Calcul des prédicats - Théorie des modèles

(Notes complémentaires 2)

Résumé des premières définitions et résultats vus en cours.

On ne considère que des langages égalitaires, et on s'autorise à écrire = à la fois pour le symbole du langage $R_=$ et pour son interprétation dans une structure.

1 Morphismes - Extensions élémentaires

1.1 Premières définitions et rappels

Soient $\mathcal{L}$ un langage, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures et h une application de M dans N. L'application h est un **$\mathcal{L}$-homomorphisme** de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ si h vérifie:

– (1) pour tout symbole c de constante de $\mathcal{L}$, $h(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$,

– (2) pour tout symbole f de fonction de $\mathcal{L}$, d'arité k, pour tout $(m_1, \ldots, m_k) \in M^k$, $h(f^{\mathcal{M}}(m_1, \ldots, m_k)) = f^{\mathcal{N}}(h(m_1), \ldots, h(m_k))$.

– (3) pour tout symbole R de relation de $\mathcal{L}$, d'arité k, pour tout $(m_1, \ldots, m_k) \in M^k$, si $(m_1, \ldots, m_k) \in R^{\mathcal{M}}$, alors $(h(m_1), \ldots, h(m_k)) \in R^{\mathcal{N}}$.

L'application h est un **$\mathcal{L}$-plongement** de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ si h est un $\mathcal{L}$-homomorphisme et satisfait en plus que pour tout symbole R de relation de $\mathcal{L}$, d'arité k, pour tout $(m_1, \ldots, m_k) \in M^k$, $(m_1, \ldots, m_k) \in R^{\mathcal{M}}$, **si et seulement si** $(h(m_1), \ldots, h(m_k)) \in R^{\mathcal{N}}$.

Proposition 1 *Soit h un $\mathcal{L}$-plongement de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$.*

–(i) h est injectif.

–(ii) Pour toute formule $\phi(v_0, \ldots, v_n)$ de $\mathcal{L}$, **sans quantificateurs***, pour tout $(m_0, \ldots, m_n) \in M^{n+1}$, $\mathcal{M} \models \phi(m_0, \ldots, m_n)$ ssi $\mathcal{N} \models \phi(h(m_0), \ldots, h(m_n))$.*

Remarque: un $\mathcal{L}$-homomorphisme injectif n'est pas forcément un $\mathcal{L}$-plongement. C'est le cas si le langage $\mathcal{L}$ ne comprend pas de symbole de relation autre que l'égalité, mais si on considère le langage $\mathcal{L}$ d'une relation binaire, et les deux $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{M}_1 = <\mathbb{Z}, \equiv_6>$ et $\mathcal{M}_2 = <\mathbb{Z}, \equiv_3>$, où $\equiv_n$ est la congruence modulo n, alors l'identité est un $\mathcal{L}$-homomorphisme bijectif de $\mathcal{M}_1$ dans $\mathcal{M}_2$ mais n'est pas un $\mathcal{L}$-plongement.

Définition L'application h est un **$\mathcal{L}$-plongement élémentaire** si pour toute formule $\psi(v_0, \ldots, v_n)$ de $\mathcal{L}$, et pour tout $(m_0, \ldots, m_n) \in M^{n+1}$,

$$\mathcal{M} \models \psi(m_0, \ldots, m_n) \text{ ssi } \mathcal{N} \models \psi(h(m_0), \ldots, h(m_n)).$$

On écrit $\mathcal{M} \preceq_{\mathcal{L}} Nmod$.

Exemple: Considérons les deux structures $\mathcal{M} =< \mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq >$ et $\mathcal{N} =< \mathbb{N}, \leq >$ dans le langage $\mathcal{L}$ avec un symbole de relation binaire.

L'identité $i : \mathbb{N} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{N}$ est un $\mathcal{L}$-plongement mais n'est pas un $\mathcal{L}$-plongement élémentaire: en effet les conditions de la définition d'un $\mathcal{L}$-plongement sont satisfaites, il faut et il suffit que i préserve l'égalité et la relation d'ordre. Mais si on considère la formule $\psi(v) = \forall w \; v \leq w$, on a:

$$\mathcal{M} \models \psi(1) \text{ mais } \mathcal{N} \models \neg\psi(1).$$

En revanche si on considère $h : \mathbb{N} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{N}$, définie par $h(n) = n - 1$, alors pour la formule $\psi(v)$ donnée au-dessus on a bien que:

$$\mathcal{M} \models \psi(1) \text{ et } \mathcal{N} \models \psi(h(1)).$$

En fait ce deuxième plongement h est, lui, élémentaire, comme le dit la proposition suivante:

Proposition 2 *Soit h un $\mathcal{L}$-plongement de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ qui est surjectif, alors h est un plongement élémentaire.*

Définition: Un $\mathcal{L}$-plongement surjectif est appelé un **$\mathcal{L}$-isomorphisme**. Un $\mathcal{L}$-isomorphisme de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$ est appelé un **$\mathcal{L}$-automorphisme** de $\mathcal{M}$.

On rappelle que si $M \subset N$, $\mathcal{M}$ est une $\mathcal{L}$-sous-structure de $\mathcal{N}$ ssi l'inclusion est un $\mathcal{L}$-plongement, noté $\mathcal{M} \subset_{\mathcal{L}} \mathcal{N}$.
On dit que $\mathcal{M}$ est une **sous-structure élémentaire** de $\mathcal{N}$ (ou que $\mathcal{N}$ est une **extension élémentaire** de $\mathcal{M}$) si l'inclusion est un $\mathcal{L}$-plongement élémentaire (noté $\mathcal{M} <_{\mathcal{L}} \mathcal{N}$).

1.2 Critère de Tarski-Vaught

Proposition 3 (Critère de Tarski-Vaught) *Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-sous-structure de $\mathcal{N}$. Alors $\mathcal{M}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$ si et seulement si, pour tout $n \geq 0$, pour toute formule $\phi(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n)$ de $\mathcal{L}$, pour tous $a_0, \ldots, a_{n-1} \in M$,*

$$\text{si } \mathcal{N} \models \exists v_n \; \phi(a_0, \ldots, a_{n-1}, v_n), \text{ alors il existe } b \in M \text{ tel que } \mathcal{N} \models \phi(a_0, \ldots, a_{n-1}, b).$$

On a en fait un petit peu plus fort, et c'est souvent sous cette deuxième forme que l'on va utiliser le critère:

Corollaire 4 (Tarski-Vaught bis) *Soit $\mathcal{N}$ une $\mathcal{L}$-structure et $A \subset N$ tel que pour toute formule $\phi(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n)$ de $\mathcal{L}$, pour tous $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$,*

$$\text{si } \mathcal{N} \models \exists v_n \; \phi(a_0, \ldots, a_{n-1}, v_n), \text{ alors il existe } b \in A \text{ tel que } \mathcal{N} \models \phi(a_0, \ldots, a_{n-1}, b),$$

alors, A est l'ensemble de base d'une $\mathcal{L}$-sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$.

Démonstration : Il suffit de vérifier que A est l'ensemble de base d'une $\mathcal{L}$-sous-structure, c'est-à-dire que A contient les interprétations des constantes dans $\mathcal{N}$ et est clos pour les fonctions de $\mathcal{L}$.
Soit c un symbole de constante, et $\phi(v_0)$ la formule $v_0 = c$. Alors $\mathcal{N} \models \exists v_0 \phi(v_0)$. Par la propriété de A, on doit donc avoir qu'il existe $a \in A$ tel que $\mathcal{N} \models \phi(a)$, c'est-à-dire, que dans N, on $a = c^{\mathcal{N}}$.
Maintenant si f est un symbole de fonction d'arité k, soient $a_1, \dots a_k \in A$. Soit $\psi(v_1, \dots, v_k, w)$ la formule $f(v_1, \dots, v_k) = w$. Alors $\mathcal{N} \models \exists w\, \psi(a_1, \dots, a_k, w)$. Par hypothèse il doit donc exister $b \in A$ tel que $\mathcal{N} \models \psi(a_1, \dots, a_k, b)$, c'est-à-dire $f^{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_k) = b$. $\square$

2 Élémentaire équivalence - Théories complètes

Attention: la définitions de "théorie" que j'ai choisie de donner cette année n'est pas la plus communément admise. On peut trouver dans les ouvrages de logique deux variantes: soit une théorie est simplement un ensemble d'énoncés, soit parfois c'est un ensemble d'énoncés qui est clos pour la déduction sémantique.

Définition: **1.** Un ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}$ (= formules sans variables libres) est **consistant** ou **satisfaisable** si il a un modèle. Sinon on dit qu'il est **inconsistant** .
2. Une **théorie** de $\mathcal{L}$ est un ensemble d'énoncés consistant.

Si T est une théorie de $\mathcal{L}$, on note $Cons(T)$, l'ensemble des conséquences de T, l'ensemble des énoncés σ de $\mathcal{L}$ tels que $T \vdash \sigma$.

Définition: Soient $\mathcal{L}$ un langage, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures. On dit que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont **élémentairement équivalents**, noté $\mathcal{M} \equiv_{\mathcal{L}} \mathcal{N}$, si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ satisfont exactement les mêmes énoncés (= formules sans variables libres) de $\mathcal{L}$, c'est-à-dire si, pour tout énoncé σ de $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{M} \models \sigma \text{ si et seulement si } \mathcal{N} \models \sigma.$$

En particulier, si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont $\mathcal{L}$-isomorphes, alors $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont élémentairement équivalents. Plus généralement s'il existe un $\mathcal{L}$-plongement élémentaire de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$, alors $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont élémentairement équivalents.

Comme on le verra un peu plus loin, dès que $\mathcal{M}$ est infinie, il existe $\mathcal{N}$ qui lui est élémentairement équivalente mais qui ne lui est pas isomorphe. Ce n'est en revanche pas le cas pour les structures finies :

Proposition 5 *(Exercice - voir TD) Soit $\mathcal{L}$ un langage fini, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures élémentairement équivalentes. Si M, l'ensemble de base de $\mathcal{M}$ est fini, alors $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont $\mathcal{L}$-isomorphes.*

Définition: Soient $\mathcal{L}$ un langage et T une théorie de $\mathcal{L}$. On dit que la théorie T est **complète** si, pour tous modèles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de T, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont élémentairement équivalents.

Proposition 6 *(Exercice) Soit T une théorie de $\mathcal{L}$, alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *T est complète,*
2. *pour tout énoncé σ de $\mathcal{L}$, $T \vdash \sigma$ si et seulement si il existe un modèle de T qui satisfait σ,*
3. *pour tout énoncé σ de $\mathcal{L}$, $T \vdash \sigma$ ou bien $T \vdash \neg\sigma$.*

Si $\mathcal{M}$ est une $\mathcal{L}$-structure, alors la théorie suivante, appelée **Théorie de la structure** $\mathcal{M}$ est complète:

$$Th(\mathcal{M}) = \{\sigma; \sigma \text{ énoncé de } \mathcal{L} \text{ tel que } \mathcal{M} \models \sigma\}.$$

3 Premiers théorèmes de Löwenheim-Skolem et applications

On rappelle que la cardinalité d'un langage $\mathcal{L}$, notée $||\mathcal{L}||$ est la cardinalité de l'ensemble des formules du langage $\mathcal{L}$, et est donc égale à $sup(\aleph_0, |\mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}|)$.

On appellera cardinalité de la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$, et on notera $|\mathcal{M}|$, la cardinalité de l'ensemble de base, M, de la structure $\mathcal{M}$.

Voici une première application directe du critère de Tarski-Vaught:

Proposition 7 (Löwenheim-Skolem descendant) *Soient $\mathcal{L}$ un langage, $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure infinie et X un sous-ensemble de M. Il existe $\mathcal{N} =< N, ... >$, sous-structure élémentaire de $\mathcal{M}$, telle que :*
- *$X \subseteq N$*
- *N est de cardinalité inférieure ou égale au sup de la cardinalité de X et de $||\mathcal{L}||$.*

Preuve (donnée en cours): on construit $\mathcal{N}$ "à la main" et on utilise le critère de Tarski-Vaught (Corollaire .4) pour montrer que $\mathcal{N}$ est bien une sous-structure élémentaire de $\mathcal{M}$.

Corollaire 8 *(i) Si T est une théorie dans un langage dénombrable, alors T a un modèle dénombrable.*

(ii) Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure de cardinalité supérieure ou égale à $||\mathcal{L}||$. Alors pour chaque cardinalité β, $||\mathcal{L}|| \leq \beta \leq |\mathcal{M}|$, $\mathcal{M}$ a une $\mathcal{L}$-sous-structure élémentaire de cardinalité égale à β.

Applications:

Corollaire 9 *Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et T une théorie de $\mathcal{L}$ dont tous les modèles dénombrables sont infinis et $\mathcal{L}$-isomorphes. Alors la théorie T est complète.*

On a vu qu'on peut ainsi montrer que les théories suivantes sont complètes:

– dans le langage $\mathcal{L}_\emptyset$, réduit à l'égalité, la théorie $T_0 = \{\theta_n ; n \geq 1\}$ où

$$\theta_n = \exists v_0 \ldots \exists v_n (\bigwedge_{0 \leq i < j \leq n} v_i \neq v_j .$$

– dans le langage $\mathcal{L} = \{R\}$, où R est un symbole de relation binaire, la théorie des ordres denses sans extrémités.