E. Bouscaren

Théoréme de complétude et théorème de compacité

Notes complémentaires (4)

Les conventions de notation sont les mêmes que dans les notes précédentes On continue la numérotation des sections et des propositions en suivant celle des notes n°3

Pour la première fois maintenant on va travailler dans un premier temps avec des langages et des structures non nécéssairement égalitaires (la notion de structure égalitaire est sémantique). Pour pouvoir ensuite en déduire les versions égalitaires des théorèmes de complétude et de compacité nous utiliserons la section 11 qui caractérise les modèles égalitaires.

10 Complétude pour le calcul des prédicats

10.1 Démonstrations formelles (Système de Hilbert)

On fixe un langage $\mathcal{L}$, **non égalitaire**, on va utiliser les connecteurs: $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ et les quantificateurs $\{\exists, \forall\}$.

LES AXIOMES

- **Ax(1)**: Ax(1) est l'ensemble de toutes les tautologies du calcul des prédicats pour $\mathcal{L}$. (On a rappelé la définition section 9.2). Pour un système comprenant un nombre fini de schémas, voir remarque un peu plus loin.

- **Ax(2)**: Pour chaque formule $\phi(v)$ de $\mathcal{L}$,

$$(\exists v\phi(v) \leftrightarrow \neg\forall v\neg\phi(v)).$$

- **Ax(3)**: Pour chaque formule $\phi(v)$ de $\mathcal{L}$, et chaque énoncé θ de $\mathcal{L}$,

$$((\forall v\,(\theta \rightarrow \phi(v))) \rightarrow (\theta \rightarrow \forall v\,\phi(v))).$$

- **Ax(4)**: Pour chaque formule $\phi(v)$ de $\mathcal{L}$, chaque terme clos t de $\mathcal{L}$,

$$(\forall v\phi(v) \rightarrow \phi(t)).$$

(Comme d'habitude on écrit $\phi(t)$ pour $\phi[t/v]$, la formule dans laquelle on a substitué t à toutes les occurences libres de v dans $\phi(v)$.)

Deux RÈGLES de déduction:

- **R(1) - Modus Ponens**: pour tous énoncés θ, ψ de $\mathcal{L}$, de $\{\theta, (\theta \to \psi)\}$ on déduit ψ.
- **R(2) - Règle de généralisation**: pour chaque formule $\phi(v)$ de $\mathcal{L}$, si c est un symbole de constante de $\mathcal{L}$ qui n'apparait pas dans $\phi(v)$, alors, de $\phi(c)$ on déduit $\forall v\phi(v)$.

Définition: Soit Σ un ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}$ et ψ un énoncé de $\mathcal{L}$, on dit que ψ est **conséquence syntaxique, ou conséquence formelle** de Σ, noté $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \psi$, s'il existe une **démonstration formelle** de ψ à partir de Σ, c'est-à-dire, s'il existe une suite finie $\{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$ d'énoncés de $\mathcal{L} \cup \widehat{\mathcal{C}}$, où $\widehat{C}$ est un ensemble (fini) de symboles de constantes n'apparaissant pas dans Σ, tels que:
- $\psi_k = \psi$,
- pour chaque $i \leq k$, l'une des quatre conditions suivantes est remplie
  – soit ψ_i est un énoncé de Σ,
  – soit ψ_i est un axiome,
  – soit ψ_i a été déduit par Modus Ponens (R(1)) de deux énoncés $\psi_m = (\psi_l \to \psi_i)$ et ψ_l avec $m, l < i$,
  – soit $\psi_i = \forall v\, \phi(v)$ a été déduit par généralisation (R(2)) d'un énoncé $\psi_m = \phi(c)$, avec c un symbole de constante de $\mathcal{L} \cup \widehat{\mathcal{C}}$ qui n'apparait ni dans $\phi(v)$ ni dans Σ.

Commentaires: On a choisi, contrairement à ce qui est fait par exemple dans le livre Cori-Lascar, de ne définir la notion de démonstration que pour des énoncés et d'utiliser des symboles de constantes pour la règle de généralisation, qui est le plus souvent énoncée de la manière suivante: "si F est une formule, de F on déduit $\forall vF$".

On y gagne que l'on n'a jamais besoin d'effectuer de substitution de variables, ce qui évite bien des problèmes techniques. mais évidemment, on doit toujours pouvoir disposer de constantes, d'où la définition: $T \mathrel{|\!\!\sim} \theta$ si, en rajoutant éventuellement des constantes, on a une démonstration formelle de θ à partir de T. Pour vérifier l'équivalence avec les autres présentations des systèmes de Hilbert, on peut soit vérifier directement que l'on peut transformer une démonstration dans un système en une démonstration dans l'autre, soit utiliser les théorèmes respectifs de complétude de chacun des systèmes.
Remarque sur les axiomes AX(1), c'est-à-dire les schémas obtenus à partir des tautologies du calcul propositionnel, on a mis toutes les tautologies propositionnelles pour se simplifier la vie, mais on peut vérifier que dans les preuves des divers lemmes et théorèmes qui mènent au théorème de complétude on n'utilise en fait seulement un nombre fini de tautologies propositionnelles.

On peut aussi bien sur choisir n'importe quel ensemble de tautologies qui est suffisant pour démontrer le théorème de complétude du calcul propositionnel (avec les connecteurs que l'on utilise ici), par exemple les tautologies suivantes devraient suffire (les trois premières sont celles que l'on a utilisées pour démontrer la complétude du calcul propositionnel avec les connecteurs $\{\neg, \to\}$ (Notes 0)):
  – $(A \to (B \to A))$
  – $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$
  – $((\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B))$
  – $((A \wedge B) \to A)$
  – $((A \wedge B) \to B)$
  – $(A \to (B \to A \wedge B))$

– $(A \to (A \vee B))$
– $(B \to (A \vee B))$
– $((A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)))$
– $((A \leftrightarrow B) \to (A \to B))$
– $((A \leftrightarrow B) \to (B \to A))$
– $((A \to B) \to ((B \to A) \to (A \leftrightarrow B)))$

Et on prend pour axiomes **Ax(1)** les tautologies du calcul des prédicats obtenues par substitutions à partir des 12 tautologies propositionnelles ci-dessus.

Premières remarques qui découlent directement de la définition:

Lemme 10.1 *Soit Σ un ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}$.*

1. *Si $\{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$ est une démonstration de $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \psi$, alors pour chaque $i \leq k$, $\{\psi_1, \ldots, \psi_i\}$ est une démonstration de $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \psi_i$.*
2. *Si $\psi \in \Sigma$, alors $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \psi$.*
3. *Si ψ est un axiome, alors $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \psi$.*
4. *Si $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \psi$ et $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} (\psi \to \theta)$, alors $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \theta$.*
5. *Si $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \phi(c)$ pour c un symbole de constante qui n'apparait ni dans Σ ni dans $\phi(v)$, alors $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \forall v\, \phi(v)$.*

Lemme 10.2 *Si $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$ et si $\Sigma_1 \mathrel{|\!\!\sim} \psi$, alors $\Sigma_2 \mathrel{|\!\!\sim} \psi$.*

Preuve: On suppose qu'on a une démonstration de $\Sigma_1 \mathrel{|\!\!\sim} \psi$, $\{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$. On voudrait vérifier si cette suite donne aussi une démonstration de $\Sigma_2 \mathrel{|\!\!\sim} \psi$. Pour $i \leq k$, si $\psi_i \in \Sigma_1$ ou si ψ_i est un axiome, ou si ψ_i est obtenu en appliquant la règle du Modus Ponens, il n'y a pas de problème. Mais dans le cas où ψ_i est obtenu par la règle de généralisation, il se pourrait que $\psi_i = \forall v\, \phi(v)$ soit obtenu à partir de $\psi_j = \phi(c)$ pour une constante c qui n'apparait pas dans $\phi(v)$ ni dans Σ_1 mais qui apparait dans Σ_2.

Premier cas: toutes les constantes de $\{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$ qui n'apparaissent pas dans Σ_1 n'apparaissent pas dans Σ_2 non plus. Alors $\{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$ est aussi une démonstration de $\Sigma_2 \mathrel{|\!\!\sim} \psi$.

Deuxième cas: sinon, soient $\{c_1, \ldots, c_n\}$ les symboles de constantes qui apparaissent dans l'un au moins des ψ_i, qui n'apparaissent pas dans Σ_1 mais qui apparaissent dans Σ_2. Soient $\{d_1, \ldots, d_n\}$ des nouveaux symboles de constante qui n'apparaissent ni dans aucun ψ_i, ni dans Σ_2 (s'il le faut on agrandit provisoirement le langage). Si $\psi_i = \phi_i(c_1, \ldots, c_n)$, alors comme $\Sigma_1 \mathrel{|\!\!\sim} \phi_i(c_1, \ldots, c_n)$ et que les c_j n'apparaissent pas dans Σ_1, on a aussi que $\Sigma_1 \mathrel{|\!\!\sim} \phi_i(d_1, \ldots, d_n)$: en appliquant n fois la règle de généralisation, on obtient que:

$$\Sigma_1 \mathrel{|\!\!\sim} \forall v_1 \ldots \forall v_n\, \phi_i(v_1, \ldots, v_n).$$

Ensuite, comme $((\forall v_1 \ldots \forall v_n\, \phi_i(v_1, \ldots, v_n)) \to (\forall v_2 \ldots \forall v_n\, \phi_i(d_1, v_2, \ldots, v_n)))$ est un axiome (Ax(4)), par Modus Ponens, on obtient que

$$\Sigma_1 \mathrel{|\!\!\sim} \forall v_2, \ldots, \forall v_n\, \phi_i(d_1, v_2, \ldots, v_n).$$

En faisant la même opération encore $n-1$ fois on obtient bien que

$$\Sigma_1 \mathrel{|\!\!\sim} \phi_i(d_1, \ldots, d_n)).$$

On note $\phi_i(d_1, \ldots, d_n) = \psi'_i$. On a alors que $\{\psi'_1, \ldots, \psi'_k\}$ est une démonstration de ψ'_k. Et que la suite des ψ'_i est dans le premier cas, et remplit donc les conditions pour être aussi une démonstration de $\Sigma_2 \mathrel{|\!\!\sim} \psi'_k$. Maintenant, comme les d_j ne sont pas dans Σ_2, on peut appliquer la règle de généralisation plusieurs fois de suite et on obtient que $\Sigma_2 \mathrel{|\!\!\sim} \forall v_1 \ldots \forall v_n \, \phi_k(v_1, \ldots, v_n)$. Maintenant en appliquant plusieurs fois le Modus ponens et Ax(4) avec les constantes c_j, on en déduit que $\Sigma_2 \mathrel{|\!\!\sim} \phi_k(c_1, \ldots, c_n) = \psi_k = \psi$. •

Remarque: Il est facile de voir que si $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} (\gamma \to \psi)$, alors $\Sigma \cup \{\gamma\} \mathrel{|\!\!\sim} \psi$. La réciproque est un peu plus difficile et s'appelle traditionellement le lemme de déduction (preuve donnée en cours):

Lemme 10.3 Lemme de déduction *Si* $\Sigma \cup \{\gamma\} \mathrel{|\!\!\sim} \psi$, *alors* $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \gamma \to \psi$.

On aura besoin de:

Lemme 10.4 *Soit* $\phi(v)$ *une formule de* $\mathcal{L}$,
(i) Si t *est un terme clos du langage, alors* $\mathrel{|\!\!\sim} (\phi(t) \to \exists v \phi(v))$.
(ii) $\mathrel{|\!\!\sim} (\neg \forall v \, \phi(v) \leftrightarrow \exists v \, \neg \phi(v))$.

Preuve: (i) On va montrer que $\phi(t) \mathrel{|\!\!\sim} \exists \phi(v)$ (par 10.3, ça suffit):
– $\forall v \neg \phi(v) \to \neg \phi(t)$ est un axiome (Ax(4))
– $(\forall v \neg \phi(v) \to \neg \phi(t)) \to (\phi(t) \to \neg \forall v \neg \phi(v))$ axiome car $(P \to \neg Q) \to (Q \to \neg P)$ est une tautologie
– par Modus Ponens, $\phi(t) \to \neg \forall v \neg \phi(v)$
– par Modus Ponens $\neg \forall v \neg \phi(v)$
– $\exists v \phi(v) \leftrightarrow \neg \forall v \neg \phi(v)$ axiome AX(2)
– $(\exists v \phi(v) \leftrightarrow \neg \forall v \neg \phi(v)) \to (\neg \forall v \neg \phi(v) \to \exists v \phi(v))$ est un axiome, car $(P \leftrightarrow Q) \to (Q \to P)$ est une tautologie
– par Modus Ponens, on déduit que $\neg \forall v \neg \phi(v) \to \exists v \phi(v)$
– par Modus Ponens enfin, $\exists v \phi(v)$.

(ii) a) on remarque d'abord que

$$\mathrel{|\!\!\sim} \forall v \, \phi(v) \leftrightarrow \forall v \, \neg\neg \phi(v),$$

en effet de $\forall v \phi(v)$ on déduit $\phi(c)$ pour c n'apparaissant pas dans $\phi(v)$ par Axiome (4). Par tautologie propositionnelle, $\phi(c) \to \neg\neg\phi(c)$, par modus ponens et généralisation, on déduit $\forall v \neg\neg \phi(v)$ Et de même pour la flèche inverse.

b) Par tautologies propositionelles et modus ponens on déduit que

$$\mathrel{|\!\!\sim} \neg \forall v \, \phi(v) \leftrightarrow \neg \forall v \, \neg\neg \phi(v).$$

.

c) Par Ax (4), on a que

$$\exists v \neg \phi(v) \leftrightarrow \neg \forall v \neg\neg \phi(v).$$

En mettant tout cela ensemble, on déduit (ii). $\square$

On a choisi comme axiomes bien sûr des énoncés universellement valides et les démonstrations formelles sont "valides" dans le sens suivant:

Proposition 10.5 (Validité) *Si $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \psi$, alors $\Sigma \vdash \psi$.*

Preuve: Par induction sur la longueur des preuves. On a donc une démonstration de $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \psi$, $\{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$. Soit $\mathcal{M}$ un modèle arbitraire de Σ, on veut montrer que $\mathcal{M} \models \psi$. Si $\psi_k = \psi$ est un énoncé de Σ, pas de problèmes. Si ψ est un axiome, alors par le lemme 25 de la section 9.2, et vérification immédiate pour les autres schémas d'axiomes, ψ est universellement valide, donc certainement $\Sigma \vdash \psi$.

Si ψ a été déduit par Modus ponens de $\psi_j, \psi_j \to \psi$, alors par induction, $\mathcal{M} \models \psi_j$ et $\mathcal{M} \models \psi_j \to \psi$ et il suit bien que $\mathcal{M} \models \psi$.

Si $\psi = \forall v\, \phi(v)$ a été déduit par généralisation (R(2)) d'un énoncé $\psi_m = \phi(c)$, alors, par induction, $\Sigma \vdash \phi(c)$, et puisque c n'apparait pas dans Σ, par la proposition 24 de la section 9 (variation des constantes) , on a bien que $\Sigma \vdash \forall v\, \phi(v)$.$\bullet$

Définition: 1. Σ un ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}$ est dit **cohérent** s' il n'existe pas d'énoncé θ de $\mathcal{L}$ tel que $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \theta \wedge \neg\theta$. Sinon on dit que Σ est contradictoire.

Remarque: 1. Σ ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}$ est donc en fait cohérent si il n'existe pas de langage $L' = \{\mathcal{L}\} \cup \hat{\mathcal{C}}$, où $\hat{C}$ est un ensemble de nouveaux symboles de constantes, et d'énoncé θ de $\mathcal{L}$ tel que (dans L'), $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \theta \wedge \neg\theta$.

2. Si Σ ensemble d'énoncés de L est cohérent, alors pour tout $L' = L \cup C'$, pour tout θ énoncé de $\mathcal{L}'$, on n'a pas non plus $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \theta \wedge \neg\theta$.

(Remarque: $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \theta \wedge \neg\theta$ ssi $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \theta$ et $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \neg\theta$.)

Proposition 10.6 *(i) Si Σ n'est pas cohérent, alors pour tout énoncé ψ, $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \psi$.*

(ii) $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \psi$ si et seulement si $\Sigma \cup \{\neg\psi\}$ n'est pas cohérent.

(iii) Si $\Sigma \cup \{\theta\}$ est cohérent, et si $\Sigma \cup \{\theta\} \mathrel{|\!\!\sim} \gamma$, alors $\Sigma \cup \{\gamma\}$ est cohérent.

Preuve: (i) On a $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \theta_1, \ldots, \theta_k\}$, où $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ est une démonstration de $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \gamma$ et $\{\theta_1, \ldots, \theta_k\}$ une démonstration de $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \neg\gamma$. On continue de la façon suivante:

– $(\gamma \to (\neg\gamma \to \psi)$ est un axiome (tautologie)

– par Modus Ponens, on déduit $(\neg\gamma \to \psi)$

– par Modus ponens encore, on déduit ψ. Et cela nous donne bien une démonstration de $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \psi$.

(ii) Si $\Sigma \cup \{\neg\psi\}$ n'est pas cohérent, par (i), $\Sigma \cup \{\neg\psi\} \mathrel{|\!\!\sim} \psi$. Par le lemme de déduction (10.3), alors $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \neg\psi \to \psi$. L'énoncé $(\neg\psi \to \psi) \to \psi$ est un axiome (tautologie) et en appliquant le Modus Ponens, on obtient que $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \psi$.

Réciproquement, si $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \psi$, alors $\Sigma \cup \{\neg\psi\} \mathrel{|\!\!\sim} \psi$ par le lemme 10.2, et bien sûr $\Sigma \cup \{\neg\psi\} \mathrel{|\!\!\sim} \neg\psi$. $\square$

Lemme 10.7 *Si $\Sigma \cup \{\theta\}$ est un ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}$ cohérent, et si $T \cup \{\theta\} \mathrel{|\!\!\sim} \gamma$, alors $\Sigma \cup \{\gamma\}$ est cohérent.*

Preuve: Sinon, on a que $\Sigma \cup \{\gamma\} \mathrel{|\!\!\sim} \psi \wedge \neg\psi$. Donc que $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \gamma \to (\psi \wedge \neg\psi)$. Par Modus Ponens on déduit que $\Sigma \cup \{\theta\} \mathrel{|\!\!\sim} \psi \wedge \neg\psi$. $\square$

On a enfin trivialement :

Lemme 10.8 (Finitude des démonstrations) *Si $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \theta$, alors il existe un sous-ensemble fini Σ_0 de Σ tel que $\Sigma_0 \mathrel{|\!\!\sim} \theta$.*

10.2 Le théorème de complétude

On va donc montrer le Théorème de Complétude (Gödel):

On rappelle que Σ est *satisfaisable* ou *consistant* si Σ a un modèle.

Théorème 10.9 *Soient $\mathcal{L}$ un langage, Σ un ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}$ et θ un énoncé de $\mathcal{L}$. Si $\Sigma \vdash \theta$ alors $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \theta$.*

Ou plutôt on va montrer l'énoncé équivalent:

Proposition 10.10 *Si Σ est cohérent, Σ a un modèle.*

Preuve que les deux énoncés sont bien équivalents:

Supposons que $\Sigma \vdash \theta$, alors $\Sigma \cup \{\neg\theta\}$ n'a pas de modèle. Par 10.10, cela entraine que $\Sigma \cup \{\neg\theta\}$ n'est pas cohérent, c'est-à-dire, par la proposition 10.6, que $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \theta$.

Réciproquement, si Σ est cohérent, alors par 10.6, il y a un énoncé θ qui n'est pas conséquence formelle de Σ. Par 10.9, θ n'est pas conséquence (sémantique) de Σ non plus, ce qui implique que Σ n'est pas inconsistant, et a donc un modèle. $\square$

Avant de commencer la preuve, remarquons que le théorème de compacité se déduit maintenant facilement:

Corollaire 10.11 Théorème de compacité *Un ensemble d'énoncés Σ est satisfaisable si et seulement si il est finiment satisfaisable.*

Preuve: Si Σ n'est pas satisfaisable, alors par 10.10, Σ n'est pas cohérent, donc il existe θ tel que $\Sigma \mathrel{|\!\!\sim} \theta \wedge \neg\theta$. Par le lemme de finitude (10.8), il existe un sous-ensemble fini Σ_0 de Σ tel que $\Sigma_0 \mathrel{|\!\!\sim} \theta \wedge \neg\theta$, ce qui entraine par 10.5 que $\Sigma_0 \vdash \theta \wedge \neg\theta$ et donc que Σ_0 n'est pas satisfaisable. $\square$

On donne une démonstration directe du théorème de compacité dans la section 12.

La démonstration de la proposition 10.10 va se faire en trois étapes. Nous avons besoin de deux définitions:

Définitions Soit Σ un ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}$. On dit que Σ est **maximal cohérent** (dans $\mathcal{L}$) si Σ est cohérent et si pour tout θ de $\mathcal{L}$, soit $\theta \in \Sigma$ soit $\neg\theta \in \Sigma$.
2. Σ, ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}$, **admet des témoins de Henkin** dans $\mathcal{L}$ si pour toute formule $\phi(v)$ à une variable libre de $\mathcal{L}$, il existe une constante c de $\mathcal{L}$, telle que

$$\Sigma \mid\!\sim (\exists v\, \phi(v) \rightarrow \phi(c)).$$

Proposition 10.12 *Soit Σ un ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}$, maximal cohérent, et qui admet des témoins de Henkin dans $\mathcal{L}$. Alors T a un modèle*

Proposition 10.13 *Soit Σ , cohérent dans $\mathcal{L}$. Alors il existe $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$, et Σ', ensemble d'énoncés cohérent de $\mathcal{L}'$, qui étend σ et qui admet des témoins de Henkin dans $\mathcal{L}'$.*

Proposition 10.14 *Soit Σ un ensemble d'énoncés cohérent de $\mathcal{L}$, alors il existe Σ' dans $\mathcal{L}$ qui est maximal cohérent et qui contient Σ.*

Avec ces trois propositions, on déduit bien 10.10: Soit Σ dans $\mathcal{L}$, cohérent. Par 10.13, on remplace Σ par $\Sigma' \supseteq T$ encore cohérent et qui admet des témoins de Henkin dans $\mathcal{L}'$. Par 10.14, soit Σ'' maximale cohérent de $\mathcal{L}'$ étendant Σ'; Σ' admet encore des témoins de Henkin dans $\mathcal{L}'$. On applique maintenant 10.12, et on trouve une $\mathcal{L}'$-structure $\mathcal{M}$ qui est modèle de Σ''. Alors la restriction de $\mathcal{M}$ à $\mathcal{L}$ est un modèle Σ.

Preuve de la Proposition 10.12: On remarque tout d'abord que si Σ est maximal cohérent, alors si $\Sigma \mid\!\sim \theta$ si et seulement si $\theta \in \Sigma$.

Soit M l'ensemble des termes clos du langage $\mathcal{L}$ (cet ensemble est certainement non vide, puisque il y a des constantes de Henkin dans le langage $\mathcal{L}$).

On met sur l'ensemble M une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ en interprétant les symboles du langage de la façon suivante:

– si c est un symbole de constante de $\mathcal{L}$, on pose $c^{\mathcal{M}} = c$ (c est bien un élément de M!)

– si f est un symbole de fonction d'arité k de $\mathcal{L}$, on définit la fonction $f^{\mathcal{M}} : M^k \mapsto M$ par : si $(t_1, \ldots, t_k) \in M^k$, $f^{\mathcal{M}}(t_1, \ldots, t_k)$ est égal au terme clos de $\mathcal{L}$, $f(t_1, \ldots, t_k)$ (qui est bien un élément de M)

– si R est un symbole de relation d'arité k de $\mathcal{L}$, on définit $R^{\mathcal{M}}$ comme étant l'ensemble $\{(t_1, \ldots, t_k) \in M^k \,;\, \Sigma \mid\!\sim R(t_1, \ldots, t_k)\}$.

Maintenant soit $t(v_1 \ldots, v_n)$ un terme de $\mathcal{L}$ à variables libres parmi $v_1, \ldots, v_n$. On vérifie facilement que si $t_1, \ldots, t_n \in M$, $t^{\mathcal{M}}(t_1, \ldots, t_n)$ est égal au terme clos de $\mathcal{L}$, $t(t_1, \ldots, t_n)$ (résultat de la substituion dans le terme t du terme clos t_i à la variable v_i pour chaque i).

On va maintenant montrer que pour toute formule de $\mathcal{L}$, $\phi(v_1, \ldots, v_n)$, pour tout $(t_1, \ldots, t_n) \in M^n$,

$$\mathcal{M} \models \phi(t_1, \ldots, t_n) \text{ ssi } \phi(t_1, \ldots, t_n) \in \Sigma.$$

Par induction sur la hauteur de ϕ:

– Si $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ est une formule atomique c'est par définition de l'interprétation des symboles de relations et de fonctions (et donc des termes) dans la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$.

– Si $\phi(v_1, \ldots, v_n) = \phi_1(v_1, \ldots, v_n) \wedge \phi_2(v_1, \ldots, v_n)$ et $(t_1, \ldots, t_n) \in M^k$, on a:

$$\mathcal{M} \models \phi(t_1, \ldots, t_n) \text{ ssi } \mathcal{M} \models \phi_1(t_1, \ldots, t_n) \text{ et } \mathcal{M} \models \phi_2(t_1, \ldots, t_n).$$

Par induction, cela ssi

$$\phi_1(t_1,\ldots,t_n)\in\Sigma \text{ et } \phi_2(t_1,\ldots,t_n)\in\Sigma\,,\ \text{ ssi } \phi(t_1,\ldots,t_n)\in\Sigma.$$

– Si $\phi(v_1,\ldots,v_n)=\neg\psi(v_1,\ldots,v_n)$, on a: $\mathcal{M}\models\neg\psi(t_1,\ldots,t_n)$ ssi on n'a pas que $\mathcal{M}\models\psi(t_1,\ldots,t_n)$, ssi, par induction, $\psi(t_1,\ldots,t_n)\notin\Sigma$, ssi, par maximalité de Σ, $\neg\psi(t_1,\ldots,t_n)\in\Sigma$.

– de même pour les autres connecteurs.

– Si $\phi(v_1,\ldots,v_n)=\exists v\,\psi(v,v_1,\ldots,v_n)$; si $\mathcal{M}\models\exists v\,\psi(v,t_1,\ldots,t_n)$, c'est-à-dire, s'il existe $t\in M$ tel que $\mathcal{M}\models\psi(t,t_1,\ldots,t_n)$, alors par induction, $\psi(t,t_1,\ldots,t_n)\in\Sigma$. Par le lemme 10.4, $\Sigma\mathrel{|\!\!\sim}\exists v\,\psi(v,t_1,\ldots,t_n)$. Réciproquement, si $(\exists v\,\psi(v,t_1,\ldots,t_n))\in\Sigma$, alors, Σ admettant des témoins de Henkin, il y a un symbole de constante c de $\mathcal{L}$ tel que

$$\Sigma\mathrel{|\!\!\sim}(\exists v\,\phi(v,t_1,\ldots,t_n)\ \rightarrow\ \phi(c,t_1,\ldots,t_n)).$$

Par Modus ponens et induction, $\mathcal{M}\models\psi(c,t_1,\ldots,t_n)$.

– Si $\forall v\psi(v,t_1,\ldots,t_n)\in\Sigma$, soit t un élément arbitraire de M, c'est-à-dire un terme clos arbitraire de $\mathcal{L}$, par les axiomes Ax(4) et Modus ponens, on a que $\psi(t,t_1,\ldots,t_n)\in\Sigma$. Par induction, donc $\mathcal{M}\models\psi(t,t_1,\ldots,t_n)$. Ceci étant vrai pour tout $t\in M$, $\mathcal{M}\models\forall v\,\psi(v,t_1,\ldots,t_n)$.
Réciproquement, si il n'est pas vrai que $\forall v\psi(v,t_1,\ldots,t_n)\in\Sigma$, alors par maximalité, $\neg\forall v\psi(v,t_1,\ldots,t_n)\in\Sigma$. Par le lemme 10.4, $\Sigma\mathrel{|\!\!\sim}\exists v\,\neg\psi(v,t_1,\ldots,t_n)$, par les témoins de Henkin, $\Sigma\mathrel{|\!\!\sim}\neg\psi(c,t_1,\ldots,t_n)$ pour une constante c de $\mathcal{L}$. Par induction $\mathcal{M}\models\neg\psi(c,t_1,\ldots,t_n)$, et donc certainement il n'est pas vrai que $\mathcal{M}\models\forall v\psi(v,t_1,\ldots,t_n)$. □

<u>Preuve de la Proposition 10.13</u>: Soit donc Σ cohérent dans $\mathcal{L}$. On va utiliser le lemme suivant:

Lemme 10.15 *Soit Σ un ensemble cohérent d'énoncés de $\mathcal{L}$, $\phi(v)$ une formule de $\mathcal{L}$ et c un symbole de constante qui n'est pas dans L. Alors $\Sigma\cup\{(\exists v\,\phi(v)\ \rightarrow\ \phi(c))\}$ est cohérent dans $L\cup\{c\}$.*

Preuve du lemme: Sinon, cela veut dire, par le lemme 10.6, que $\Sigma\mathrel{|\!\!\sim}\neg(\exists v\,\phi(v)\ \rightarrow\ \phi(c))$. En utilisant une tautologie propositionnelle, on déduit que $\Sigma\mathrel{|\!\!\sim}(\exists v\,\phi(v)\wedge\neg\phi(c))$, donc que $\Sigma\mathrel{|\!\!\sim}\exists v\,\phi(v)$ et $\Sigma\mathrel{|\!\!\sim}\neg\phi(c)$. La constante c n'apparaissant pas dans Σ, par la règle de généralisation, $\Sigma\mathrel{|\!\!\sim}\forall w\neg\phi(w)$. Par l'axiome Ax(2), on a aussi $\Sigma\mathrel{|\!\!\sim}\neg\forall w\neg\phi(w))$ et donc Σ n'est pas cohérent. □

On construit pour chaque n, un langage L_n et un ensemble d'énoncés Σ_n de L_n, avec les propriétés suivantes:

– $L_0=\mathcal{L}$, $\Sigma_0=\Sigma$

– $L_{n+1}=L_n\cup\{c_{\phi(v)};\phi(v)$ formule à une variable libre de $L_n\}$ où les $c_{\phi(v)}$ sont des symboles de constantes n'apparaissant pas dans L_n; et on pose

$$\Sigma_{n+1}=\Sigma_n\cup\{(\exists v\,\phi(v)\ \rightarrow\phi(c_{\phi(v)}));\phi(v) \text{ formule à une variable libre de } L_n\}$$

.

Soit $\mathcal{L}' = \bigcup_n L_n$, et $\Sigma' = \bigcup_n \Sigma_n$. Alors $\Sigma' \supseteq \Sigma$, Σ' est cohérente par le lemme 10.15, et σ' admet bien des témoins de Henkin dans L'. $\square$

Preuve de la Proposition 10.14: On va utiliser le lemme de Zorn (si le langage est dénombrable, on peut le faire “à la main”).

On a donc Σ dans un langage $\mathcal{L}$, qui est cohérent. On considère l'ensemble E de toutes les ensembles d'énoncés Σ' de $\mathcal{L}$ qui contiennent Σ et sont cohérents, ordonné par la relation d'inclusion. Il est facile de vérifier que tout sous-ensemble totalement ordonné de E admet un majorant, la réunion de ses éléments. Le lemme de Zorn nous assure alors que E a un élémént maximal, c'est-à-dire qu'il y a un ensemble $\widehat{\Sigma}$ de $\mathcal{L}$, qui contient Σ, qui est cohérent, et qui est tel que si Σ' est cohérent , si $\Sigma' \supseteq \widehat{\Sigma}$, alors $\Sigma' = \widehat{\Sigma}$. Vérifions que $\widehat{\sigma}$ est bien maximal cohérente dans notre sens: soit θ un énoncé de $\mathcal{L}$, supposons qu'il ne soit pas vrai que $\theta \in \widehat{\Sigma}$. Alors par (10.6), cela veut dire que $\widehat{\Sigma} \cup \{\neg\theta\}$ est cohérent. Par maximalité de $\widehat{\Sigma}$, $\neg\theta \in \widehat{\Sigma}$. $\square$

11 Retour au cas égalitaire

Nous avions provisoirement abandonné les langages égalitaires. Si nous avons maintenant un langage égalitaire $\mathcal{L}$, c'est-à-dire comprenant un symbole de relation binaire distingué, que nous notons $R_=$, et T une théorie de $\mathcal{L}$, à quelle condition la théorie T aura-t-elle un modèle égalitaire, c'est-à-dire un modèle $\mathcal{M}$ qui est une $\mathcal{L}$-structure dans laquelle le symbole $R_=$ est interprété par l'égalité?

Soit T_{eg} l'ensemble suivant d'énoncés de $\mathcal{L}$ (appelés axiomes de l'égalité):

– $S_1 : \forall v\, vR_=v$

– $S_2 : \forall v_1 \forall v_2 ((v_1R_=v_2) \rightarrow (v_2R_=v_1))$

– $S_3 : \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3 (((v_1R_=v_2) \wedge (v_2R_=v_3)) \rightarrow (v_1R_=v_3))$

– pour chaque symbole de fonction f de $\mathcal{L}$, d'arité k, l'énoncé
$\forall v_1 \dots \forall v_k \forall v_{k+1} \dots \forall v_{2k} ((\bigwedge_{1\leq i\leq k+i} v_iR_=v_{k+i}) \rightarrow (f(v_1, \dots, v_k)\, R_=\, f(v_{k+1}, \dots, v_{2k})))$

– pour chaque symbole de relation S de $\mathcal{L}$, d'arité k, l'énoncé
$\forall v_1 \dots \forall v_k \forall v_{k+1} \dots \forall v_{2k} ((\bigwedge_{1\leq i\leq k+i} v_iR_=v_{k+i}) \rightarrow (S(v_1, \dots, v_k) \leftrightarrow S(v_{k+1}, \dots, v_{2k})))$.

On voit que les énoncés S_1, S_2 et S_3 disent que la relation $R_=$ est une relation d'équivalence. L'ensemble éventuellement infini (si le langage $\mathcal{L}$ est infini) des autres énoncés dit que cette relation d'équivalence est “compatible” avec la $\mathcal{L}$-structure induite par le langage.

Proposition 11.1 *Soit $\mathcal{L}$ un langage égalitaire et Σ un ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}$. Alors Σ admet un modèle égalitaire si et seulement si $\Sigma \cup T_{eg}$ admet un modèle.*

Démonstration : Il est clair que si $\mathcal{M}$ est une $\mathcal{L}$-structure qui est modèle de Σ et est égalitaire, alors $\mathcal{M} \models T_{eg}$.

Réciproquement, soit $\mathcal{M} =< M; ... >$ un modèle de $\Sigma \cup T_{eg}$. Alors en particulier, $R_=^{\mathcal{M}}$ doit être une relation d'équivalence (par les énoncés S_1, S_2, S_3); Soit N l'ensemble quotient , $N = M/R_=^{\mathcal{M}}$, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence d'éléments de

M. Pour $m \in M$, on note $\widehat{m}$ l'élément de N correspondant à la classe de m. On met sur N une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{N}$ en posant:

– pour chaque c, symbole de constante de $\mathcal{L}$, $c^{\mathcal{N}} = \widehat{c^{\mathcal{M}}}$;

– pour chaque f, symbole de fonction de $\mathcal{L}$, d'arité k, pour $(\widehat{m_1}, \ldots, \widehat{m_k}) \in N^k$, $f^{\mathcal{N}}((\widehat{m_1}, \ldots, \widehat{m_k}) = \widehat{m}$ pour $m = f^{\mathcal{M}}(m_1, \ldots, m_k)$. Les énoncés de T_{eg} assurent que $f^{\mathcal{N}}$ est bien définie et que cela ne dépend pas du choix des représentants des classes d'équivalence.

– pour chaque S, symbole de relation de $\mathcal{L}$ d'arité k, on pose $(\widehat{m_1}, \ldots, \widehat{m_k}) \in S^{\mathcal{N}}$ si et seulement si dans M, $(m_1, \ldots, m_k) \in S^{\mathcal{M}}$. A nouveau, les énoncés de T_{eg} assurent que $S^{\mathcal{N}}$ est bien définie.

On voit que l'interprétation de la relation binaire $R_=$ dans la $\mathcal{L}$-structure N est bien l'égalité. Il reste à montrer que $\mathcal{N} =< N, c^{\mathcal{N}}, f^{\mathcal{N}}, S^{\mathcal{N}}; c, f, S \in \mathcal{L} >$ est bien un modèle de Σ.

On commence par vérifier que pour tout terme $t(v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathcal{L}$, pour tous $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n \in M$ tels que, pour chaque i, $\widehat{a_i} = \widehat{b_i}$,

$$t^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) R_= t^{\mathcal{M}}(b_1, \ldots, b_n).$$

Ceci découle des axiomes de T_{eg} concernant les symboles de fonction et de constantes.

Ensuite, on va montrer, par induction, que si $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ est une formule de $\mathcal{L}$ avec variables libres parmi $\{v_1, \ldots, v_n\}$, alors pour tous $a_1, \ldots, a_n \in M$,

$$(**)\ \mathcal{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \text{ ssi } \mathcal{N} \models \phi(\widehat{a_1}, \ldots, \widehat{a_n}).$$

Pour cela, on commence par vérifier par induction que pour toute formule $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ pour tous $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in M$ tels que, pour chaque i, $\widehat{a_i} = \widehat{b_i}$,

$$(*)\ \mathcal{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \text{ ssi } \mathcal{M} \models \phi(b_1, \ldots, b_n).$$

Si $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ est une formule atomique, $\phi = S(t_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, t_k(v_1, \ldots, v_k))$ pour S un symbole de relation d'arité k du langage, et $t_1, \ldots t_k$ des termes à variables libres parmi $\{v_1, \ldots, v_n\}$, c'est vrai par les axiomes T_{eg} et l'induction sur la hauteur des formules ne pose pas de problèmes.

Ensuite, on vérifie $(**)$. Si $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ est une formule atomique, c'est-à-dire de la forme $S(t_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, t_k(v_1, \ldots, v_n))$ pour S un symbole de relation du langage d'arité k et $t_1, \ldots, t_k$ des termes du langage à variables libres parmi $\{v_1, \ldots, v_n\}$, c'est vrai par définition de l'interprétation de la relation S et des symboles de fonction dans la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{N}$. Et on continue l'induction sans problèmes, grâce à $(*)$. $\square$

On en déduit donc le théorème de complétude suivant.

Proposition 11.2 *Soit $\mathcal{L}$ un langage égalitaire et Σ un ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}$, alors Σ a un modèle égalitaire si et seulement si l'ensemble d'énoncés $\Sigma \cup T_{eg}$ est cohérent.*

On peut aussi choisir de rajouter les énoncés T_{eg} comme nouveau groupe d'axiomes dans la définition des démonstrations formelles. On obtient alors une nouvelle notion $\mid\!\sim_=$ de démonstration formelle et le théorème:

Proposition 11.3 *Soit $\mathcal{L}$ un langage égalitaire et Σ un ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}$. Alors Σ a un modèle égalitaire si et seulement si Σ est cohérent pour la notion de démonstration formelle $\mid\!\sim_=$.*

12 Théorème de compacité

On va donc ici démontrer directement le théorème de compacité, sans utiliser le théorème de complétude ni le lemme de finitude. La méthode employée est la même que pour la complétude, c'est-à-dire les constantes de Henkin et les deux démonstrations sont très similaires.

12.1 Cas général, non égalitaire

Comme pour la complétude, on commence par montrer la compacité (12.1) sans supposer que le langage est égalitaire. On obtient ensuite une version égalitaire (12.6) en utilisant la proposition 11.1. La démonstration suit les mêmes étapes que celle du théorème de complétude.

On suppose donc que $\mathcal{L}$ est un langage non nécéssairement égalitaire.

Théorème 12.1 (Théorème de compacité) *Soient $\mathcal{L}$ un langage et Σ un ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}$ finiment satisfaisable, alors Σ est satisfaisable.*

Remarque: La démonstration construit en fait un modèle de cardinalité inférieure ou égale à $||\mathcal{L}||$.

La démonstration va se faire en trois étapes. Nous avons besoin des deux définitions suivantes:

Définitions Soit Σ un ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}$.

1. On dit que Σ est **maximal** (dans $\mathcal{L}$) si pour tout énoncé θ de $\mathcal{L}$, soit $\theta \in \Sigma$ soit $\neg\theta \in \Sigma$.

2. Σ **admet des témoins de Henkin** dans $\mathcal{L}$ si pour toute formule $\phi(v)$ à une variable libre de $\mathcal{L}$, il existe une constante c de $\mathcal{L}$, telle que

$$\Sigma \vdash (\exists v\, \phi(v) \rightarrow \phi(c)).$$

Remarque: Si Σ admet des témoins de Henkin dans $\mathcal{L}$, alors si Σ', ensemble d'enoncés de $\mathcal{L}$, contient Σ, Σ' admet aussi des témoins de Henkin dans $\mathcal{L}$.

On commence par quelques remarques et rappels utiles:

Lemme 12.2 *Soit Σ ensemble finiment satisfaisable d'énoncés de $\mathcal{L}$.*

1. Soit θ un énoncé de $\mathcal{L}$, $\Sigma \vdash \theta$ si et seulement si $\Sigma \cup \{\neg\theta\}$ n'est pas satisfaisable (= est inconsistant).

2. Soit θ un énoncé de $\mathcal{L}$, alors soit $\Sigma \cup \{\theta\}$ est finiment satisfaisable, soit $\Sigma \cup \{\neg\theta\}$ est finiment satisfaisable.

3. Soit $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$, et $\Sigma_0 \subset \Sigma$ tel que tous les symboles apparaissant dans Σ_0 appartiennent au langage $\mathcal{L}_0$. Alors Σ_0 est satisfaisable si et seulement si il existe une $\mathcal{L}_0$-structure $\mathcal{M}$ telle que $\mathcal{M} \models \Sigma_0$.

Proposition 12.3 *Soit Σ un ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}$ qui est finiment satisfaisable, qui admet des témoins de Henkin dans $\mathcal{L}$ et qui est maximal. Alors Σ a un modèle*

Proposition 12.4 *Soit Σ un ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}$ qui est finiment satisfaisable. Alors il existe $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$, et Σ', un ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}'$, qui étend Σ, qui admet des témoins de Henkin dans $\mathcal{L}'$ et qui est finiment satisfaisable. On peut choisir $\mathcal{L}'$ tel que $||\mathcal{L}'|| = ||\mathcal{L}||$.*

Proposition 12.5 *Soit Σ un ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}$ qui est finiment satisfaisable. Alors il existe Σ', dans $\mathcal{L}$, qui est maximal, finiment satisfaisable, et qui contient Σ.*

Démonstration du Théorème de compacité à partir des Propositions précédentes: Soit donc Σ finiment satisfaisable dans $\mathcal{L}$. Par 12.4, on remplace Σ par $\Sigma' \supset \Sigma$ encore finiment satisfaisable et qui admet des témoins de Henkin dans $\mathcal{L}'$. Par 12.5, soit Σ'' dans $\mathcal{L}'$ étendant Σ', maximal et finiment satisfaisable. Alors Σ'' admet encore des témoins de Henkin dans $\mathcal{L}'$. On applique maintenant 12.3, et on trouve une $\mathcal{L}'$-structure $\mathcal{M}$ qui est modèle de Σ''. Alors la restriction de $\mathcal{M}$ à $\mathcal{L}$ est un modèle Σ. $\square$

Preuve de la Proposition 12.3: On remarque que si Σ est un ensemble maximal de $\mathcal{L}$, et finiment satisfaisable, alors pour tout énoncé θ de $\mathcal{L}$,

$$\Sigma \vdash \theta \text{ ssi } \theta \in \Sigma \text{ ssi } \neg\theta \notin \Sigma.$$

Soit M l'ensemble des termes clos du langage $\mathcal{L}$ (cet ensemble est certainement non vide, puisque il y a des constantes de Henkin dans le langage $\mathcal{L}$).

On met sur l'ensemble M une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ en interprétant les symboles du langage de la façon suivante:

– si c est un symbole de constante de $\mathcal{L}$, on pose $c^{\mathcal{M}} = c$ (c est bien un élément de M!)

– si f est un symbole de fonction d'arité k de $\mathcal{L}$, on définit la fonction $f^{\mathcal{M}} : M^k \mapsto M$ par : si $(t_1, \ldots, t_k) \in M^k$, $f^{\mathcal{M}}(t_1, \ldots, t_k)$ est égal au terme clos de $\mathcal{L}$, $f(t_1, \ldots, t_k)$ (qui est bien un élément de M)

– si R est un symbole de relation d'arité k de $\mathcal{L}$, on définit $R^{\mathcal{M}}$ comme étant l'ensemble $\{(t_1, \ldots, t_k) \in M^k\,;\, R(t_1, \ldots, t_k) \in \Sigma\}$.

Maintenant soit $t(v_1 \ldots, v_n)$ un terme de $\mathcal{L}$ à variables libres parmi $v_1, \ldots, v_n$. On vérifie facilement que si $t_1, \ldots, t_n \in M$, $t^{\mathcal{M}}(t_1, \ldots, t_n)$ est égal au terme clos de $\mathcal{L}$, $t(t_1, \ldots, t_n)$ (résultat de la substitution dans le terme t du terme clos t_i à la variable v_i).

On va maintenant montrer que pour toute formule de $\mathcal{L}$, $\phi(v_1, \ldots, v_n)$, pour tout $(t_1, \ldots, t_n) \in M^n$,

$$\mathcal{M} \models \phi(t_1, \ldots, t_n) \text{ ssi } \phi(t_1, \ldots, t_n) \in \Sigma.$$

Par induction sur la hauteur de ϕ:

– Si $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ est une formule atomique c'est par définition de l'interprétation des symboles de relations et de fonctions (et donc des termes) dans la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$.

– Si $\phi(v_1, \ldots, v_n) = \phi_1(v_1, \ldots, v_n) \wedge \phi_2(v_1, \ldots, v_n)$ et $(t_1, \ldots, t_n) \in M^k$, on a:

$$\mathcal{M} \models \phi(t_1, \ldots, t_n) \text{ ssi } \mathcal{M} \models \phi_1(t_1, \ldots, t_n) \text{ et } \mathcal{M} \models \phi_2(t_1, \ldots, t_n).$$

Par induction, cela ssi

$$\phi_1(t_1, \ldots, t_n) \in \Sigma \text{ et } \phi_2(t_1, \ldots, t_n) \in \Sigma$$

Par maximalité de Σ, cela ssi $\phi(t_1, \ldots, t_n) \in \Sigma$.

– Si $\phi(v_1, \ldots, v_n) = \neg\psi(v_1, \ldots, v_n)$, on a: $\mathcal{M} \models \neg\psi(t_1, \ldots, t_n)$ ssi on n'a pas que $\mathcal{M} \models \psi(t_1, \ldots, t_n)$, ssi, par induction, on n'a pas que $\psi(t_1, \ldots, t_n) \in \Sigma$, ssi, par maximalité de Σ, $\neg\psi(t_1, \ldots, t_n) \in \Sigma$.

– De même pour les autres connecteurs.

– Si $\phi(v_1, \ldots, v_n) = \exists v\, \psi(v, v_1, \ldots, v_n)$; si $\mathcal{M} \models \exists v\, \psi(v, t_1, \ldots, t_n)$, c'est-à-dire, s'il existe $t \in M$ tel que $\mathcal{M} \models \psi(t, t_1, \ldots, t_n)$, alors par induction, $\psi(t, t_1, \ldots, t_n) \in \Sigma$. Par maximalité et finie satisfaisabilité, on doit alors avoir que $\exists v\, \psi(v, t_1, \ldots, t_n) \in \Sigma$. Réciproquement, si $\exists v\, \psi(v, t_1, \ldots, t_n) \in \Sigma$, alors, Σ admettant des témoins de Henkin, il y a un symbole de constante c de $\mathcal{L}$ tel que

$$\Sigma \vdash (\exists v\, \phi(v, t_1, \ldots, t_n) \rightarrow \phi(c, t_1, \ldots, t_n)).$$

Il suit que $\Sigma \vdash \phi(c, t_1, \ldots, t_n)$ et donc par maximalité que $\phi(c, t_1, \ldots, t_n) \in \Sigma$. $\square$

Preuve de la Proposition 12.4: Soit donc Σ un ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}$, finiment satisfaisable.

On construit pour chaque n, un langage L_n et un ensemble d'énoncés Σ_n de L_n tels que:

– $L_0 = \mathcal{L}$, $\Sigma_0 = \Sigma$

– $L_{n+1} = L_n \cup \{c_{\phi(v)}; \phi(v) \text{ formule à une variable libre de } L_n\}$ où les $c_{\phi(v)}$ sont des symboles de constantes n'apparaissant pas dans L_n

– $\Sigma_{n+1} \supset \Sigma$, Σ_{n+1} est finiment satisfaisable, et pour chaque formule $\phi(v)$ à une variable libre de L_n, la formule $(\exists v\, \phi(v) \rightarrow \phi(c_{\phi(v)})) \in \Sigma_{n+1}$.

On pose alors $\mathcal{L}' = \bigcup_n L_n$, et $\Sigma' = \bigcup_n \Sigma_n$. Alors $\Sigma' \supseteq \Sigma$, Σ' est finiment satisfaisable, Σ' admet bien des témoins de Henkin dans $\mathcal{L}'$.

Pour construire Σ_{n+1}, on pose

$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\exists v\, \phi(v) \rightarrow \phi(c_{\phi(v)}); \phi(v) \text{ formule à une variable libre de } L_n\}.$$

Il reste à vérifier que si Σ_n est finiment satisfaisable, Σ_{n+1} reste finiment satisfaisable. Soit F un sous-ensemble fini de Σ_{n+1}, alors il existe $\phi_1(v), \ldots, \phi_k(v)$ formules à une variable libre de L_n telles que

$$F \subset F_1 \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_k\}$$

où $\theta_i = (\exists v\, \phi_i(v) \rightarrow \phi_i(c_{\phi_i(v)}))$ et F_1 est un sous-ensemble fini de Σ_n. Par hypothèse Σ_n est finiment satisfaisble donc F_1 a un modèle $\mathcal{M}$, qui est une L_n-structure. On enrichit $\mathcal{M}$ en une $\mathcal{L}_{n+1}$-structure: si $\phi(v)$ est une formule de L_n qui n'est pas égale à l'une des $\phi_i(v)$, on choisit n'importe quel élément m de M, et on pose ${c_{\phi(v)}}^{\mathcal{M}} = m$. Pour chaque i, si $\mathcal{M} \models \neg(\exists v\, \phi_i(v))$, alors à nouveau on prend n'importe quel $m \in M$ pour interpréter le symbole de constante $c_{\phi_i(v)}$ et on toujours $\mathcal{M} \models \theta_i$. Si $\mathcal{M} \models \exists v\, \phi_i(v)$, il existe $a \in M$ tel que $\mathcal{M} \models \phi_i(a)$. On interprète alors la constante $c_{\phi_i(v)}$ par l'élément a et on a bien aussi $\mathcal{M} \models \theta_i$. La L_{n+1}-structure $\mathcal{M}$ ainsi définie est donc bien un modèle de F. $\square$

Preuve de la Proposition 12.5: On va utiliser le lemme de Zorn (si le langage est dénombrable, on peut le faire "à la main").

On a donc un ensemble d'énoncés Σ dans un langage $\mathcal{L}$, qui est finiment satisfaisable. On considère l'ensemble E de toutes les ensembles d'énoncés de $\mathcal{L}$ qui contiennent Σ et sont finiment satisfaisables, ordonné par la relation d'inclusion. Il est facile de vérifier que tout sous-ensemble totalement ordonné de E admet un majorant, la réunion de ses éléments. Le lemme de Zorn nous assure alors que E a un élément maximal, c'est-à-dire qu'il y a un ensemble $\widehat{\Sigma}$ de $\mathcal{L}$, qui contient Σ, qui est finiment satisfaisable, et qui est tel que si Σ' est finiment satisfaisable et contient $\widehat{\Sigma}$, alors $\Sigma' = \widehat{\Sigma}$. Vérifions que $\widehat{\Sigma}$ est bien maximal dans notre sens: soit θ un énoncé de $\mathcal{L}$, supposons que $\theta \notin \widehat{\Sigma}$. Alors, si $\widehat{\Sigma} \vdash \theta$, certainement $\widehat{\Sigma} \cup \{\theta\}$ est finiment satisfaisable et contredit la maximalité de $\widehat{\Sigma}$. Donc il n'est pas vrai que $\widehat{\Sigma} \vdash \theta$ c'est-à-dire (12.2), $\widehat{\Sigma} \cup \{\neg\theta\}$ est finiment satisfaisable. Par maximalité de $\widehat{\Sigma}$, $\neg\theta \in \widehat{\Sigma}$. □

12.2 Passage aux structures égalitaires

Supposons maintenant que $\mathcal{L}$ est un langage égalitaire, donc contient un symbole de relation binaire distingué, noté $R_=$, et qu'on ne veut, comme on le fait d'habitude, considérer que des modèles égalitaires, c'est-à-dire des $\mathcal{L}$-structures dans lesquelles le symbole $R_=$ est interprété par l'égalité.

On veut donc montrer la version précise suivante du théorème de compacité (qui est en fait celui que l'on a utilisé en cours jusqu'ici):

Proposition 12.6 *Soit $\mathcal{L}$ un langage égalitaire et Σ un ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}$ tel que tout sous-ensemble fini de Σ admet un modèle égalitaire. Alors Σ admet un modèle égalitaire.*

On peut démontrer directement ce théorème en refaisant la construction de Henkin en tenant compte de la relation $R_=$ et de ses propriétés spécifiques, mais il est plus simple, comme pour le théorème de complétude d'utiliser la proposition 11.1. Il suffit d'appliquer le théorème de compacité 12.1 à l'ensemble d'énoncés $\Sigma \cup T_{eg}$.