_N = 210$; alors $H_n = H_m$ pour certains $0 \leq m, n \leq A$. Puisque c_i induit g^i sur la base B, il s'ensuit que g^{m-n} commute avec j. Donc l'ordre de g^{m-n} est au plus $\nu = deg(j)$, et l'ordre de g est au plus $A\nu = 210\nu$.

Remarque: La "réciproque" de 6.1.4 est fausse pour les surfaces elliptiques de base $\mathbb{P}^1$, de dimension canonique 1, admettant une section (donc spéciales). Nous avons déjà observé que, pour une telle surface, ϕ_f est d'ordre fini; f ne peut donc pas avoir une orbite itérée Zariski-dense.

References

[A] E. Amerik, Endomorphisms of projective bundles, Manuscripta Math. 111 (2003), no. 1, 17-28.

[ARV] E. Amerik, M. Rovinsky, A. Van de Ven, A boundedness theorem for morphisms between threefolds, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 49 (1999), no. 2, 405–415.

[Arn] V. I. Arnold, Mathematical methods of classical mechanics, second edition, Springer-Verlag.

[Bar1] D. Barlet: Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace complexe de dimension finie, Lecture Notes in Math. 482 (1975), 1-158.

[Bar2] D. Barlet, Majoration du volume et forme géométrique du théorème d'aplatissement, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 288 (1979), 29-31.

[BPV] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven: Compact complex surfaces, Springer-Verlag, 1984

[BD] A. Beauville, R. Donagi, La variété des droites d'une hypersurface cubique de dimension 4, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 301 (1985), no. 14, 703–706.

[Bor] C. Borcea, On desingularized Horrocks-Mumford quintics, J. Reine Angew. Math. 421 (1991), 23–41.

[Bouck] S. Boucksom, Divisorial Zariski decompositions on compact complex manifolds, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 37 (2004), no. 1, 45–76.

[C1] F. Campana, Connexité rationnelle des variétés de Fano, Ann. Sci. cole Norm. Sup. (4) 25 (1992), no. 5, 539–545.

[C2] F. Campana, Orbifolds, Special Varieties, and Classification Theory, Ann. Inst. Fourier 54 (2004), 499-665.

[F] Y. Fujimoto, Endomorphisms of smooth projective 3-folds with non-negative Kodaira dimension, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 38 (2002), no. 1, 33–92.

[GHS] T. Graber, J. Harris, J. Starr: Families of rationally connected varieties, J. Amer. Math. Soc. 16 (2003), no. 1, 57–67 (electronic).

[H1] D. Huybrechts, Compact hyper-Kähler manifolds: basic results, Invent. Math. 135 (1999), no. 1, 63–113.

[H2] D. Huybrechts, The Kähler cone of a compact hyperkähler manifold, Math. Ann. 326 (2003), no. 3, 499–513.

[HT1] B. Hassett, Y. Tschinkel, Abelian fibrations and rational points on symmetric products, Internat. J. Math. 11 (2000), no. 9, 1163–1176.

[HT2] B. Hassett, Y. Tschinkel, Potential density of rational points for K3 surfaces over function fields, prépublication.

[HT3] B. Hassett, Y. Tschinkel, Rational curves on holomorphic symplectic fourfolds, GAFA 11, no. 6 (2001), 1201-1228.

[K] K.Kodaira, On compact analytic surfaces, Math. Ann. 77 (1963), 563-621.

[KMM] J. Kollar, Y. Miyaoka, S. Mori: Rationally connected varieties, J. Algebraic Geom. 1 (1992), no. 3, 429–448.

[Kaw] Y. Kawamata, Pluricanonical systems on minimal algebraic varieties, Invent. Math. 79 (1985), no.3, 567-588.

[Kob] S. Kobayashi, First Chern class and holomorphic tensor fields, Nagoya Math. J. 77 (1980), 5-11.

[L] D. Lieberman, Compactness of the Chow Scheme: applications to automorphisms and deformations of compact Kähler manifolds, Lecture Notes in Math. 670 (1978), 140-186.

[M1] D. Matsushita, On fibre space structures of a projective irreducible symplectic manifold, Topology 38 (1999), no. 1, 79–83.

[M2] D. Matsushita, On nef-reductions of projective irreducible symplectic manifolds, prépublication math.AG/0601114

[M3] D. Matsushita, Equidimensionality of Lagrangian fibrations on holomorphic symplectic manifolds. Math. Res. Lett. 7 (2000), no. 4, 389–391.

[Mat] K. Matsuki, Termination of flops for 4-folds, Amer. J. Math. 113 (1991), no. 5, 835–859.

[MM] S.Mori, S. Mukai, The uniruledness of the moduli space of curves of genus 11, Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982), 334–353, Lecture Notes in Math., 1016, Springer, Berlin, 1983.

[N] N. Nakayama, Ruled surfaces with non-trivial surjective endomorphisms, Kyushu J. Math. 56 (2002), no. 2, 433–446.

[T] T. Terasoma, Complete intersections with middle Picard number 1 defined over Q, Math. Z. 189 (1985), no. 2, 289–296.

[U] K. Ueno: Classification theory of algebraic Varieties and compact complex analytic spaces, Lecture Notes in Math. 439 (1975), Springer Verlag.

[V] C. Voisin, Intrinsic pseudovolume forms and K-correspondences. The Fano Conference, 761–792, Univ. Torino, Turin, 2004.

[W] J.Wierzba, Birational geometry of symplectic 4-folds, manuscrit non publié, disponible sur http://www.dpmms.cam.ac.uk/ jw227/publications.html.

Ekaterina Amerik
Université Paris-Sud, Laboratoire des Mathématiques
Bâtiment 425, 91405 Orsay, France. Ekaterina.
E-mail: Amerik@math.u-psud.fr

et Frédéric Campana
Institut Elie Cartan, Université Nancy I
B.P. 239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex
E-mail: campana@iecn.u-nancy.fr