Calcul des prédicats - Théorie des modèles

(Notes complémentaires 3)

Les conventions de notation sont les mêmes que dans les notes précédentes On continue la numérotation des sections et des propositions en suivant celle des notes n°2.

4 Théorème de compacité et applications

4.1 Théorème de compacité

On admet provisoirement le théorème de compacité, dont la démonstration sera donnée après le théorème de complétude.

Théorème 10 (Théorème de compacité du calcul des prédicats)
Soient $\mathcal{L}$ un langage et Σ un ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}$. Alors Σ est satisfaisable (= a un modèle) si et seulement si tout sous-ensemble fini de Σ est satisfaisable.

On en déduit:

Corollaire 11 *Soient $\mathcal{L}$ un langage et Σ un ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}$.*
1. Σ est inconsistant si et seulement si il existe un sous-ensemble fini de Σ qui est inconsistant.
2. Si σ est un énoncé de $\mathcal{L}$, $\Sigma \vdash \sigma$ si et seulement si il existe $F \subseteq \Sigma$, F fini tel que $F \vdash \sigma$.

4.2 Premières applications de la compacité

Rappels de définitions: Soient $\mathcal{L}$ un langage et K une classe de $\mathcal{L}$-structures. On dit que la classe K est **axiomatisable** s'il existe une théorie T de $\mathcal{L}$ telle que, pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{M} \in K \text{ ssi } \mathcal{M} \models T.$$

On dit alors que T **axiomatise** la classe K. On dit que la classe K est **finiment axiomatisable** s'il existe un ensemble fini F d'énoncés qui axiomatise K. On dit qu'une théorie T est finiment axiomatisable si la classe des modèles de T, $MOD(T) = \{\mathcal{M} : \mathcal{M} \models T\}$, est finiment axiomatisable

Lemme 12 (exercice *important*) *Si T axiomatise la classe K, alors K est finiment axiomatisable si et seulement si il existe un sous-ensemble fini T' de T tel que T' axiomatise K.*

Proposition 13 *Soient $\mathcal{L}$ un langage et T une théorie de $\mathcal{L}$ qui a des modèles finis de cardinalités arbitrairement grandes. Alors T a un modèle infini.*

Les classes de structures suivantes sont axiomatisables mais non finiment axiomatisables:
- les ensembles infinis (dans le langage réduit à l'égalité);
- les corps de caracteristique zéro, dans le langage habituel des anneaux.

Les classes de structures suivantes ne sont pas axiomatisables:
- les ensembles finis;
- les corps de caractéristique strictement positive;
- les corps ordonnés archimédiens.

On a aussi vu: 1. Si σ est un énoncé du langage des anneaux, $\mathcal{L}_{ANN} = \{0, 1, +, ., -\}$, qui est vrai dans tous les corps de caractéristique zéro, alors, il existe un nombre premier q tel que σ est vrai dans tous les corps de caractéristique supérieure ou égale à q.
2. Si σ est un énoncé du langage des anneaux qui est vrai dans des corps de caractéristique arbitrairement grande, alors il existe un corps de caractérisitique zéro dans lequel σ est vrai.

4.3 Modèles en chaque cardinalité

On peut maintenant, grâce au théorème de compacité, obtenir des modèles de cardinalités arbitrairement grandes:

Lemme 14 *Si T est une théorie de $\mathcal{L}$ qui a un modèle infini, alors pour chaque cardinal κ, $\kappa \geq ||\mathcal{L}||$, T a un modèle de cardinalité supérieure ou égale à κ.*

En utilisant le théorème de Löwenheim-Skolem descendant, on peut être plus précis:

Corollaire 15 (Löwenheim-Skolem ascendant) *Si T est une théorie de $\mathcal{L}$ qui a un modèle infini, alors T a un modèle en chaque cardinalité κ supérieure ou égale à la cardinalité du langage $\mathcal{L}$.*

Preuve (donnée en cours) : On applique d'abord le lemme 14, qui donne un modèle $\mathcal{N}$ de cardinalité supérieure ou égale à κ. Si $\mathcal{N}$ est de cardinalité strictement supérieure à κ, soit $X \subset N$, un sous-ensemble de cardinalité égale à κ. Le corollaire 8 fournit alors une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$ contenant X et de cardinalité également égale à κ.

4.4 Catégoricité et Théorème de Vaught

Cela nous permet de généraliser le corollaire 9.

Définition: Soient $\mathcal{L}$ un langage, T une théorie de $\mathcal{L}$ et κ un cardinal infini. On dit que la théorie T est *κ-catégorique* si tous les modèles de T de cardinalité κ sont $\mathcal{L}$-isomorphes.

Exemples:

- la théorie des ensembles infinis dans le langage $\mathcal{L}_\emptyset$ réduit à l'égalité est κ-catégorique pour tout cardinal κ infini.

- La théorie des ordres denses sans premier ni dernier élément, dans le langage avec une relation binaire, interprétée par la relation d'ordre, est $\aleph_0$-catégorique ($\aleph_0$ est la cardinalité des ensembles dénombrables.)

- Le type d'isomorphisme d'un corps algébriquement clos de caractéristique p (où $p = 0$ ou bien p est un nombre premier) est déterminé par la cardinalité d'une base de transcendence sur le corps premier. Il suit que la théorie (dans le langage $\mathcal{L}_{ANN}$) des corps algébriquement clos de caractéristique fixée p n'est pas $\aleph_0$-catégorique mais est κ-catégorique pour tout cardinal κ non dénombrable.

Grâce aux théorèmes de Löwenheim-Skolem, on peut voir que si une théorie est catégorique en un cardinal, alors elle est complète:

Proposition 16 (Théorème de Vaught) *Soient $\mathcal{L}$ un langage et T une théorie de $\mathcal{L}$ dont tous les modèles sont infinis. Si T est κ-catégorique pour un cardinal κ supérieur ou égal à la cardinalité du langage $\mathcal{L}$, alors T est complète.*

On en déduit que la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique fixée p, dans le langage $\mathcal{L}_{ANN}$, est une théorie complète.
(On avait déjà vu dans la section 3 que la théorie des ensembles infinis dans $\mathcal{L}_\emptyset$, et la théorie des ordres denses sans extrémités, dans le langage avec une relation binaire, sont des théories complètes).

5 Méthode des diagrammes

En fait on souhaite obtenir, à partir d'une $\mathcal{L}$-structure infinie quelconque, $\mathcal{M}$, des extensions élémentaires en chaque cardinalité supérieure à celle de $\mathcal{M}$.

Pour cela, on va appliquer la compacité mais à un langage enrichi.

Soient $\mathcal{L}$ un langage, $\mathcal{M} =< M, ... >$ une $\mathcal{L}$-structure.

Définitions:1. Soit $A \subset M$, on note $\mathcal{L}(A)$ le langage $\mathcal{L} \cup \{c_a; a \in A\}$ où chaque c_a est un nouveau symbole de constante.

On enrichit canoniquement la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ en une $\mathcal{L}(A)$-structure en interprétant dans M chaque nouveau symbole de constante c_a par l'élément a lui-même. Si $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ est une formule de $\mathcal{L}$ avec n variables libres, on écrit $\phi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$, pour désigner l'énoncé de $\mathcal{L}(A)$ obtenu en substituant à chaque occurence libre de la variable v_i le symbole de constante c_{a_i}. Par définition de la satisfaction, il y a équivalence entre:

$$\mathcal{M} \models \phi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \text{ en tant que } \mathcal{L}(A)\text{-structure },$$

$$\text{et } \mathcal{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \text{ en tant que } \mathcal{L}\text{-structure }.$$

On appelle **langage associé à la $\mathcal{L}$-structure** $\mathcal{M}$ le langage

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L} \cup \{c_m \ ; \ m \in M\}.$$

On appelle **Diagramme** de $\mathcal{M}$, ou **Diagramme simple** de $\mathcal{M}$, la théorie suivante dans le langage $\mathcal{L}(\mathcal{M})$:
$Diag(\mathcal{M}) = \{\phi(c_{m_1}, \ldots, c_{m_n}) \ ; \ \phi(v_1, \ldots, v_n)$ formule sans quantificateurs de $\mathcal{L}$ telle que $\mathcal{M} \models \phi(m_1, \ldots, m_n)\}$.
On appelle **Diagramme élémentaire** de $\mathcal{M}$, la théorie suivante dans le langage $\mathcal{L}(\mathcal{M})$:
$Diag_{el}(\mathcal{M}) = \{\phi(c_{m_1}, \ldots, c_{m_n}) \ ; \ \phi(v_1, \ldots, v_n)$ formule de $\mathcal{L}$ telle que $\mathcal{M} \models \phi(m_1, \ldots, m_n)\}$.

Proposition 17 *Soient $\mathcal{L}$ un langage, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures, et h une application de M dans N. On enrichit $\mathcal{N}$ en une $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-structure en posant, pour chaque m dans M, ${c_m}^{\mathcal{N}} = h(m)$.*

1. Si h est un $\mathcal{L}$-plongement de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$, alors

$$\mathcal{N} \models Diag(\mathcal{M}) \text{ en tant que } \mathcal{L}(\mathcal{M})\text{-structure.}$$

2. Si h est un $\mathcal{L}$-plongement élémentaire de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$, alors

$$\mathcal{N} \models Diag_{el}(\mathcal{M}) \text{ en tant que } \mathcal{L}(\mathcal{M})\text{-structure.}$$

Réciproquement:

Proposition 18 *Soient $\mathcal{L}$ un langage, $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, et $\mathcal{N}$ une $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-structure. On définit une application h de M dans N en posant, pour tout élément m de M, $h(m) = {c_m}^{\mathcal{N}}$. Alors:*

1. Si $\mathcal{N}$ est modèle de $Diag(\mathcal{M})$, h est un $\mathcal{L}$-plongement de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$.

2. Si $\mathcal{N}$ est modèle de $Diag_{el}(\mathcal{M})$, alors h est un $\mathcal{L}$-plongement élémentaire de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$.

Corollaire 19 *Soient $\mathcal{L}$ un langage, $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et T une théorie de $\mathcal{L}$. Il existe un modèle $\mathcal{N}$ de T et un $\mathcal{L}$-plongement de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ si et seulement si, dans le langage $\mathcal{L}(\mathcal{M})$, la théorie $T \cup Diag(\mathcal{M})$ est satisfaisable.*

5.1 Compacité et méthode des diagrammes

5.1.1 Plongements

Proposition 20 (voir TD) *Soient $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, et T une théorie de $\mathcal{L}$. Alors $\mathcal{M}$ se plonge dans un modèle de T si et seulement si toute sous-structure finiment engendrée de $\mathcal{M}$ se plonge dans un modèle de T.*

5.1.2 Extensions élémentaires

Proposition 21 *Soient $\mathcal{L}$ un langage, $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure infinie, et κ un cardinal infini, supérieur ou égal au cardinal de M et à $||\mathcal{L}||$. Alors il existe $\mathcal{N}$, telle que $\mathcal{M} \preceq_{\mathcal{L}} \mathcal{N}$ (c'est-à-dire qu'il existe un $\mathcal{L}$-plongement élémentaire de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$) et $\mathcal{N}$ est de cardinalité égale à κ.*

Preuve (donnée en cours): on applique le corollaire 15 au langage $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ et à la théorie $Diag_{el}(\mathcal{M})$, puis la proposition 18.

Applications: - Extensions élémentaires "non-standards" des entiers.
- Extensions élémentaires de $\mathbb{R}$ non archimédiens.

6 Ensembles définissables

Soient $\mathcal{L}$ un langage et $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. Un ensemble $E \subseteq M^n$ est **$\mathcal{L}$-définissable** dans $\mathcal{M}$ s'il existe une formule $\phi(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_k)$ de $\mathcal{L}$ et $b_1, \ldots, b_k \in M$ tels que

$$E = \{(a_1, \ldots, a_n) \in M^n \; ; \; \mathcal{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots b_k)\}.$$

On dit alors que E est définissable sur $\bar{b} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ ou définissable à paramètres dans $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Si l'ensemble $\bar{b}$ est vide, on dit que E est $\mathcal{L}$-définissable sur vide.

Remarque: $E \subseteq M^n$ est $\mathcal{L}$-définissable sur $\bar{b} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ dans $\mathcal{M}$ si et seulement si E est $\mathcal{L}(\{b_1, \ldots, b_n\})$- définissable sur vide.

Proposition 22 *Si E est définissable au-dessus de $\{b_1, \ldots, b_n\}$, alors E est laissé globalement fixe par tout $\mathcal{L}$-automorphisme de $\mathcal{M}$ qui fixe b_i pour tout i. (c'est-à-dire: si h est un $\mathcal{L}$-automorphisme de $\mathcal{M}$ tel que $f(b_i) = b_i$ pour chaque i, alors pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in M^n$, $(a_1, \ldots, a_n) \in E$ si et seulement si $(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in E$.)*

Attention , la réciproque n'est pas vraie: il ne suffit pas d'être laissé fixe par tout $\mathcal{L}$-automorphisme de $\mathcal{M}$ pour être définissable. Par exemple, toute réunion infinie d'ensembles définissables est laissée fixe par tout automorphisme. De même pour toute intersection infinie d'ensembles définissables. Et ces ensembles ne sont pas nécessairement définissables.

De plus certaines structures n'ont aucun automorphisme non trivial (on dit qu'elles sont rigides). Tout sous-ensemble est alors laissé fixe par le seul automorphisme existant, l'identité. Pourtant dans ces structures il n'est pas nécessairement vrai que tout sous-ensemble est définissable (voir TD).

7 Un exemple: Le corps des réels

On rappelle qu'un corps K muni d'une relation d'ordre $\leq$ totale est un **corps ordonné** si:

– $(K, +)$ est un groupe ordonné, c'est-à-dire, pour tous x, y, z dans K, si $x \leq y$, alors $x + z \leq y + z$;

– pour tous x, y, z dans K, si $z \geq 0$ et $x \leq y$, alors $x.z \leq y.z$.

Soit $\mathcal{L}$ le langage des anneaux ordonnés, $\mathcal{L} = \{0, 1, +, -, ., \leq\}$ et T_1 l'ensemble fini d'énoncés qui axiomatisent les corps ordonnés.

On dit qu'un corps ordonné K est **archimédien** si pour tout x dans K, il existe un entier n tel que $x < n$. (On note n le terme clos du langage $1 + \ldots + 1$, n fois).

Considérons $\mathbb{R}$, les réels, comme $\mathcal{L}$-structure. Le corps $\mathbb{R}$ est archimédien et a la propriété que tout sous-ensemble non vide majoré a une borne supérieure.

On considère le langage $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \cup \{c\}$ où c est un nouveau symbole de constante qui n'est pas dans $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. Soit $\Sigma = Diag_{el}(\mathbb{R}) \cup \{c > n; n \in \mathbb{N}\}$. Cet ensemble d'énoncés est finiment satisfaisable car tout sous-ensemble fini peut être satisfait dans $\mathbb{R}$ lui-même: un ensemble fini $F \subset \Sigma$ ne fait intervenir qu'un nombre fini d'énoncés de la forme $\{c > n\}$, Soit m un entier plus grand que ce nombre fini de n, alors en interprétant la constante c par m, on fait de $\mathbb{R}$ un modèle de F.

Donc par le théorème de compacité, Σ a un modèle K, dans lequel il existe un élément a, l'interprétation de la constante c, qui est plus grand que tous les entiers. K est alors une extension élémentaire du corps réel clos $\mathbb{R}$ (pour le langage $\mathcal{L}_O$ et est non archimédien.

Soit maintenant K un modèle quelconque de Σ. On a donc $\mathbb{R} \preceq_{\mathcal{L}} K$, c'est-à-dire qu'il existe un plongement élémentaire de $\mathbb{R}$ dans K. On note encore $\mathbb{R}$ la sous-structure élémentaire de K qui est $\mathcal{L}$-isomorphe à $\mathbb{R}$ (cela revient à supposer que le plongement élémentaire est en fait l'inclusion, pour simplifier les notations). Soit a donc l'interprétation de la constante c dans K, alors pour tout élément $r \in \mathbb{R}$, on a que $a > r$.

(1) Le sous-ensemble $\mathbb{R}$ est majoré dans K mais n'a pas de borne supérieure: en effet $\mathbb{R}$ est majoré par a, mais pour tout b majorant $\mathbb{R}$, alors $b/2$ majore aussi $\mathbb{R}$ et est strictement inférieur à b.

(2) Dans K, tout sous-ensemble $\mathcal{L}$-définissable de K qui est non vide et qui a un majorant, a une borne supérieure: soit $\phi(v, \bar{w})$ une formule de $\mathcal{L}$, $\bar{b}$ un uple d'éléments de K, et

$$E = \{a \in K; K \models \phi(a, \bar{b})\}.$$

Supposons que E est non vide et est majoré. Donc

$$K \models \exists v \, \phi(v, \bar{b}) \ \wedge \ \exists y \, \forall z \, (\phi(z, \bar{b}) \rightarrow z \leq y).$$

Soit $\psi(y, \bar{w}) \, : \, \forall z \, (\phi(z, \bar{w}) \rightarrow z \leq y)$.

Dans $\mathbb{R}$, tout ensemble majoré non vide a une borne supérieure. C'est en particulier vrai pour les sous-ensembles définissables de $\mathbb{R}$ donc

$$\mathbb{R} \models \forall \bar{w} \, [(\exists z \, \phi(z, \bar{w}) \ \wedge \ \exists y \, (\psi(y, \bar{w}))) \ \rightarrow (\exists v \, (\psi(v, \bar{w}) \wedge \forall x (\psi(x, \bar{w}) \rightarrow v \leq x)))].$$

Puisque $\mathbb{R} \preceq_{\mathcal{L}} K$, le même énoncé est vrai dans K, et doit être vrai en particulier pour $\bar{w} = \bar{b}$. Or cet énoncé dit exactement que puisque E est majoré, il doit avoir un plus petit majorant (c'est v).

(3) Conséquence: Le sous-ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas définissable dans K. Sinon, par (2) il devrait avoir une borne supérieure.

8 Dessert

8.1 Un théorème de théorie des modèles "pure"

Juste pour donner un exemple de théorème de théorie des modèles "pure" qui n'est pas seulement une application quasi directe du théorème de compacité, voici un résultat dû a M.Morley en 1965, et qui a marqué le début du développement moderne de la théorie des modèles. On peut seulement en donner l'énoncé, la démonstration est longue et nécessite beaucoup d'outils que nous n'avons pas introduits dans le cours. Bien évidemment nous ne nous servirons pas de ce théorème.

Théorème 23 *Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et T une théorie de $\mathcal{L}$ qui est κ-catégorique pour* **un** *cardinal κ non dénombrable. Alors T est κ-catégorique pour* **tout** *cardinal κ non dénombrable.*

Pour démontrer ce théorème, on montre en fait que dans tout modèle de la théorie T, on peut définir une notion d'indépendance qui se comporte comme les notions classiques d'indépendance linéaire (dans les espaces vectoriels) ou algébrique (dans les corps). Cette notion d'indépendance a les bonnes propriétés pour entraîner que deux ensembles indépendants maximaux (les "bases") ont même cardinalité. On montre ensuite que tout modèle de T est déterminé, à isomorphisme près, par la cardinalité d'une base, comme les espaces vectoriels ou les corps algébriquement clos (avec la cardinalité d'une base de transcendance sur le corps premier).

L'exemple des ordres denses sans extrémités, théorie dont tous les modèles dénombrables sont isomorphes, mais qui a beaucoup de modèles non isomorphes en chaque cardinalité non dénombrable montre que l'hypothèse de non dénombrabilité dans le théorème est nécessaire.

8.2 Un exemple très récent de théorie des modèles "appliquée"

On considère le langage des groupes $\mathcal{L} = \{., ^{-1}, 1\}$.

Il est facile de voir que si $n \neq m$, le groupe commutatif libre sur n générateurs $\mathbb{Z}^n$ et le groupe commutatif libre sur m générateurs $\mathbb{Z}^m$ ne sont pas élémentairement équivalents dans $\mathcal{L}$: on remarque que $\mathbb{Z}^n/2\mathbb{Z}^n$ est de cardinalité égale à 2^n et que cela peut se "dire".

La situation est beaucoup plus compliquée pour les groupes libres non commutatifs. La question suivante avait été posée par (ou bien est traditionnellement attribuée à) A. Tarski vers 1945: pour chaque $n \geq 2$ on appelle F_n le groupe (non commutatif) libre sur n générateurs. Si $n \neq m$, les groupes F_n et F_m sont-ils élémentairement équivalents dans $\mathcal{L}$?

On a montré assez rapidement que pour tout n, m, F_n et F_m satisfont les mêmes énoncés universels de $\mathcal{L}$. Puis les mêmes énoncés positifs (1966), puis les mêmes énoncés à deux alternances de quantificateurs (annoncé en 1973).

Mais la question générale restait ouverte. Récemment une réponse *positive* à la question de Tarski a été annoncée de deux sources différentes: première annonce datée de

1998 de O. Kharlampovich et A. Myasnikov, deuxième annonce (2000), avec des méthodes différentes, de Z. Sela. (Dans les deux cas, le résultat est le point culminant d'une série de 5 ou 6 articles, disponibles mais non encore tous publiés et donc non encore tous "officiellement" vérifiés).

Le travail de Z. Sela (" Diophantine geometry over groups") en particulier fait bien plus que répondre à la question initiale. Il montre que le plongement canonique de F_n dans F_m, pour $n \leq m$ est un plongement élémentaire et surtout donne une caractérisation de tous les groupes finiment engendrés qui sont élémentairement équivalents à cette classe de groupes (voir l'exposé n° 922 du Séminaire Bourbaki, Juin 2003, "Sur la théorie élémentaire des groupes libres [d'après Sela]", par F. Paulin).

Quelques références

Pour ceux qui maintenant ou dans le futur souhaiteraient aller regarder un peu plus de théorie des modèles, quelques références, toutes intéressantes:

Un livre très classique:

– "Model Theory" de C. Chang et J. Keisler, North-Holland, 1990.

Deux approches beaucoup plus personnelles:

– "Cours de théorie des modèles" de B. Poizat, Nur-al-matiq wal ma'rifah, Villeurbanne, France , 1985. (Une édition anglaise, avec quelques révisons, est disponible: "A course in model theory: an introduction to contemporary mathematical logic" collection Universitext, Springer)

– " Model Theory" de W. Hodges, Cambridge University Press, 1993.

Enfin, je recommanderais particulièrement, le plus récent, qui part de zéro et arrive à parler à la fin des interactions entre théorie des modèles et géométrie. Également plein d'exercices et d'exemples intéressants:

– " Model Theory: an introduction" de D. Marker, Graduate Texts in Mathematics 217, Springer, 2002.

9 Préliminaires pour le théorème de complétude

9.1 Variation des constantes

Proposition 24 *Soit $\mathcal{L}$ un langage, Σ un ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}$, $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ une formule de $\mathcal{L}$ à n variables libres, et $c_1, \ldots, c_n$ des symboles de constantes de $\mathcal{L}$ qui n'apparaissent ni dans $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ ni dans aucun des énoncés de Σ.*

Alors $\Sigma \vdash \phi(c_1, \ldots, c_n)$ si et seulement si $\Sigma \vdash \forall v_1 \ldots \forall v_n \, \phi(v_1, \ldots, v_n)$.

Preuve: Supposons que $\Sigma \vdash \forall v_1 \ldots \forall v_n \, \phi(v_1, \ldots, v_n)$, et soit $\mathcal{M} =< M, ... >$ une $\mathcal{L}$-structure modèle de Σ. Alors $\mathcal{M} \models \forall v_1 \ldots \forall v_n \, \phi(v_1, \ldots, v_n)$. Donc en particulier, la formule $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ doit être vraie du n-uple $({c_1}^M, \ldots, {c_n}^M)$ dans M, c'est-à-dire exactement, par définition que $\mathcal{M} \models \phi(c_1, \ldots, c_n)$.

Réciproquement, supposons que $\Sigma \vdash \phi(c_1, \ldots, c_n))$. Soit $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} \setminus \{c_1, \ldots, c_n\}$ Alors par hypothèse, $\Sigma \cup \{\phi(v_1, \ldots, v_n)\}$ est un ensemble d'énoncés du langage $\mathcal{L}_0$. Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure modèle de Σ et $(a_1, \ldots, a_n)$ un n-uple arbitraire d'éléments de M. Soit $\mathcal{M}_0$ la $\mathcal{L}_0$-structure obtenue à partir de $\mathcal{M}$ en se restreignant aux symboles du langage $\mathcal{L}_0$.

Alors on a toujours que $\mathcal{M}_0$ est modèle de Σ. Soit maintenant $\mathcal{M}_1$ la $\mathcal{L}$-structure obtenue en interprétant dans $\mathcal{M}_0$ chaque constante c_i par l'élément a_i. Alors $\mathcal{M}_1$ est encore un modèle de Σ, et puisque $\Sigma \vdash \phi(c_1, \dots, c_n)$, on doit avoir que $\mathcal{M}_1 \models \phi(a_1, \dots a_n)$. Comme $c_1, \dots, c_n$ n'apparaissent pas dans $\phi(v_1, \dots, v_n)$, il reste vrai que $\mathcal{M}_0 \models \phi(a_1, \dots a_n)$, et donc aussi que $\mathcal{M} \models \phi(a_1, \dots a_n)$. On a donc montré que, dans toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ modèle de Σ, pour tout n-uple $(a_1, \dots, a_n) \in M^n$, $\mathcal{M} \models \phi(a_1, \dots a_n)$. Cela veut exactement dire que $\mathcal{M} \models \forall v_1 \dots \forall v_n \, \phi(v_1, \dots, v_n)$.$\bullet$

9.2 Les tautologies du calcul du prédicat (Rappel)

Soit $F(P_1, \dots, P_n)$ une formule du calcul propositionnel à variables propositionnelles parmi $P_1, \dots, P_n$. Si $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont des énoncés du langage $\mathcal{L}$, on note $F(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ l'énoncé de $\mathcal{L}$ obtenu en substituant dans $F(P_1, \dots, P_n)$ chaque occurence de P_i par l'énoncé σ_i. On a vu en cours que:

Lemme 25 *Soit $F(P_1, \dots, P_n)$ une tautologie du calcul propositionnel. Alors, pour tous énoncés $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, l'énoncé $F(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ est universellement valide.*

L'énoncé $F(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ est appelé une **tautologie du calcul des prédicats** pour $\mathcal{L}$.