Applications regulières et rationnelles entre variétés projectives (mémoire de HDR)

Ekaterina Amérik

Ce mémoire présente les résultats principaux de ma recherche post-doctorale. Avant de procéder à leur description, je tiens à remercier Jean-Michel Bismut qui, à travers de nombreuses discussions passionnantes, m'a aidé à me remettre à la recherche après quelques années peu fertiles suivant mon embauche par l'Education Nationale ; et, bien sûr, mes extraordinaires collaborateurs, sans lesquels la meilleure partie de ce travail ne serait pas faite.

Merci à Jean-Benoît Bost pour avoir accepté de présenter mon dossier à Orsay et pour l'aide qu'il m'apporte ; et aussi à Daniel Huybrechts et à Thomas Peternell pour leurs rapports.

Dans tout le texte, le corps de base est $\mathbb{C}$ (sauf mention explicite du contraire).

1 Le contexte général

Le point de départ de ce travail est, indirectement, le résultat suivant, dû à Lazarsfeld, qui répond à une question posée par Remmert et Van de Ven en [RV] :

Théorème 1.1 ([L]) *Soit X une variété lisse projective et $f : \mathbb{P}^n \to X$ un morphisme surjectif. Si X n'est pas un point, alors $X = \mathbb{P}^n$.*

Ce résultat est ensuite généralisé par Paranjape et Srinivas :

Théorème 1.2 ([PS]) *Soit X une variété lisse projective, Q_n une quadrique lisse de dimension $n \geq 3$ dans $\mathbb{P}^{n+1}$ et $f : Q_n \to X$ un morphisme surjectif. Alors, ou bien $X = \mathbb{P}^n$, ou bien $X = Q_n$, et dans ce dernier cas, f est un isomorphisme.*

Ceci suggère qu'il existe des restrictions assez fortes sur les morphismes possibles $f : X \to Y$, où X, Y sont lisses projectives. Notons en particulier que, tandis que l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ a des endomorphismes de degré arbitrairement grand (en coordonnées, n'importe quel système de $n+1$ polynômes homogènes de grand degré m sans zéro commun sur $\mathbb{P}^n$ en fournit un), la quadrique $Q^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$, qui est parmi les variétés "le plus semblables" à $\mathbb{P}^n$, n'a aucun endomorphisme de degré supérieur à 1.

Un autre point de vue sur la question d'existence de morphismes (en fait, même d'applications rationnelles) est fourni par un résultat de Kobayashi et Ochiai :

Théorème 1.3 ([KO1]) *Soit Y une variété de type général. Alors, pour toute variété X, il n'existe qu'un nombre fini d'applications rationnelles dominantes $f : X \dashrightarrow Y$.*

Bandman, Dethlof et Markushevich ont trouvé des bornes explicites pour $deg(f)$, $f : X \dashrightarrow Y$, où X, Y sont de type général et de la même dimension, en termes d'invariants discrets de X et Y.

Il est naturel de poser la question suivante : que se passe-t-il si Y n'est pas de type général ? C'est-à-dire :

Question 1.4 *Pour quelles Y, le degré d'une application rationnelle $f : X \dashrightarrow Y$ (ou le degré d'une application régulière $f : X \to Y$) est-il toujours borné en fonction des invariants de X ?*

Et que se passe-t-il si l'on se restreint aux applications holomorphes entre variétés relativement "simples", par exemple, celles dont le groupe de Néron-Severi est cyclique ?

Si $dim(X) = dim(Y) = 1$, la situation est simple : le degré est bien borné par $\frac{g(X)-1}{g(Y)-1}$ lorsque $g(Y) > 1$; en effet, le degré de K_X est supérieur ou égal au degré de f^*K_Y (d'après la formule de Hurwitz $K_X = f^*K_Y + R$). Il n'est pas borné si $g(Y) = 0$ ou 1 : dans ce cas, Y admet un endomorphisme de degré supérieur à 1, lequel on peut itérer.

Si $dim(X) = dim(Y) = 2$, la situation n'est pas si claire en général ; toutefois, si l'on impose la restriction $NS(X) \cong NS(Y) \cong \mathbb{Z}$, elle devient semblable à ce qui se passe en dimension 1. En effet, le cas de K_Y positive est celui, déjà discuté, où Y est de type général ; avec notre restriction sur le groupe de Néron-Severi, il est même trivial par la formule de Hurwitz. Il n'y a qu'un seul Y avec K_Y négative, $Y = \mathbb{P}^2$; et nous verrons par la suite, à l'aide d'un analogue de la formule de Hurwitz pour les classes de Chern supérieures, que, lorsque K_Y est numériquement triviale et $NS(Y) \cong \mathbb{Z}$, les seules Y pour lesquelles $deg(f)$, $f : X \to Y$ n'est pas borné, sont les tores et leurs quotients par un groupe fini agissant librement. Ces variétés admettent encore des endomorphismes de grand degré.

Lorsque $dim(X) = dim(Y) = 3$, l'affaire se complique encore : même lorsque $NS(X) \cong NS(Y) \cong \mathbb{Z}$, on a plusieurs familles de Y dont la classe canonique est négative : ce sont les *variétés de Fano*. Pour un tel Y, il n'y a, semble-t-il, pas de manière générale pour obtenir des bornes pour le degré de $f : X \to Y$ à partir de formules numériques "usuelles". Les variétés de Fano de dimension 3 sont, toutefois, entièrement classifiées, et leur géométrie est très riche. On peut donc tenter d'utiliser la classification pour obtenir une déscription assez précise des morphismes entre elles.

La question suivante, inspirée par les résultats de Lazarsfeld et Paranjape-Srinivas, a été posée par Th. Peternell :

Question 1.5 : *Soient X, Y deux variétés de Fano de dimension n, telles que $b_2(X) = b_2(Y) = 1$, et $f : X \to Y$ un morphisme surjectif. Est-il vrai que l'indice $i(X) \leq i(Y)$?*

Rappellons que *l'indice* d'une variété de Fano X est le plus grand nombre r tel que K_X est divisible par r dans $Pic(X)$. La variété dont l'indice est le plus grand par rapport à la dimension est l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ d'indice $n+1$, puis la quadrique Q_n d'indice n (c'est un résultat de Kobayashi et Ochiai [KO2] qu'il n'y a pas d'autres variétés de Fano d'aussi grand indice).

Dans sa thèse, C. Schuhmann a entamé l'étude de cette problématique. Citons ses résultats principaux :

Théorème 1.6([Sch1]) *Soit X une variété lisse projective de dimension 3, telle que $Pic(X) \cong \mathbb{Z}$, et $f : X \to Q$ un morphisme de X sur une quadrique $Q \in \mathbb{P}^4$. Alors le degré de f est borné en fonction des invariants discrets de X.*

Théorème 1.7([Sch2]) *La réponse à la question de Peternell est positive en dimension 3 (éventuellement à quelques exceptions très spéciales près, où il y a des problèmes techniques conduisant à des lacunes dans la démonstration).*

Ceci a fourni une motivation à A. Van de Ven (et à l'auteur) pour la conjecture suivante :

Conjecture 1.8 *Soient X, Y deux variétés lisses projectives de même dimension n, telles que $b_2(X) = b_2(Y) = 1$, et $f : X \to Y$ un morphisme. Si $Y \neq \mathbb{P}^n$ et Y n'est pas une courbe elliptique, alors le degré de f est borné en fonction des invariants discrets de X et de Y.*

Si l'on remplace $b_2(X) = b_2(Y) = 1$ par $Pic(X) \cong Pic(Y) = \mathbb{Z}$, la conjecture est fausse, car il existe des quotients de tores dont le groupe de Picard est cyclique. Une courbe elliptique apparaît comme exception puisque pour les courbes, la condition $b_2 = 1$, toujours satisfaite, n'implique pas que le groupe de Picard est cyclique, tandis que pour une variété X de dimension au moins 2, $b_2(X) = 1$ implique $b_1(X) = 0$ et ainsi $Pic(X) = \mathbb{Z}$.

La conjecture 1.8 est triviale pour $n \leq 2$. L'objectif principal de mes premiers travaux post-doctoraux était sa démonstration en dimension 3. Ceci et d'autres résultats sur cette conjecture seront expliqués dans la section 2 de ce mémoire. Par exemple, on décrira complètement ce qui se produit lorsque $K_Y = 0$.

Si K_Y est négatif, la conjecture semble, pour l'instant, très difficile, malgré un travail important de J.-M. Hwang et N. Mok où ils bornent le degré d'une application entre variétés de Fano de nombre de Picard 1 possédant des courbes rationnelles à fibré normal trivial. Remarquons ici qu'en dimension 3, toute variété de Fano sauf $\mathbb{P}^3$ et la quadrique admet de telles courbes. En dimension supérieure, ces variétés sont forcément de petit indice (un ou deux) par la formule d'adjonction, et il n'est pas très clair si toute variété d'indice 1 ou 2 convient.

On peut aussi poser la question suivante, moins générale que 1.4 :

Question 1.9 *Quelles variétés lisses projectives admettent des endomorphismes, réguliers ou rationnels, de degré supérieur à 1 ?*

Plaçons nous d'abord dans le cadre holomorphe (ou régulier, c'est-à-dire celui d'endomorphismes proprement dits).

Les exemples évidents sont, d'une part, les variétés toriques (endomorphismes correspondant aux homothéties du reseau), d'autre part, les tores. On peut, bien sûr, cosidérer aussi les produits de ces variétés avec des X arbitraires, ainsi que certains quotients par un groupe fini agissant librement. Si la conjecture 1.8 est vraie, les seules variétés avec $b_2 = 1$ à admettre un endomorphisme de degré > 1, sont les espaces projectifs et les courbes elliptiques. Comme on a déjà indiqué, la conjecture est démontré en dimension ≤ 3 (ou plutôt en dimension 3, puisque en dimension < 3 elle est triviale) ; donc la seule variété de dimension 3, avec $b_2 = 1$, qui a un endomorphisme de degré > 1, est $\mathbb{P}^3$.

Pour les surfaces projectives lisses (sans restrictions sur b_2), la situation est la suivante, selon la *dimension de Kodaira* $\kappa(X)$ (on rappelle que c'est la dimension de l'image de X sous l'application rationnelle associée au système linéaire pluricanonique $|mK_X|$, lorsque m est assez grand et assez divisible ; cette application elle-même, indépendante alors de m à une équivalence birationnelle près, est appellée *la fibration d'Iitaka*) :

- si X est de type général, i.e. $\kappa(X) = 2$, tout endomorphisme de X est un automorphisme d'ordre fini ;
- si $\kappa(X) = 1$ et X admet un endomorphisme de degré > 1, X est une surface elliptique isotriviale ;
- si $\kappa(X) = 0$, X est une surface abélienne ou bielliptique (i.e. abélienne après un revêtement fini) ;
- si $\kappa(X) = -\infty$ et X n'est pas rationnelle, elle admet un endomorphisme de degré > 1 dans les deux cas suivants :

(a) X est fibrée en droites projectives sur une courbe de genre ≥ 2, et ce fibré devient trivial après un revêtement fini ;

(b) X est fibrée en droites projectives sur une courbe elliptique.

Et, le plus remarquablement,
- si X est une surface rationnelle, elle admet un endomorphisme de degré > 1 si et seulement si elle est torique [N].

Les trois premières assertions sont faciles et résultent essentiellement de la classification et de deux observations suivantes (cf. [P], [B]) :

Observation 1.10 *Soit X une variété lisse projective. Si $\kappa(X) \geq 0$, alors tout endomorphisme de X est non-ramifié.*

(C'est une consequence de la formule de Hurwitz qu'on obtient en itérant cette formule.)

Observation 1.11 *Soit X une variété lisse projective. Un endomorphisme (et même une auto-application rationnelle dominante) de X induit un automorphisme préservant une classe ample sur la base de la fibration d'Iitaka.*

(Cette observation s'ensuit du fait que chaque endomorphisme de X induit, par l'image réciproque, un automorphisme de l'espace $H^0(X, K_X^{\otimes m})$ pour tout entier positif m.)

La quatrième assertion est une conséquence de [A3], qui traite des fibrés projectifs en général ; on parlera encore de ce travail ci-dessous. Mais le cas de surfaces peut aussi se traiter à la main sans grande difficulté, en suivant le livre de Hartshorne [H]. Le seul énoncé vraiment non-trivial est le dernier, qui confirme notre "philosophie" selon laquelle tous les endomorphismes de grand degré proviennent, en quelque sorte, de tores et de variétés toriques.

Les endomorphismes réguliers de grand degré sont donc probablement "trop rares pour être intéressants" du point de vue de la classification de variétés algébriques, ainsi que d'autres applications. C'est pourquoi, ces dernières années, je me suis intéressée plutôt aux auto-applications *rationnelles*, i.e. définies seulement sur un ouvert (de Zariski).

En effet, la classe des variétés projectives admettant une auto-application rationnelle de degré > 1 est certainement beaucoup plus grande ; elle contient, par exemple, toutes les variétés unirationnelles. Rappellons qu'une variété X de dimension n est dit *unirationnelle* si elle est dominée (rationnellement) par $\mathbb{P}^n$, i.e. s'il existe une application rationnelle dominante $\mathbb{P}^n \dashrightarrow X$ (on obtient alors un endomorphisme rationnel en composant cette appication avec une projection de X sur $\mathbb{P}^n$). C'est le cas de beaucoup de variétés de Fano, y compris de $b_2 = 1$, dont, par exemple, les cubiques de $\mathbb{P}^4$; or nous avons déjà constaté que ces variétés n'admettent pas d'endomorphisme régulier de degré > 1, du moins en dimension 3, sauf pour $\mathbb{P}^3$.

Par l'observation 1.11, cette classe ne contient cependant aucune variété de type général. De plus, un endomorphisme rationnel f d'une variété de dimension de Kodaira intermédiaire "respecte" la fibration d'Iitaka. En fait un énoncé beaucoup plus fort est vrai : dans [AC2], nous avons conjecturé qu'une puissance de f préserve la fibration d'Iitaka, autrement dit, que f induit un automorphisme d'ordre fini sur la base. Nous l'avons démontré en dimension 2 (ce qui est facile). Nakayama et Zhang viennent de le démontrer en général ([NZ]).

Considérons, par exemple, le cas des surfaces elliptiques (i.e. des surfaces de dimension de Kodaira égale à 1). Il est clair que toute surface elliptique admet une auto-application rationnelle de degré > 1 (c'est la "multiplication relative" s'il y a une section, et on adapte facilement cet exemple au cas arbitraire). Cependant, nous savons que chaque auto-application (ou une puissance de celle-ci) préserve la fibration d'Iitaka (i.e. la fibration elliptique). Nous pouvons donc considérer cet exemple comme une "version relative" de la multiplication par un entier sur une courbe elliptique.

Cette discussion suggère que c'est le cas $\kappa(X) = 0$ qui est le plus intéressant. En effet, le fibres de la fibration d'Iitaka sont de dimension de Kodaira nulle.

Par le Programme de Modèles Minimaux, on doit pouvoir se réduire au cas où K_X est un élément de torsion dans $Pic(X)$. Ceci introduit, en général, des singularités (dites *canoniques*; elles ne sont pas toutefois très "méchantes", par exemple, elles sont rationnelles). Mais il est déjà très difficile de comprendre le cas lisse.

Soit, par exemple, X une surface K3 (i.e. une surface lisse simplement connexe de classe canonique triviale). Pour certaines X, l'existence d'endomorphismes rationnels est claire : tel est le cas lorsque X admet une fibration elliptique, ou lorsque X est une surface de Kummer (c'est-à-dire, birationnellement, quotient d'un tore par une involution). Mais ce sont, ici, des surfaces K3 assez spéciales : en effet, leur nombre de Picard n'est jamais égal à 1, tandis que c'est 1 pour une surface K3 projective générique.

Pour X une K3 générique, on ne connaît aucun endomorphisme rationnel de X de grand degré. Il semble toutefois difficile de démontrer leur non-existence (voir, par exemple, [D], où cette non-existence est déduit d'une conjecture, certes non demontrée et probablement très difficile, concernant l'irréductibilité de variétés de Severi "universelles" de familles de surfaces K3).

Cependant, il est observé dans [V1] qu'il existe des familles $\{X_t, t \in T\}$ de variétés X_t avec $K_{X_t} = 0$, et $Pic(X_t) = \mathbb{Z}$ pour $t \in T$ générique, munies d'un endomorphisme f_t de degré $d > 1$ pour tout $t \in T$. On peut prendre pour X_t la variété de Fano des k-plans dans une hypersurface cubique lisse V_t de $\mathbb{P}^n$, pour k et n convenables (c'est-à-dire, choisis de sorte que $K_X = 0$).

Exemple 1.12 ([V1]) Lorsque $k = 1$ et $n = 5$, il s'agit de la variété $X_t = \mathcal{F}(V_t)$ ($\mathcal{F}$ pour "Fano") des droites d'une cubique lisse V_t de dimension 4 ; X_t est alors lisse de dimension 4, et $K_{X_t} = 0$. Ceci résulte facilement du fait que dans la grassmannienne $G(1,5)$ des droites dans $\mathbb{P}^5$, X_t est le lieu des zéros d'une section de $S^3U^* = p_*q^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(3)$ correspondante à la cubique V_t ; ici, U dénote le fibré tautologique sur $G(1,5)$, et p (resp. q) sont les projections de la famille universelle $F \subset G(1,5) \times \mathbb{P}^5$ des droites dans $\mathbb{P}^5$ sur $G(1,5)$ (resp. sur $\mathbb{P}^5$).

On démontre, en considérant l'application de Gauss ([CG]), que pour une droite générique $l \subset V = V_t$, il existe un unique plan P_l tangent à V le long de l. On dispose donc de $f : X \dashrightarrow X$, qui à une l générique fait correspondre la droite l', résiduelle à l dans l'intersection $V \cap P_l$ ("$V \cap P_l = 2l \cup l'$").

Dans [V1], Voisin montre que $deg(f) = 16$.

Il est bien connu ([BD]) que X_t comme ci-dessus est irréductible symplectique (i.e. son $h^{2,0}$ est engendré par une 2-forme holomorphe partout non-dégénérée σ) ; nous sommes donc très proches de surfaces K3 dont les variétés symplectiques sont une généralisation en dimension supérieure.

Une première question naturelle est de savoir si ces exemples sont vraiment nouveaux, ou, au contraire, "proviennent", comme dans le cas de fibrations elliptiques, de la dimension inférieure. Nous allons y donner une reponse affirmative dans la section 4.

Une seconde question est celle d'applications possibles de l'existence d'un tel endomorphisme remarquable. Une d'entre elles, analytique, est décrite dans [V1] : grâce à l'existence d'un endomorphisme rationnel de grand degré, on obtient facilement l'annulation de la forme pseudo-volume de Kobayashi (notons cependant que dans le cas particulier de l'exemple 1.12, ce n'est pas très intéressant car cette variété est recouverte par des surfaces birationnellement abéliennes ([V2]), qui ne rentrent pas dans une fibration, ce qui implique un résultat plus fort : l'annulation de la pseudo-métrique de Kobayashi).

Une autre application possible remonte (au moins) à [BT] : il s'agit de la *densité potentielle* des points rationnels. Rappellons qu'une variété lisse projective définie sur un corps K est dite *potentiellement dense* sur K, s'il existe une extension fini L de K, telle que l'ensemble $X(L)$ soit Zariski-dense dans X. On dit encore (mieux) que les points K-rationnels sont potentiellement denses dans X. Selon la conjecture de Lang, démontrée par Faltings pour courbes, mais toujours ouverte en dimension ≥ 2, une variété de type général sur un corps de nombres ne peut pas être potentiellement dense sur ce corps. Par contre, toutes les conjectures dans le sujet (voir par exemple [C]) prédisent la densité potentielle dans les cas où K_X est négative (i.e. X est de Fano) ou nulle.

Il y a beaucoup de variétés de Fano pour lesquelles la densité potentielle sur un corps de nombres est connue (par exemple, elle est évidente pour les variétés unirationnelles). Par contre, dans le cas où K_X est triviale, les exemples sont moins nombreux. La densité potentielle est classique pour les variétés abéliennes ; mais déjà pour les surfaces $K3$, elle n'est établie que dans des cas spéciaux. Notamment, citons [BT] :

Théorème 1.13 *Une surface $K3$ admettant une fibration elliptique, ainsi qu'une surface $K3$ dont le groupe d'automorphismes est infini, est potentiellement dense sur $\mathbb{Q}$.*

Dans le second cas, on procède comme suit : par un résultat de Bogomolov et Mumford, une surface K3 contient des courbes rationnelles, eventuellement singulières. Ces courbes étant isolées, elles sont définies sur un corps de nombres (pourvu que la surface K3 le soit). On montre ensuite qu'on peut trouver une courbe rationnelle dont l'orbite sous le groupe d'automorphismes est infinie. Puisque les points rationnels sont potentiellement denses sur la courbe, ils le sont donc partout.

Ainsi, dans cet exemple la densité potentielle se déduit de l'existence d'un endomorphisme d'ordre infini.

Dans [AC2], on fait une tentative d'analyse de la situation pour $X = \mathcal{F}(V)$ comme ci-dessus, la variété des droites d'une cubique générique dans $\mathbb{P}^5$. En utilisant notre endomorphisme de degré 16, nous arrivons à démontrer la densité potentielle sur tout corps non dénombrable, par exemple, un corps de fonctions d'une courbe complexe. Remarquons qu'un travail de Hassett et Tschinkel [HT], en circulation depuis à peu près le même moment, construit des surfaces $K3$ de nombre de Picard 1, potentiellement denses sur un tel corps de fonction.

Dans une collaboration recente avec C. Voisin [AV], nous montrons la densité potentielle sur un corps de nombres pour "beaucoup" de X comme ci-dessus, assez générales pour que le nombre de Picard soit égal à 1. Remarquons ici que l'existence de $X = \mathcal{F}(V)$ défini sur $\mathbb{Q}$ et tel que $Pic(X) = \mathbb{Z}$ est non-triviale ; elle est impliquée par un théorème de Terasoma [T], affirmant que pour beaucoup de cubiques $V \in \mathbb{P}^5$ définies sur $\mathbb{Q}$, le groupe des classes de Hodge dans $H^4(V, \mathbb{Z})$ est cyclique, et ensuite par un résultat de Beauville et Donagi [BD] (voir section 4).

Il s'agit, à ma connaissance, des premiers exemples de variétés simplement connexes, de classe canonique triviale, de nombre de Picard 1, potentiellement denses sur un corps de nombres.

Nous expliquerons ces résultats dans la section 4.

Remarquons enfin que la dynamique holomorphe fournit une autre question sur l'exemple 1.12 : il s'agit de calculer ses *degrés dynamiques*. Ce sont des invariants d'un endomorphisme, introduits dans [RS], qui décrivent le comportement asymptotique de l'action des itérées de f sur la cohomologie. Lorsque certaines conditions sur ces invariants sont satisfaites, on s'attend à des bonnes propriétés d'équidistribution (voir par exemple [G]). La définition est la suivante : soit (X, ω) une variété kählerienne compacte de dimension k. On pose

$$\delta_l(f, \omega) = [f^* \omega^l] \cdot [\omega^{k-l}]$$

(ici, $[\cdot]$ dénote la classe de cohomologie), et le l-ème degré dynamique

$$\lambda_l(f) = \limsup (\delta_l(f^n, \omega))^{1/n}.$$

Il n'est pas difficile de montrer qu'il coincide avec

$$\rho_l(f) = \limsup (r_l(f^n))^{1/n},$$

où $r_l(f^n)$ est le rayon spectral de l'action de f^n sur $H^{l,l}(X)$. Lorsque X est projectif, on peut, pour le calcul de ρ, se restreindre à la partie algébrique de la cohomologie. Dinh et Sibony montrent dans [DS] que la limite supérieure est en fait une limite, ainsi que l'invariance des degrés dynamiques par les conjugaisons birationnelles.

En général, les degrés dynamiques sont très difficiles à calculer ; dans notre cas, ce calcul est plutôt facile et fournit des "bonnes" valeurs. Ceci, plus une certaine nouveauté de cet exemple par rapport à ceux considères jusque maintenant, pourrait en motiver une étude dynamique plus précise.

2 Comment borner le degré d'un morphisme

Certains des résultats de cette section ont été obtenus en collaboration avec M. Rovinsky et A. Van de Ven.

La première remarque est que la preuve du théorème 1.6 par C. Schuhmann n'est pas généralisable en dimension supérieure. Cette démonstration utilise, en fait, un résultat assez subtile de Miyaoka, permettant de borner le nombre de points doubles sur une surface minimale (i.e. de classe canonique nef) n'ayant pas d'autres singularités. Cette borne est ensuite appliquée à la surface $f^{-1}(H)$, où $H \subset Q \subset \mathbb{P}^4$ est un cône quadratique générique dans une quadrique lisse tridimensionelle Q, et $f : X \to Q$ est un morphisme de grand degré, pour obtenir une contradiction.

Si l'on passe en dimension supérieure, la borne de Miyaoka devient trop faible pour pouvoir conclure.

Mon premier résultat dans la direction de la conjecture 1.8 était une généralisation du résultat de Schuhmann, obtenue par une méthode différente :

Théorème 2.1([A1]) *Soit X une variété lisse projective de de dimension $n \geq 3$, telle que le groupe de Néron-Severi $NS(X) \cong \mathbb{Z}$. Soit $Q = Q_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ une quadrique lisse et $f : X \to Q_n$ un morphisme.*

Alors le degré de f est borné par des invariants discrets de X.

Plus précisement, soit L le générateur ample de $NS(X)$. On a alors $f^*(\mathcal{O}_Q(1)) = \mathcal{O}_X(L)^{\otimes m}$ pour un certain $m > 0$, et $deg(f) = m^n L^n/2$. Le nombre m est estimé de la manière suivante : si $K_X = kL$ et r est tel que rL soit très ample, alors $m < 2k + (2n+5)r$ si $n \geq 4$, et $m < 3k + 16r$ si $n = 3$.

La version tridimensionelle du théorème 2.1 (qui n'est donc qu'une nouvelle preuve du théorème 1.6) apparaît déjà dans ma thèse, pour des raisons autres que le sujet de ce mémoire. La version générale n'apparaît que dans la note [A1], à cause d'une rédaction (très) tardive.

Pour la démonstration, on considère une quadrique lisse H de dimension 2, qui est une section linéaire de Q, une droite $l \subset H$, et les images reciproques $C \subset S \subset X$. Notons que pour un choix générique de l et H, C et S sont lisses, puisque Q est homogène (c'est une variante du théorème de Bertini). La suite exacte de fibrés normaux de $l \subset H \subset Q$ est scindée, donc celle de $C \subset S \subset X$ l'est aussi. On constate ensuite que ceci implique que $S \subset X$ ne satisfait pas à *la condition de Noether-Lefschetz infinitésimale* ([CGGH]) pour les surfaces intersections complètes dans X. En effet, l'application $H^0(C, N_{C,X}) \to H^0(C, N_{S,X}|_C)$ étant surjective, on en déduit immédiatement que toute déformation infinitésimale de S dans X contient une déformation infinitésimale de C. (La classe cohomologique sur S ne peut être induite par une classe sur X ; rappellons que, par définition, S satisfait à la condition de Noether-Lefschetz infinitésimale si toute classe de diviseurs sur S qui déforme avec S dans toutes les directions, provient d'une classe sur X.) D'autre part, une généralisation directe d'une proposition de Ein et Lazarsfeld ([EL], Proposition 3.4) implique que les surfaces lisses intersections complètes de "grand" multidegré sur X doivent satisfaire à la condition infinitésimale de Noether-Lefschetz.

Le résultat suivant concerne la conjecture 1.8 lorsque K_Y est triviale (le cas où K_Y est positive étant trivial par la formule de Hurwitz $K_X = f^*K_Y + R$, puisque R est un diviseur effectif). Nous avons démontré dans [ARV] un enoncé un peu plus général :

Théorème 2.2 *Soit Y une variété lisse projective telle que $NS(Y) \cong \mathbb{Z}$ et $c_1(Y) = 0$ dans $H^2(Y, \mathbb{R})$. Supposons qu'il existe un X tel que $NS(X) \cong \mathbb{Z}$, admettant un morphisme de degré arbitrairement grand sur Y. Alors Y est quotient d'un tore par un groupe fini agissant librement.*

La démonstration est très simple mais s'appuit sur la solution par Yau de la conjecture de Calabi. Plus précisement, en utilisant un analogue de la formule de Hurwitz pour les classes de Chern supérieures, nous arrivons à montrer que, si le degré n'est pas borné, alors $c_2(Y)H^{n-2} = 0$ (où H est la section hyperplane de Y). En appliquant le théorème de Yau, on conclut (par un argument comme dans le livre de Kobayashi [Kob], chapitre 4, section 4) que Y est plat ; donc, par la théorie de Bieberbach, c'est un quotient d'un tore.

Notre "inégalité de Hurwitz" est, en général, assez efficace. Elle nous a servi aussi pour borner le degré d'un morphisme vers certaines variétés de Fano "désagréables" (voir ci-dessous). Ensuite, elle a été utilisée, par exemple, par A. Beauville pour démontrer que les hypersurfaces lisses dans l'espace projectif, à quelques exceptions évidentes près, n'admettent pas d'endomorphismes de degré > 1. La formulation précise est la suivante :

Lemme 2.3 *("inégalité de Hurwitz", [ARV]) : Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini entre variétés lisses projectives de dimension n. Soit L un fibré en droites sur Y, tel que $\Omega^1_Y(L)$ soit engendré par ses sections. Alors*

$$deg(f) c_n(\Omega^1_Y(L)) \leq c_n(\Omega^1_X(f^*L)).$$

Cette inégalité repose sur le fait que, en vertu de l'hypothèse sur L, pour une section assez générale $s \in H^0(Y, \Omega^1_Y(L))$, la section induite de $H^0(X, \Omega^1_X(f^*L))$ est à zéros isolés.

Enfin, les techniques developpées dans [A2] et [ARV], fournissent la solution de la conjecture 1.8 en dimension 3 :

Théorème 2.4 *Soient X, Y deux variétés lisses projectives de dimension 3, telles que $b_2(X) = b_2(Y) = 1$. Si $Y \neq \mathbb{P}^3$, alors le degré d'un morphisme $f : X \to Y$ est borné par des invariants discrets de X et Y.*

La démonstration est en deux parties indépendantes. En effet, d'abord, par ce que vient d'être dit en 2.2, nous devons nous assurer que, en dimension 3, il n'existe pas de quotient libre Y d'une variété abélienne A, tel que $b_2(Y) = 0$. Cette dernière condition équivaut, en fait, à ce que la représentation du groupe agissant sur A soit irréductible dans l'espace tangent $T_0(A)$ (le fibré tangent de A étant plat, cette représentation est bien définie même si le groupe ne fixe pas l'origine). Un étude assez élémentaire de la cohomologie de groupes finis montre que c'est impossible en dimension trois : un groupe fini G agissant librement sur A ne peut pas fournir un représentation irréductible sur $T_0(A)$. Cet énoncé est la proposition 3.1 de [ARV].

Question 2.5 *Ceci reste-t-il vrai en dimension quelconque ?*

Le cas de variétés de classe canonique triviale étant reglé, on passe au cas où K_Y est négative : c'est-à-dire, au cas où Y est une variété de Fano de dimension 3 et de nombre de Picard 1. L'étude de ce cas est fait en partie dans [A2] et en partie dans [ARV]. Bien que la conclusion finale soit le

Théorème 2.6 : *La conjecture 1.8 est vraie en dimension 3, autrement dit, si* $dim(X) = dim(Y) = 3$ *et* $b_2(X) = b_2(Y) = 1$*, alors ou bien* $Y = \mathbb{P}^3$*, ou bien le degré de* $f : X \to Y$ *est borné,*

la preuve utilise la classification de variétés de Fano de dimension 3 par Iskovskih ([I]) et procède par l'une de trois méthodes différentes selon le type de la variété Y (qu'on peut, d'après ce qui précède, supposer de Fano).

Avant de discuter les méthodes, commençons par quelques préliminaires sur les variétés de Fano de dimension 3.

Rappellons que *l'indice* d'une variété de Fano Y est le plus grand nombre r tel que $K_Y = rL$ pour un fibré en droites L. Dans le cas où $Pic(Y) = \mathbb{Z}$, L est le dual du générateur ample du $Pic(Y)$. Selon Kobayashi et Ochiai, l'indice $i(Y)$ de Y est au plus $dim(Y) + 1$; si $i(Y) = dim(Y) + 1$, alors $Y \cong \mathbb{P}^n$, et si $i(Y) = dim(Y)$, alors c'est une quadrique.

Dans le cas tridimensionnel, on a 5 familles de variétés de Fano d'indice 2 avec $Pic(Y) = \mathbb{Z}$, et 11 familles de variétés de Fano d'indice 1 avec $Pic(Y) = \mathbb{Z}$. Pour la plupart de ces familles, le générateur ample H_Y du $Pic(Y)$ est très ample et définit un plongement de Y dans $\mathbb{P}^N$; les 4 familles qui restent correspondent aux petites valeurs de H_Y^3. En indice 2, ce sont : le revêtement double de $\mathbb{P}^3$ ramifié le long d'une quartique ($H_Y^3 = 2$) et le "cône double de Veronese", à savoir, une hypersurface de degré 6 dans l'espace projectif à poids $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 3)$ ($H_Y^3 = 1$), dont le nom vient du fait qu'elle est naturellement un revêtement double (ramifié le long d'une section cubique) du cône au-dessus d'une surface de Veronese. En indice 1, on a le revêtement double de $\mathbb{P}^3$ ramifié le long d'une sextique ($H_Y^3 = 2$) et le revêtement double d'une quadrique ramifié le long d'une section quartique de celle-ci ($H_Y^3 = 4$).

Le fait remarquable et crucial pour notre démonstration est que, dès que H_Y est très ample, Y contient des droites (dans le plongement projectif correspondant). En fait, même si H_Y n'est pas très ample, on a toujours des "droites généralisées", c'est-à-dire, des courbes C avec $CH_Y = 1$; mais ce cas est un peu moins bon car ces courbes ne sont pas toujours lisses, et certaines peuvent même être non réduites si l'on veut les considérer "en famille".

Soit $l \subset Y$ une droite. Par la formule d'adjonction, $deg(N_{l,Y}) = 0$ si $i(Y) = 2$, et $deg(N_{l,Y}) = -1$ si $i(Y) = 1$. En fait, on démontre facilement que lorsque $i(Y) = 2$, $N_{l,Y}$ est trivial pour l générale (donc la famille des droites sur Y est de dimension 2), et il y a une courbe des droites du fibré normal $\mathcal{O}_l(-1) \oplus \mathcal{O}_l(1)$. Lorsque $i(Y) = 1$, il n'est pas toujours vrai que, pour l général, nous avons $N_{l,Y} = \mathcal{O}_l(-1) \oplus \mathcal{O}_l$: il se peut, apriori, que pour toute l, $N_{l,Y} = \mathcal{O}_l(-2) \oplus \mathcal{O}_l(1)$, et, en effet, tel est le cas de la *variété de Mukai-Umemura*, qui manquait dans la première version de la classification d'Iskovskikh. Dans les deux cas, les droites sont paramétrées par une courbe ; évidemment, elle est réduite dans le premier cas et non-réduite dans le second.

Retournons au théorème 2.6, cas Fano. Nous avons déjà vu une méthode de la démonstration lors de la discussion du Théorème 2.1. Il s'agit de remarquer que sur certaines variétés de Fano Y dont H_Y est très ample - c'est-à-dire, sur toutes les variétés d'indice 2, et celles d'indice 1 dont le schéma de Hilbert des droites n'est pas réduit - nous avons des droites l, contenues dans une section hyperplane S (représentant la classe H_Y), telles que la suite normale de $l \subset S \subset Y$ est scindée. On peut alors utiliser la même idée que dans la démonstration de 2.1 : soit X une variété lisse projective de nombre de Picard 1 et $f : X \to Y$ un morphisme ; soient $C = f^{-1}(l)$ et $M = f^{-1}(S)$; on constate que la condition de Noether-Lefschetz infinitésimale n'est pas satisfaite pour $C \subset M \subset X$ et on en déduit que M ne peut pas devenir trop ample sur X, ainsi $deg(f)$ ne peut pas devenir trop grand. On rencontre alors un problème technique : en effet, contrairement au cas de la quadrique, qui était homogène, nous ne pouvons pas affirmer ici que pour un choix générique de S, $l \subset S \subset Y$, l'image réciproque $M \subset X$ soit lisse. Ainsi, nous ne pouvons pas appliquer la technique de [EL].

Heureusement on peut adapter notre argument à cette situation, suivant celui de [Br] (qui est, à son tour, une généralisation de [EPGS]). Le prix qu'on paie pour cela est la nécessité de supposer que $b_2(X) = 1$ au lieu de la condition plus faible $Pic(X) = \mathbb{Z}$. Dans ce cas, l'argument utilise vraiment le scindage de la suite normale, et non seulement la surjectivité de l'application induite sur les sections globales.

Pour les variétés avec H_Y très ample qui restent, c'est-à-dire, pour les variétés d'indice 1 dont le schema de Hilbert des droites est réduit, on raisonne de la manière suivante : on constate d'abord (en utilisant la classification) que le diviseur D balayé par les droites est assez gros ; on en déduit que pour $f : X \to Y$ comme ci-dessus, $f^{-1}(D)$ ne peut pas être entièrement contenu dans la ramification de f. On considère ensuite une droite générale l et son image réciproque $C = f^{-1}(l)$. Par ce que vient d'être dit, C a toujours une composante irréductible réduite C_0.

Considérons le faisceau normal $(\mathcal{I}_{C_0}/\mathcal{I}^2_{C_0})^*$. Au point générique de C_0, il est isomorphe à

$$(\mathcal{I}_C/\mathcal{I}^2_C|_{C_0})^* = \mathcal{O}_{C_0}(-m) \oplus \mathcal{O}_{C_0}$$

pour un entier $m > 0$ (tel que $f^*H_Y = mH_X$), et est un quotient de $T_X|_{C_0}$. Mais pour un assez grand entier k (déterminé par les invariants discrets de X), $T_X|_{C_0}(k)$ est engendré par ses sections et ne peut pas admettre une application génériquement surjective sur un fibré vectoriel négatif. Donc $m \leq k$; ceci se traduit en une borne pour le degré de f.

Finalement, les quelques familles de variétés dont H_Y n'est pas très ample sont, un peu miraculeusement, éliminées à l'aide de "l'inégalité de Hurwitz" (lemme 2.3). Ici, bien sûr, la classification joue encore le rôle essentiel : en effet, il faut connaître la classe de Chern supérieure $c_3(Y)$ pour pouvoir conclure ; ce c_3 ne peut pas se déduire des généralités sur les variétés de Fano.

3 Endomorphismes réguliers : le cas des fibrés projectifs

Pour cette section, la référence est [A3].

Si nous voulons étudier la question de l'existence d'endomorphismes de grand degré pour les variétés dont le nombre de Picard est supérieur à 1, peut-être la première classe d'exemples à regarder est celle des fibrés projectifs.

Bien évidemment, pour toute variété X, le produit $X \times \mathbb{P}^r$ admet un tel endomorphisme. Que se passe-t-il pour un fibré $p : X \to B$ de fibre $\mathbb{P}^r$?

Remarquons tout d'abord que pour toute variété X, un endomorphisme $f : X \to X$ de degré non-nul (donc surjectif) est nécessairement fini : ceci résulte, par exemple, de ce que $f_* f^*$ est une homothétie sur la cohomologie à coefficients rationnels.

Ensuite, soit X un fibré projectif et $f : X \to X$ un endomorphisme. Il est facile de voir la chose suivante :

Lemme 3.1 *Une puissance de f envoit fibres sur fibres.*

En remplaçant, si nécessaire, f par f^k, nous pouvons donc supposer que f induit un endomorphisme g de la base :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

J'ai obtenu une description complète du cas où $g = id$:

Théorème 3.2 *Soit $p : X \to B$ un fibré projectif. Alors X admet un endomorphisme f, tel que $deg(f) > 1$ et $p \circ f = p$, si et seulement si il existe un revêtement fini $\sigma : B' \to B$ tel que $X \times_B B' = \mathbb{P}^r \times B'$.*

Ce revêtement peut être choisi galoisien et même étale. Les fibrés en espaces projectifs admettant un endomorphisme de grand degré qui commute avec la projection sur la base sont donc plats, provenant d'une représentation

$$\rho : \pi_1(B) \to PGL(r+1),$$

et l'image de cette représentation est un groupe fini.

Théorème 3.2 répond complétement à la question de l'existence d'endomorphismes de grand degré dans le cas où $End(B)$ est fini : en effet, dans ce cas, une puissance de n'importe quel endomorphisme de X commute avec p. Par exemple, tel est le cas si B est de type général.

Dans le cas où B peut lui-même avoir des endomorphismes d'ordre infini, j'ai obtenu un résultat partiel, portant sur les fibrés en droites projectives.

Ici, deux cas de nature différente peuvent se produire : dans le premier cas, f est de degré 1 sur les fibres X_b ; ceci signifie, bien sûr, que pour un certain $g \in End(B), deg(g) > 1$, nous avons $g^*X \cong X$ en tant qu'un fibré projectif sur B (si par exemple $X = \mathbb{P}_B(E)$ pour E un fibré vectoriel, alors $g^*(E) = E \otimes L$ pour un certain fibré en droites L). Des exemples (avec $E \neq \mathcal{O}^{\oplus(r+1)}$, même à une tensorisation par un fibré en droites près) sont faciles à produire : on peut prendre pour B une courbe elliptique et pour E l'unique extension non-triviale du faisceau structural par lui-même. Je ne sais pas classifier ce cas et je le considère comme étant "pathologique".

Dans le second cas, f est de degré > 1 sur les fibres. Ici, je propose une condition nécessaire suivante :

Théorème 3.3 : *Soit X un fibré en droites projectives (i.e. $r = 1$). Si X admet un endomorphisme f de degré > 1 sur les fibres, alors, après un changement de base fini, $X \cong \mathbb{P}(E)$ où E est un fibré vectoriel scindé : $E = L_1 \oplus L_2$, L_i étant des fibrés en droites.*

Cette condition n'est évidemment pas suffisante : en effet, si B est de type général, nous savons déjà que pour l'existence d'un tel endomorphisme, X doit se trivialiser après un revêtement fini. La raison pourquoi elle est intéressante est qu'elle confirme la philosophie du "tore ou torique", esquissée dans l'introduction. Effectivement, considérons le cas où B est torique (et possède donc un endomorphisme de grand degré). Soit E un fibré vectoriel de rang $r + 1$ sur B.

Lemme 3.4 (S. Druel, [Dr]) : *$\mathbb{P}(E)$ est torique si et seulement si E est scindé, i.e. $E = L_1 \oplus \ldots \oplus L_{r+1}$ où les L_i sont des fibrés en droites.*

Nous ne sommes donc pas très loin de l'énoncé suivant :

Pour qu'un fibré en droites projectives sur une variété torique ait un endomorphisme de degré > 1, il faut et il suffit qu'il soit lui-même une variété torique.

Malheureusement, il y a quelques obstacles : d'abord, nous exigeons dans le théorème 3.3 que l'endomorphisme soit de degré > 1 sur les fibres ; puis, il y a dans ce théorème un changement de base fini, sur lequel, cette fois-ci, nous ne savons pas dire grand-chose. Nous ne pouvons, par exemple, montrer qu'il peut être pris étale (et je ne suis même pas sure que ce soit vrai).

Cependant, dans quelques cas simples, nous pouvons nous affranchir de ces problèmes. On obtient, par exemple,

Proposition 3.5 *Soit $X = \mathbb{P}(E)$ la projectivisation d'un fibré de rang 2 sur $\mathbb{P}^n$. Alors, X admet un endomorphisme de degré > 1 si et seulement si E est scindé.*

En fait, on peut montrer que l'existence d'endomorphismes implique le scindage pour toute une classe de bases B "semblables à $\mathbb{P}^n$", disons, simplement connexes et telles que $H^1(B, L)$ s'annule pour tout fibré en droites L (nous allons expliquer pourquoi).

Esquissons les démonstrations.

En gros, l'idée est la suivante : un endomorphisme d'un fibré projectif est lui-même une section s d'un certain fibré en ouverts affines : dans le cas du théorème 3.2, c'est le fibré des endomorphismes réguliers des fibres de X, donnés par des systèmes de polynômes de degré m pour un certain $m > 1$ fixé. En factorisant par tous les changements de coordonnées, nous obtenons, à partir de s, une application de B (projectif) dans le quotient catégorique $F/PGL(V)$ (où F est la fibre typique du fibré des endomorphismes et V est l'espace vectoriel sous-jacent de la fibre typique de X). Ce quotient étant affine, l'application est constante, d'image T. Nous démontrons ensuite que l'action de $PGL(V)$ sur F est à stabilisateurs finis ; notre quotient est donc un quotient géométrique, c'est-à-dire, il paramètre précisement les orbites de l'action. Finalement, un calcul simple montre que, à un changement de coordonnées près, les fonctions de transition du notre fibré initial X sont à valeurs dans $Stab(\bar{T})$ pour un relèvement $\bar{T}$ de T, donc constantes à valeurs dans un groupe fini.

Dans la situation du théorème 3.3, puisque notre endomorphisme ne commute plus avec p, nous ne pouvons plus identifier la fibre source avec la fibre but. On doit donc, helas, considérer le quotient catégorique $F/PGL(V) \times PGL(W)$, où V est l'espace vectoriel sous-jacent de la fibre source et W celui de la fibre but, F étant donc un ouvert de $\mathbb{P}(W^* \otimes S^m(V))$. Il n'est plus vrai que l'action de $PGL(V) \times PGL(W)$ est à stabilisateurs finis ; cependant, lorsque $dim(V) = dim(W) = 2$, il est très facile de classifier les points dont le stabilisateur est infini et les orbites qui peuvent en être adhérentes (i. e. qui ne sont pas separées par les invariants). J'arrive donc à adapter la preuve de 3.2 ici, mais seulement dans le cas $r = 1$ ($dim(V) = dim(W) = 2$). Sinon cela devient assez compliqué techniquement (bien que, très probablement, faisable avec une certaine prouesse technique).

On voit en particulier, en effectuant cette adaptation, que si $X = \mathbb{P}(E)$ (admettant un endomorphisme de grand degré) n'est pas trivialisé après un revêtement fini étale de B, alors E a un sous-fibré. Ceci explique la proposition 3.4 : en effet, si $B = \mathbb{P}^n$, B n'admet pas de revêtements finis étales non-triviaux, et tout fibré de rang 2 admettant un sous-fibré est scindé (parce que les Ext^1 entre fibrés en droites sur $\mathbb{P}^n$, $n \geq 2$, sont toujours triviaux).

4 Endomorphismes rationnels : un exemple et ses applications

4.1 L'exemple : premières propriétés

Dans cette partie, on considère l'exemple de Voisin, déjà présenté dans la section 1 (Exemple 1.12).

Soit $V \subset \mathbb{P}^5$ une cubique lisse. Soit $X = \mathcal{F}(V) \subset G(1,5)$ la variété des droites de V. Il est facile de voir que X est de dimension 4, lisse si V l'est. La formule d'adjonction montre que $K_X = 0$: en effet, X est le lieu des zéros d'une section de S^3U^*, dont le déterminant, $\mathcal{O}_{G(1,5)}(6)$, est exactement le fibré anticanonique de la grassmannienne. Cette représentation de X permet de calculer d'autres invariants ; par exemple, le degré de X dans le plongement de Plücker, $H_X^4 = 108$ (ici et dans la suite, H_X ou tout simplement H, si il n'y a pas de risque de confusion, désigne la classe de la section hyperplane plückerienne).

Considérons l'application de Gauss $D_V : V \to (\mathbb{P}^5)^*$, qui à un point $x \in V$ associe son hyperplan tangent T_xV. Soit $l \subset V$ une droite ; puisque D_V est donnée par des polynômes quadratiques (les derivées partielles d'une équation de V), $D_V|_l$ est ou bien bijective sur une conique, ou bien 2 : 1 sur une droite de $(\mathbb{P}^5)^*$ (voir [CG] où l'on montre aussi que l ne peut pas être contractée par D_V). Dans le premier cas, qui est générique, $P_l = \cap_{x\in l} T_x V$ est l'unique plan tangent à l le long de V. Dans le second, $Q_l = \cap_{x\in l} T_x V$ est de dimension 3 et on a un faisceau de tels plans : ce sont les plans dans Q_l qui contiennent l. On dit alors que l est "de second type" ; les droites de second type sont paramétrées par une surface $S \subset X$ ([CG]), et on démontre facilement (voir par exemple [A5]) que S est lisse pour X générique.

Considérons l'application $f : X \dashrightarrow X$ qui à l générique associe la droite l', résiduelle à l dans l'intersection $V \cap P_l$. Il est clair d'après ce qui précède que le lieu d'indétermination de f est la surface S, et que l'indétermination est résolue par un simple éclatement π de S :

$$\begin{tikzcd} & Y = Bl_S(X) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "f"] & & X \end{tikzcd}$$

Une analyse un peu plus détaillée fournit la résolution suivante de S :

$$0 \to S^2 U_X(-2H) \to Q_X^*(-2H) \to \mathcal{I}_S \to 0,$$

où U_X est la restriction du fibré tautologique de $G(1,5)$ et Q_X^* est la restriction du fibré universel quotient. On en déduit :

Proposition 4.1.1 *S est une surface de type général. Sa classe de cohomologie dans $H^4(X,\mathbb{Z})$ est $5(H^2 - \Delta)$, où $\Delta = c_2(U_X)$ correspond à l'ensemble des droites contenues dans une section hyperplane de V.*

Remarque 4.1.2 En fait, il s'agit du premier exemple de toute une série : on peut aussi considérer la variété $X_{k,n}$ des k-plans dans une cubique de dimension n. Dès qu'on choisit les nombres k, n pour avoir $K_{X_{k,n}} = 0$, on construit une auto-application $f_{k,n}$ de manière semblable. Mais pour $(k,n) \neq (1,4)$, les $X_{k,n}$ sont de très grande dimension, ce qui rend difficile d'en mener une étude aussi précise que celle que nous voulons faire ici (sauf dans la section suivante).

Le point important est que X est une variété symplectique irréductible : selon [BD], elle est une déformation du schéma de Hilbert ponctuel $Hilb^2(T)$, où T est une surface $K3$ de degré 14 dans $\mathbb{P}^8$. Encore selon [BD], l'application

$$AJ = p_* q^* : H^4(V,\mathbb{Q}) \to H^2(X,\mathbb{Q})$$

est un isomorphisme de structures de Hodge (ici, on considère la famille universelle

$$F = \{(l,x) : x \in l\} \subset X \times V$$

et l'on pose $p : F \to X$, $q : F \to V$). En particulier, puisque, par le théorème de Noether-Lefschetz, $H^4(V,\mathbb{Z}) \cap H^{2,2}(V) = \mathbb{Z}$ pour V générique, le groupe de Picard de X est cyclique pour X générique.

Soit $\sigma = AJ(\eta)$, $\eta \in H^{3,1}(V)$ une forme holomorphe symplectique sur X. Voisin observe dans [V1], que, par une généralisation d'un théorème de Mumford bien connu, le fait que $P_l \cap V = 2l + f(l) \in CH^3(V)$ est constant implique que $f^*\sigma = -2\sigma$. Autrement dit, nous avons

Proposition 4.1.3 ([V1]) *$g^*\sigma = -2\pi^*\sigma$; par conséquent, $deg(f) = 16$.*

4.2 Non-préservation des fibrations

Cette section, ainsi que la section suivante, présente une partie de l'article [AC2] en collaboration avec F. Campana.

Nous répondons ici à la première question posée dans section 1 : est-il vrai qu'il s'agit d'un nouvel exemple, ou l'endomorphisme f provient-il de la dimension inférieure, en préservant une fibration ?

Cette question est le point de départ de [AC2], où nous démontrons, entre autres, le résultat suivant :

Théorème 4.2.1 *Soit X une variété lisse projective, telle que $K_X = 0$ et $NS(X) \cong \mathbb{Z}$. Alors toute fibration rationnelle $g : X \dashrightarrow B$, $0 < dim(B) < dim(X)$, est en variétés de type général.*

Par une "fibration en variétés de type général", nous entendons une fibration dont la fibre générique est de type général. Une "fibre" d'une fibration rationnelle $g : X \dashrightarrow B$ est une fibre de la résolution d'indétermination $h : X' \to B$:

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "h"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "g"] & & B \end{tikzcd}$$

Ici, nous considérons la fibre générique à équivalence birationnelle près ; ceci ne dépend pas du choix de la résolution.

Bien sûr, X n'admet pas de fibration non-triviale *régulière* $X \to B$, puisque $NS(X) = \mathbb{Z}$. Si la fibre générique d'une fibration rationnelle est lisse, elle est évidemment de type général, par la formule d'adjonction. Cependant, il se peut qu'aucune fibre ne soit lisse ; l'énoncé est donc non-trivial.

Le théorème se démontre en considérant un fibré très ample H sur B et son transformé strict $L = \pi_* h^* H$ (qu'on définit d'abord comme un diviseur de Weil). Ainsi, l'application g est donnée par un système linéaire $P \subset |L|$, et L est ample. On compare ensuite $K_F = K_{X'}|_F$ avec $L|_F$ (F dénote la fibre générique) pour déduire la maximalité de la dimension d'Iitaka de K_F de celle de $L|_F$.

En poussant ce raisonnement un peu plus loin, on obtient quelques variantes :

Variante 4.2.2 *Soit X telle que $\kappa(X) \geq 0$, L un fibré en droites sur X, et $U \subset |L|$ un système linéaire définissant une fibration rationnelle $g : X \dashrightarrow B$. Si F est une fibre générale de g, alors*

$$\kappa(X, L) \leq dim(B) + \kappa(F) \leq dim(U) + \kappa(F).$$

Variante 4.2.3 *Soit X compacte kählérienne telle que $K_X = 0$. Soit $g : X \dashrightarrow B$ une fibration méromorphe avec B projective, et $L = \pi_*(h^*(H)) \in Pic(X)$, où H est ample sur B et h est une résolution d'indétermination. Pour F une fibre générale, $\kappa(X, L) = dim(B) + \kappa(F)$.*

Mais ce qui est surtout important pour notre problème, c'est le

Corollaire 4.2.4 *Soit X comme dans le théorème 4.2.1, et $f : X \dashrightarrow X$ un endomorphisme rationnel de degré > 1. Alors h ne préserve pas de fibration non-triviale.*

En effet, les variétés de type général ne possèdent pas d'endomorphismes rationnels de degré > 1.

Ainsi, nous avons montré que, du moins dans le cas générique ($Pic(X) = \mathbb{Z}$), l'exemple 1.12 est effectivement "nouveau", ne provenant pas de la dimension inférieure.

4.3 "Fibration dynamique" et densité d'orbites générales

Un autre résultat de [AC2] est l'existence d'une fibration méromorphe (éventuellement triviale), associée à tout endomorphisme méromorphe dominant d'une variété kählerienne compacte :

Théorème 4.3.1 *Soit X kählerienne compacte, $f : X \dashrightarrow X$ méromorphe dominant. Il existe une application méromorphe dominante $g : X \dashrightarrow T$, telle que $g \circ f = g$ et que pour $x \in X$ général, la fibre de g passant par X soit l'adhérence de Zariski de l'orbite itérée $\{f^k(x), k = 0, 1, 2, \ldots\}$.*

En appliquant la décomposition de Stein, on obtient une fibration méromorphe (éventuellement triviale) préservée par une certaine puissance de f.

Ici, "général" veut dire "en dehors d'une réunion dénombrable de fermés analytiques stricts".

L'enoncé est, bien sûr, aussi vrai dans le cadre algébrique.

Les deux cas "extrêmes" (où la fibration est "triviale") sont les suivants : (1) $dim(T) = dim(X)$, équivalent à la finitude de l'ordre de f ; et (2) $dim(T) = 0$, i.e. T est un point ; ce qui veut dire que l'orbite itérée d'un point général est Zariski dense.

Dans notre exemple 1.12, T est nécessairement un point. En effet, $deg(f) > 1$, ce qui exclut le cas $dim(T) = dim(X)$; ensuite, $0 < dim(T) < dim(X)$ est impossible par corollaire 4.2.4.

Corollaire 4.3.2 *Dans l'exemple 1.12, l'orbite itérée d'un point général est Zariski dense.*

On aimerait maintenant conclure sur la densité de points K-rationnels en choisissant $x \in X(K)$ et en considérant son orbite itérée, Zariski dense pour x général et formée des points de $X(K)$. Malheureusement, par notre définition du "général", il se peut (a priori) qu'aucun $\bar{\mathbb{Q}}$-point de X ne soit général : en effet, $\bar{\mathbb{Q}}$ est dénombrable, donc, en jetant une réunion dénombrable de fermés analytiques stricts, on risque de perdre la totalité de $X(\bar{\mathbb{Q}})$. Nous ne pouvons donc pas déduire la densité potentielle sur un corps de nombres du Théorème 4.3.1. Cependant, nous avons

Corollaire 4.3.3 *La variété des droites d'une cubique générique de dimension 4 est potentiellement dense sur tout corps non-dénombrable, par exemple, sur le corps des fonctions d'une courbe complexe.*

Notre démonstration du Théorème 4.3.1 consiste, grosso modo, à jeter toutes les "mauvaises" réunions dénombrables de fermés stricts, sur lesquels nous n'avons pas de contrôle très précis. Pour donner une certaine idée du type de "mauvaises" réunions dénombrables qu'on rencontre, signalons que le point de départ est la construction des familles de cycles f-invariants ; on jette ensuite celles qui ne sont pas couvrantes (et recouvrent donc une réunion dénombrable de fermés stricts !) et l'on démontre que, parmi celles qui restent, on peut en trouver une avec de bonnes propriétés. La clôture de Zariski $Zar(x)$ de l'orbite itérée de X n'est pas, a priori, un cycle (car elle n'est pas équidimensionnelle) ; on doit donc prendre la réunion $Z(x)$ de ses composantes de dimension maximale ; ceci nous amène à exclure, par exemple, les x tels qu'une certaine itération de f ne soit pas de rang maximal en x (pour assurer la f-invariance), ainsi que les x où une certaine itération de f n'est pas définie.

Pour l'instant, je ne sais absolument pas montrer que les réunions dénombrables définies comme ci-dessus n'épuisent pas les $\bar{\mathbb{Q}}$-points de X lorsque celle-ci est définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$.

4.4 Stabilité algébrique

Il est intéressant de calculer les invariants dynamiques de l'application f de l'exemple 1.12, notamment parce que les exemples où ils se calculent ne sont pas très nombreux. Nous avons déjà vu que les endomorphismes holomorphes sont extrêmement rares ; les endomorphismes méromorphes le sont moins, mais il surgit une difficulté pour le calcul des *degrés dynamiques* introduits à la fin de la section 1 : ces degrés décrivent le comportement asymptotique de l'action des itérées de f sur la cohomologie ; mais lorsque f est seulement rationnelle, il n'est pas en général vrai (comme il est vrai dans le cas holomorphe) que $(f^n)^* = (f^*)^n$. Nous sommes donc, en principe, forcés d'étudier les puissances f^n pour calculer les degrés dynamiques. Cette étude est, en général, difficile.

Si $(f^n)^* = (f^*)^n$ sur la cohomologie, l'application f est dite *algébriquement stable.*

D'une manière générale, la différence entre $(fg)^*$ et g^*f^* sur H^{2n} où $g : X \dashrightarrow Y$, $f : Y \dashrightarrow Z$ sont deux applications méromorphes dominantes génériquement finies, provient du fait que le produit des graphes de f et g (vus comme correspondances) $\Gamma_g \circ \Gamma_f$ peut avoir des composantes "excédentaires", autres que le graphe Γ_{fg}, se projetant sur X comme une sous-variété de codimension n. Cette sous-variété se contracterait sous g, et son image atterrirait dans une strate du lieu d'indétermination de f.

Pour une variété X de classe canonique nulle, nous avons ainsi $(fg)^* = g^*f^*$ sur $H^{1,1}(X)$ pour toutes $f, g : X \dashrightarrow X$: en effet, nul diviseur de X ne peut être contracté, par la formule de Hurwitz (appliquée a la résolution de g).

Il n'y a pas de raison générale aussi évidente pour que la même chose soit vraie sur $H^{l,l}(X)$ pour l quelconque.

Dans le cas de l'exemple 1.12, je démontre toutefois dans [A5] :

Théorème 4.4.1 *L'endomorphisme f de l'exemple 1.12 est algébriquement stable.*

Ainsi, le degré dynamique λ_k est égal au rayon spectral de f sur $H^{k,k}$; ce qui rend faisable le calcul à l'aide de quelques suites exactes. Pour ce calcul, en fait, il suffit de connaître "l'action" (ce n'est pas vraiment une action !) de f sur le sous-anneau engendré par les classes de Chern de U_X ; voici le résultat :

Théorème 4.4.2 $f^*H = 7H$; $f^*H^2 = 4H^2 + 45\Delta$ *;* $f^*\Delta = 31\Delta$ *;* $f^*H^3 = 28H^3$. *Ainsi, les degrés dynamiques valent : 7, 31, 28, 16.*

Notamment, ils sont distincts, ce qui doit, conjecturalement, assurer de bonnes propriétés d'équidistribution.

Remarquons, finalement, que pour X générique comme ci-dessus, le sous-espace des cycles algébriques dans $H^{2,2}$ est engendré sur $\mathbb{Q}$ par H^2 et Δ. Cela résulte par un argument de monodromie (dû à Deligne et utilisé par exemple dans la preuve du théorème de Noether-Lefschetz), qui est applicable puisque pour notre X, qui est une déformation du schema de Hilbert ponctuel d'une surface $K3$, $H^4(X, \mathbb{Q})$ se calcule à partir de $H^2(X, \mathbb{Q})$ qui s'identifie à $H^4(V, \mathbb{Q})$. On aura besoin de cette observation dans la section suivante.

4.5 Densité potentielle sur un corps de nombres

Cette partie est une collaboration récente avec Claire Voisin.

Nous montrons que l'exemple 1.12 est potentiellement dense sur un corps de nombres, lorsqu'il est défini sur un tel corps et "général" en un certain sens :

Théorème 4.5.1 *Il existe beaucoup de cubiques lisses V de dimension 4, définies sur un corps de nombres, dont la variété des droites $X = \mathcal{F}(V)$ est potentiellement dense, de nombre de Picard 1.*

Indiquons, en quelques mots, ce que veut dire "beaucoup" : la condition qu'on impose est analogue à celle imposée par Terasoma dans [T] pour montrer l'existence d'un X défini sur $\mathbb{Q}$ dont le nombre de Picard vaut 1 ; elle exige que l'image du groupe de Galois agissant sur certains groupes de cohomologie soit égale à l'image du groupe de monodromie algébrique.

Le théorème 4.3.1 n'est pas utilisé pour la démonstration ; le point de départ est le suivant :

Observation 4.5.2 ([V2]) *La variété des droites X d'une cubique lisse V dans $\mathbb{P}^5$ est recouverte par une famille de surfaces $\Sigma_b, b \in B$ de classe de cohomologie Δ, birationnelles à des surfaces abéliennes.*

Ceci pour la raison suivante : considérons une section hyperplane V_H ; les droites dans V_H sont paramétrées par une surface de classe de cohomologie Δ. Lorsque V_H a un point double x, cette surface est birationnelle à S^2C_x, où C_x est la courbe des droites passant par x. On calcule que $g(C) = 4$ en général ; lorsque V_H acquiert encore 2 points doubles, C_x en acquiert aussi, ce qui la rend de genre 2 ; S^2C_x devient donc birationnellement abélienne.

Considerons un X défini sur $\bar{\mathbb{Q}}$, donc sur un corps de nombres K. Il contient des surfaces $\Sigma_b, b \in B(\bar{\mathbb{Q}})$ comme ci-dessus, définies sur un corps de nombres. Les points rationnelles étant potentiellement denses sur chaque Σ_b, il suffit de montrer que les itérées par f d'au moins une parmi elles sont Zariski denses dans X.

Déjà, montrer qu'il existe une Σ_b définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et non-prépériodique (i.e. telle que ses itérées soient Zariski denses du moins dans un diviseur), présente un défi.

Considérons une désingularisation de l'espace totale de la famille $\Sigma_b, b \in B$, de sorte que la fibre au-dessus de b générique est lisse. Par abus de notation, nous allons toujours noter B la base de cette famille désingularisée ; la fibre assez générale, désingularisation de Σ_b, sera note Σ_b'. Posons $\Sigma_{b,k} = f^k(\Sigma_b)$, et de même pour $\Sigma_{b,k}'$.

Soit $A_b = Alb(\Sigma_b')$ la variété d'Albanese. C'est donc cette surface abélienne à laquelle Σ_b est birationnelle. Soit $F \subset X \times V$ la variété d'incidence. Nous montrons que pour beacoup de $b \in B$ définis sur un corps de nombres, les conditions suivantes sont satisfaites :

Conditions 4.5.3 : *(1) $End(A_b) = \mathbb{Z}$;*

(2) L'application

$$F_{b*} : CH_0(\Sigma_b')_{hom} \to CH_1(X),$$

induite par la restriction de F à Σ_b', factorise à travers la variété d'Albanese A_b ;

(3) Le morphisme de groupes $F_{b,alb} : A_b \to CH_1(X)$ qui s'en déduit, n'est pas de torsion.

La première assertion est établie par un argument similaire à celui de Terasoma [T]. La seconde est plus ou moins dans [CG]. La troisième est la plus difficile et résulte de la non-annulation d'un invariant d'Abel-Jacobi l-adique associé à une "version corrigée" de la restriction de F à Σ_b' ; voir aussi [GGP] pour un argument similaire.

Une fois qu'on a cela, on en déduit sans grande difficulté que chaque itération $\Sigma_{b,k}' = f^k(\Sigma_b')$ est birationnelle à sa variété d'Albanese $A_{b,k}$ et que l'application induite par la restriction de F

$$F_{b,k*} : CH_0(\Sigma_{b,k}')_{hom} \to CH_1(X)$$

factorise à travers $A_{b,k}$, fournissant un $F_{b,k,alb}$.

L'observation essentielle ici est la suivante : du fait que $2l + f(l)$ est constant dans $CH^3(V)$, il s'ensuit

$$F_{b,k*} \circ f^k = (-2)^k F_{b*}$$

(de même donc pour $F_{b,k,alb}$ et $F_{b,alb}$). On en déduit, de plus, que lorsque $\Sigma_{b,k}'$ est f^l-invariante (autrement dit, $\Sigma_{b,k}' = \Sigma_{b,k+l}'$), l'application induite par f^l sur $A_{b,k}$ est la multiplication par $(-2)^l$, et donc le degré de $f^l|_{\Sigma_{b,k}'}$ vaut 16^l. Mais cela veut dire que $\Sigma_{b,k}$ est l'image réciproque toute entière d'elle-même par f^l (avec multiplicité 1), puisque $deg(f) = 16$. Parce que nous avons vu dans la section précédente que 1 n'est pas une valeur propre de l'action f^* sur la partie algébrique de $H^{2,2}(X)$, et que $(f^l)^* = (f^*)^l$, nous obtenons une contradiction.

Cela montre que pour beaucoup de b sur un corps de nombres, les itérations de Σ_b sont denses du moins dans un diviseur. Supposons qu'elles ne le sont pas dans X, et soit D la clôture de Zariski de $\cup_k \Sigma_{b,k}$. Supposons D irréductible pour simplifier les notations (qui représentent la seule différence avec le cas général).

On remarque que sur la désingularisation de D, il y a un feuilletage (i.e. un sous-faisceau saturé du faisceau tangent) L de rang 1, provenant du noyau de σ_D. Les surfaces $\Sigma_{b,k}$ sont tangentes à ce feuilletage. On adapte à ce cas le théorème de Jouanolou [J] et on arrive a l'alternative suivante :

Alternative 4.5.4 *Ou bien D est (rationnellement) fibré en surfaces abéliennes sur une courbe, et les $\Sigma_{b,k}$ sont des fibres ; ou bien L fournit une fibration de D au-dessus d'une surface T, qui projette les $\Sigma_{b,k}$ sur des courbes sur T.*

Le premier cas de cette alternative est exclu à l'aide de considérations purement géométriques, notamment du résultat de [NZ], déjà cité dans la section 1, qui implique que la dimension de Kodaira de D est nulle, et du travail de Kawamata [K] qui permet d'établir un analogue de la décomposition de Bogomolov-Beauville pour les variétés de dimension 3 de dimension de Kodaira nulle.

Le second cas est encore exclu par un argument faisant intervenir des classes d'Abel-Jacobi l-adiques.

5 Quelques questions reliées

5.1 Morphismes entre variétés de Fano de dimension trois

Les variétés de Fano de dimension 3, de nombre de Picard 1, ont été classifiées par Iskovskih dans [I]. Nous avons déjà évoqué cette classification dans la section 2. Nous avons aussi évoqué un résultat de Schuhmann, disant que, peut-être à quelques rares exceptions (de nature technique) près, il n'y a pas de morphisme d'une Fano (comme ci-dessus) d'indice 2 sur une autre d'indice 1. Ces exceptions techniques sont par ailleurs levées dans [A2].

Schuhmann montre aussi que tout morphisme entre les variétés d'indice 2 est un isomorphisme (encore modulo des exceptions techniques qui sont plus tard éliminées suite à certains résultats de [A2], [A4]).

Dans [A2], je developpe le sujet en montrant que la même chose est vraie pour les morphismes entre les variétés d'indice 1, du moins celles dont le générateur ample du groupe de Picard est très ample - encore éventuellement à quelques rares exceptions près ; cette fois-ci, elles sont éliminées par Iliev and Schuhmann dans [IS], qui demontrent que ces variétés "exceptionnelles" n'existent pas - sauf une, la *variété de Mukai-Umemura*, qui peut s'exclure par des considérations numériques.

Exemple 5.1.1. Il y a des morphismes évidents $f : X \to Y$ avec Y d'indice 2 et X d'indice 1 : ce sont revêtements doubles ramifiées le long d'un diviseur anticanonique.

Il est naturel de se poser la question si ce sont tous les morphismes possibles.

Dans [A2], je donne une réponse affirmative dans beaucoup de cas. Cependant, il y a un Y pour lequel [A2] ne dit rien : il s'agit d'une section linéaire de la grassmannienne $G(1,4)$ dans le plongement de Plücker, $Y = G(1,4) \cap \mathbb{P}^6$.

Ce cas est irritant parce qu'il représente tout un "type" de variétés de Fano : la variété Y est rigide. Mais on ne peut pas le traiter comme c'est fait dans [A2]. En fait, l'argument de [A2] est la "seconde" méthode de la section 2 : on part d'un assez gros diviseur balayé par des courbes dont le fibré normal a un facteur direct négatif, on obtient une borne pour le degré de f et on constate que cette borne est tellement forte qu'elle exclut presque toutes les possibilités pour f. La "première" méthode, celle qui est fondée sur le scindage de la suite des fibrés normaux, n'est pas efficace ici car les bornes qu'elle fournit sont beaucoup trop grossières.

Le problème est que, dans le cas $Y = G(1,4) \cap \mathbb{P}^6$, le diviseur balayé par les droites "spéciales", i.e. à fibré normal $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$, n'est pas assez gros : c'est, en fait, un diviseur anticanonique, et nous ne pouvons pas garantir que les images inverses de ces droites ne sont pas entièrement contenues dans la ramification - ce qui est essentiel pour faire marcher la méthode (voir section 2).

C'est pour cela que, plusieurs années après, j'ai étudié le cas $Y = G(1,4) \cap \mathbb{P}^6$ dans [A4], qui est, en un certain sens, la suite de [A2]. J'y arrive à traiter ce cas grâce à un théorème de connexité dû à Debarre, dont voici un cas particulier :

Proposition 5.1.2 *Soit X une variété projective irréductible, et $f : X \to G(d,n)$ un morphisme. Soit Σ un cycle de Schubert de type σ_m. Si $f(X) \cdot \sigma_{m+1} \neq 0$ dans la cohomologie de $G(d,n)$, alors $f^{-1}\Sigma$ est connexe.*

On en déduit facilement que, sous un morphisme $f : X \to Y = G(1,4) \cap \mathbb{P}^6$, l'image inverse d'une droite spéciale est connexe ; tandis qu'il est facile de voir par la formule d'adjonction que l'image inverse d'une droite générique doit être une réunion disjointe de coniques. En appliquant un argument convenable sur les schémas de Hilbert (moralement, du même type que l'exemple standard de [H] d'une famille de cubiques gauches dégénérant vers une cubique singulière avec un point immergé, mais techniquement plus compliqué) et des remarques combinatoires, on arrive à exclure tous les morphismes sauf les revêtements doubles de l'exemple 5.1.1.

Combiné avec les résultats de [A2] et quelques remarques élémentaires, cela donne le résultat suivant :

Théorème 5.1.3 : *Soient X, Y, comme ci-dessus, des variétés de Fano de dimension 3 et de nombre de Picard 1, X d'indice 1, Y d'indice 2. Supposons, en outre, que les générateurs amples du groupe de Picard H_X et H_Y soient très amples. Alors tout morphisme $f : X \to Y$ est un revêtement double.*

Les cas qui restent (ceux où le générateur du groupe de Picard n'est pas très ample) peuvent vraisemblablement se traiter sans aucune idée nouvelle. Par exemple, si Y est le cône double de Veronese, on peut appliquer le lemme 2.3 plus la connaissance des nombres de Betti pour voir que X ne peut être que le revêtement de $\mathbb{P}^3$ ramifié le long d'une sextique, et que $deg(f) = 2$.

5.2 Points exceptionnels d'un endomorphisme du plan

Cette section et la suivante sont des travaux en collaboration avec F. Campana.

Soit $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ un endomorphisme. On dit que $X \subset \mathbb{P}^n$ est *complètement invariant* si $f^{-1}X = X$. On appelle *ensemble exceptionnel* de f le plus grand sous-ensemble algébrique propre complètement invariant de $\mathbb{P}^n$ (cela existe bien, voir [BrDv]). Cet ensemble est important pour la dynamique car on a de bonnes propriétés d'équidistribution exactement en dehors de l'ensemble exceptionnel.

Soit E l'ensemble exceptionnel. Il est facile de voir à l'aide de la formule d'Hurwitz que lorsque E contient une hypersurface, le degré de celle-ci est au plus $n+1$. Cette borne est bien optimale : elle est atteinte par l'application f qui élève chacune des coordonnées à la puissance d-ième. Que peut-on dire des composantes de E de codimension supérieure ? Par exemple, lorsque $n = 2$, est-il vrai que le nombre de points totalement invariants de f est borné par une constante ? Il est bien clair qu'il est borné en fonction du degré de f, puisque ces points sont singuliers sur le diviseur de ramification ; mais, de plus, on ne connaît, semble-t-il, aucun exemple avec plus de 3 points complètement invariants, ce qui suggère que du moins il y a une borne ne dépendant pas de $deg(f)$.

Avec F. Campana, nous l'avons démontré ; malheureusement nous n'arrivons pas à prouver que le nombre de points complètement invariants est ≤ 3. Appellons $p \in \mathbb{P}^2$ un point de ramification totale si $f^{-1}(p)$ est supporté en un point.

Théorème 5.2.1 ([AC1]) *Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ un endomorphisme de degré > 1. Alors f a au plus 9 points de ramification totale. Il n'y a pas de droite passant par 3 d'entre eux, ni de conique passant par 6. Si f a 9 points de ramification totale, ils sont contenus dans une seule cubique, et elle est singulière en un de ces points.*

L'idée est de considérer les courbes de petit degré passant par beaucoup de ces points ; s'il y a trop de points de ramification totale, on obtient une contradiction en calculant le genre de l'image reciproqie d'une telle courbe et en comparant les résultats obtenus par la formule de Hurwitz avec ceux que donne la formule d'adjonction. Les singularités des courbes et surtout de leur image inverse introduisent quelques difficultés, mais celles-ci se résolvent à l'aide de calculs explicites (en coordonnées locales) du faisceau dualisant.

Dans ce même article, nous avons généralisé le théorème 5.2.1 comme suit :

Théorème 5.2.2 *Soit $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ un endomorphisme de degré > 1. Alors le nombre des sous-espaces projectifs complètement invariants de codimension 2 pour f est au plus $4(n+1)^2$.*

La raison pour regarder seulement les sous-espaces linéaires au lieu de sous-ensembles algébriques de codimension 2 quelconques est [BrCS] qui affirme que toute composante irréductible de l'ensemble exceptionnel est linéaire. En tout cas, la preuve du théorème se généralise sans peine au cas de sous-ensembles de codimension 2, fournissant une borne pour le degré.

Remarquons finalement que la borne ne devrait pas être optimale (le "meilleur" exemple est encore l'élévation des coordonnées à une puissance, qui fournit $n(n+1)/2$ sous-espaces). Du moins, la puissance de n que nous avons trouvé est la bonne !

5.3 Fibrations sur une variété symplectique

Il s'agit, ici, d'une partie de [AC2].

L'exemple 1.12 est holomorphe symplectique irréductible ; nous avons montré que dans le cas générique (disons $Pic(X) = \mathbb{Z}$), toute fibration méromorphe de X est en variétés de type général. Il est naturel d'essayer de comprendre quelles fibrations méromorphes peuvent se produire dans le cas non-générique. Pour que la question ait du sens, il faut imposer des restrictions, par exemple, sur les fibres. Puisque nous étions intéressés par les endomorphismes, nous avons étudié les fibrations dont la fibres générique n'est pas de type général. Par la fibration d'Iitaka, on se réduit au cas $\kappa(F) = 0$ (où F désigne la fibre générique).

Soit L le fibré en droites dont un système de sections donne une fibration $g : X \dashrightarrow B$, B projective. Nous remarquons d'abord :

Proposition 5.3.1 *F n'est pas de type général si et seulement si $L^{dim(X)} = 0$ (donc si et seulement si $q(L) = 0$, où q est la forme de Beauville-Bogomolov sur X symplectique).*

La question est donc liée à la "conjecture lagrangienne", qui dit que L nef avec $q(L) = 0$ doit fournir une fibration lagrangienne (eventuellement quitte à l'élever à une puissance), et, dans ses certaines versions, qu'une puissance de L, $q(L) = 0$, non nécéssairement nef et non-trivial doit le faire après des flops.

Matsushita [M1] a montré, d'abord, que si L tel que $q(L) = 0$ fournit une application *holomorphe*, alors c'est une fibration lagrangienne ; ensuite (quelques mois après la mise en circulation de [AC2]), qu'un L nef dont la *dimension nef* n'est pas maximale, fournit une fibration lagrangienne ([M2]).

Notre résultat principal dans cette direction est la généralisation de [M1] au cas méromorphe en dimension 4 ; d'un point de vue légérement différente, c'est la conjecture lagrangienne en dimension 4 modulo l'existence d'un faisceau de sections :

Théorème 5.3.2 *Soit X hyperkählerienne irréductible projective de dimension 4, et $f : X \dashrightarrow B$ une fibration à fibre générique de dimension de Kodaira nulle. Alors f possède un modèle holomorphe, à un flop près. En particulier, la fibre générique est lagrangienne, birationnelle à une surface abelienne.*

La preuve utilise de la théorie de modèles minimaux, et en particulier le résultat de Wierzba disant qu'on peut, à l'aide d'une suite finie de flops de Mukai, rendre nef tout diviseur sans composante fixe sur une variété symplectique de dimension 4.

6 Quelques conclusions et perspectives

Une première conclusion est que les endomorphismes réguliers sont beaucoup trop rares pour être vraiment intéressants, que ce soit du point de vue de la classification des variétés algébriques, ou du point de vue d'applications possibles. Les endomorphismes rationnels, ou méromorphes, sont beaucoup plus prometteurs ; mais il est très difficile d'établir, par exemple, leur (non)existence. Le cas de la surface $K3$ générique est bien un défi majeur. Il serait aussi très intéressant de produire des exemples ou de montrer la non-existence d'endomorphismes pour d'autres familles de variétés de classe canonique triviale, notamment en petite dimension.

Un autre problème concerne la densité potentielle : bien qu'on dispose maintenant d'exemples de variétés simplement connexes, de classe canonique nulle, de nombre de Picard 1 et potentiellement denses sur un corps de nombres, la démonstration de la densité potentielle est très spécifique au cas concret de la variété des droites d'une cubique dans $\mathbb{P}^5$, utilisant, à la fois, l'endomorphisme, la forme symplectique et le recouvrement par des surfaces birationnellement abeliennes. On pourrait essayer de trouver une démonstration plus universelle. Par exemple, obtenir plus de contrôle sur les "mauvaises" réunions dénombrables de fermés dont on a parlé en discutant le théorème 4.3.1, pour tenter d'adapter la preuve de [AC2] au cas dénombrable.

Une question très générale et aussi très vague est la suivante : quelle est la "différence" entre les réunions dénombrables de fermés arbitraires et les réunions qui apparaissent "naturellement" du point de vue arithmético-géométrique, par exemple, en tant qu'itérations d'un seul fermé par une application (d'ordre infini) définie sur un corps de nombres ? Est-il vrai que le plus souvent, ces réunions "naturels" n'epuisent pas tous les points rationnels ? On pourrait probablement tenter de chercher une partie de la réponse du côté de la théorie de modèles.

Lorsque l'application en question est regulière, on obtient une certaine information sur ce type de questions en utilisant la théorie de hauteurs, plus particulièrement, les hauteurs canoniques. Cette théorie n'est pas, en général, applicable aux endomorphismes rationnels. Mais peut-être peut-on l'adapter à des situations particulières ?

Pendant ces dernieres années, un progrès énorme a été fait dans la théorie de modèles minimaux, grâce aux travaux de C. Hacon, J. McKernan et d'autres. Ce progrès facilite probablement l'étude de fibrations de variétés symplectiques et d'autres questions liées ; bien que le défi principal - produire des sections d'un fibré nef et Beauville-Bogomolov isotrope - est difficile et semble nécessiter l'usage essentiel de méthodes analytiques (autant qu'algébro-géométriques).

Références

[A1] E. Amerik : On morphisms onto quadrics, Math. Notes 81 no. 4 (2007), 549-552.

[A2] E. Amerik : Maps onto certain Fano threefolds, Documenta Math. 2 (1997), 195–211

[A3] E. Amerik : On endomorphisms of projective bundles, Manuscripta Math. 111 (2003), no. 1, 17–28.

[A4] E. Amerik : Some remarks on morphisms between Fano threefolds. Doc. Math. 9 (2004), 471–486

[A5] E. Amerik : A computation of invariants of a rational self-map, prépublication

[AC1] E. Amerik, F. Campana : Exceptional points of an endomorphism of the projective plane. Math. Z. 249 (2005), no. 4, 741–754.

[AC2] E. Amerik, F. Campana : Fibrations méromorphes sur certaines variétés à fibré canonique triviale, à paraître dans le volume pour les 60 ans de F. A. Bogomolov, arXiv : math.AG/0510299.

[ARV] E. Amerik, M. Rovinsky et A. Van de Ven : A boundedness theorem for morphisms between threefolds. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 49 (1999), no. 2, 405–415.

[AV] E. Amerik, C. Voisin : Potential density of rational points on the variety of lines of a cubic fourfold, prépublication.

[B] A. Beauville : Endomorpisms of hypersurfaces and other manifolds. Internat. Math. Res. Notices 2001, no. 1, 53–58.

[BD] A. Beauville, R. Donagi : La variété des droites d'une hypersurface cubique de dimension 4, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 301 (1985), no. 14, 703–706.

[Br] R. Braun : On the normal bundle of Cartier divisors on projective varieties. Arch. Math. (Basel) 59 (1992), no. 4, 403–411.

[BT] F. Bogomolov, Y. Tschinkel : Density of rational points on elliptic $K3$ surfaces. Asian J. Math. 4 (2000), no. 2, 351–368.

[BrDv] J.-Y. Briend, J. Duval : Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, Publ. Math. IHES., 93, p. 145-159, 2001.

[BrCS] J-Y. Briend, S. Cantat, M. Shishikura : Linearity of the exceptional set for maps of $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, Math. Ann. 330 (2004), 39-43.

[C] F. Campana : Orbifolds, special varieties and classification theory, Ann. Inst. Fourier 54 (2004), no. 3, 499–630.

[CGGH] J. Carlson, M. Green, Ph. Griffiths, J. Harris : Infinitesimal variations of Hodge structures, Compositio Math., 50 (1983).

[CG] H. Clemens, Ph. Griffiths : The intermediate Jacobian of the cubic threefold. Ann. of Math. (2) 95 (1972), 281–356.

[D] Th. Dedieu : Severi varieties and rational self-maps of K3 surfaces, arXiv :0704.3163

[Dr] S. Druel, Structures de contact sur les variétés toriques, Math. Ann. 313 (1999), no. 3, 429–435.

[DS] T. C. Dinh, N. Sibony : Une borne supérieure pour l'entropie topologique d'une application rationnelle, Annals of Maths. 161 (2005), 1637-1644.

[EPGS] G. Ellingsrud, L. Gruson, C. Peskine, S. Stromme : On the normal bundle of curves on smooth projective surfaces. Invent. Math. 80 (1985), no. 1, 181–184.

[EL] L. Ein, R. Lazarsfeld : Syzygies and Koszul cohomologies of smooth projective varieties, Inv. Math. 111 (1993), 53-67.

[G] V. Guedj : Propriétés ergodiques des applications rationnelles, arxiv :math.CV/0611302

[GGP] M. Green, Ph. Griffiths, K. Paranjape : Cycles over fields of transcendence degree 1. Michigan Math. J. 52 (2004), no. 1, 181–187.

[H] R. Hartshorne, Algebraic geometry.

[HT] B. Hassett, Y. Tschinkel : Potential density of K3 surfaces over function fields, arxiv :math.AG/0604222

[I] V. A. Iskovskih : Fano threefolds I,II. Math. USSR Izv. 11 (1977), 485–527, et 12 (1978), 469-506.

[IS] A. Iliev, C. Schuhmann : Tangent scrolls in prime Fano threefolds, Kodai Math. J. 23 (2000), no.3, 411-431.

[J] J.-P. Jouanolou, Hypersurfaces solutions d'une équation de Pfaff analytique. Math. Ann. 232 (1978), no. 3, 239–245.

[K] Y. Kawamata : Minimal models and the Kodaira dimension of algebraic fiber spaces. J. Reine Angew. Math. 363 (1985), 1–46.

[KO1] S. Kobayashi, T. Ochiai : Meromorphic mappings onto compact complex spaces of general type. Invent. Math. 31 (1975), no. 1, 7–16.

[KO2] S. Kobayashi, T. Ochiai : Characterizations of complex projective spaces and hyperquadrics. J. Math. Kyoto Univ. 13 (1973), 31–47.

[Kob] S. Kobayashi : Differential geometry of complex vector bundles, Princeton Univ. Press, 1987.

[L] R. Lazarsfeld : Some applications of the theory of positive vector bundles, Springer Lecture Notes 1092, 29-61.

[M1] D. Matsushita, On fibre space structures of a projective irreducible symplectic manifold, Topology 38 (1999)

[M2] D. Matsushita, On nef-reductions of projective irreducible symplectic manifolds, prépublication math.AG/0601114

[N] N. Nakayama : Ruled surfaces with non-trivial surjective endomorphisms. Kyushu J. Math. 56 (2002), no. 2, 433–446.

[NZ] N. Nakayama, D.-Q. Zhang : Building blocks of étale endomorphisms of complex projective manifolds, RIMS preprint no. 1577, www.kurims.kyoto-u.ac.jp/preprint/file/RIMS1577.pdf

[PS] K. Paranjape, V. Srinivas : Self-maps of homogeneous spaces, Invent. Math. 98 (1989), 425-444.

[P] K. Peters : Über holomorphe und meromorphe Abbildungen gewisser kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten. Arch. Math. 15 1964 222–231.

[RS] A. Russakovskij, B. Shiffman : Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics. Indiana Univ. Math. J. 46 (1997), no. 3, 897–932.

[RV] R. Remmert, A. Van de Ven : Zwei Sätze über die komplex-projektive Ebene, Nieuw Archief voor de Wiskunde (3), VIII, 147-157 (1960).

[Sch1] C. Schuhmann, Mapping threefolds onto three-quadrics, Math. Ann. 306 (1996), no. 3, 571–581.

[Sch2] C. Schuhmann, Morphisms between Fano threefolds. J. Algebraic Geom. 8 (1999), no. 2, 221–244.

[T] T. Terasoma : Complete intersections with middle Picard number 1 defined over $\mathbb{Q}$, Math. Z. 189 (1985), no. 2, 289–296.

[V1] C. Voisin, Intrinsic pseudo-volume forms and K-correspondences. The Fano Conference, 761–792, Univ. Torino, Turin, 2004.

[V2] C. Voisin, On some problems of Kobayashi and Lang ; algebraic approaches. Current developments in mathematics, 2003, 53–125, Int. Press, Somerville, MA, 2003.