Théorie des ensembles

Résumé des premières définitions

1 Les axiomes et les premiers ensembles

Le cadre:

On considère un langage égalitaire comprenant un symbole de relation binaire (et donc bien sûr aussi l'égalité). Nous notons cette relation $\in$ et le langage $\mathcal{L}_\in = \{\in\}$.

Nous considérons des $\mathcal{L}_\in$-structures égalitaires, $\mathcal{U} =< U, \in^U >$, qu'on appellera **univers**. Dans $\mathcal{U}$, il y a donc une interprétation de la relation binaire $\in$, que nous noterons par la suite, pour alléger la notation, aussi $\in$ et non comme nous devrions le faire $\in^U$.

Un élément de la $\mathcal{L}_\in$-structure $\mathcal{U}$ est appelé **un ensemble**, et on essaiera de n'utiliser le mot ensemble que dans ce sens.

La relation binaire $\in$ met donc en relation deux ensembles, nous l'écrirons $x \in y$, lu "l'ensemble x **appartient** à l'ensemble y" ou "l'ensemble x est **élément** de l'ensemble y". (Nous éviterons donc dorénavant d'écrire informellement que $a \in \mathcal{U}$, nous dirons dans ce cas, a est un ensemble (dans $\mathcal{U}$)) .

Nous allons donner en plusieurs étapes une théorie du langage $\mathcal{L}_\in$, ZF (pour Zermelo-Fraenkel). Nous ne nous préoccupons pas pour le moment du problème de la consistance des énoncés qui constituent cette théorie.

LES AXIOMES:

AX(1) L'axiome d'extensionnalité

$$\forall x \; \forall y \; (\forall z \; (z \in x \leftrightarrow z \in y)) \rightarrow (x = y)$$

Si $\mathcal{U} \models AX(1)$, alors deux ensembles dans $\mathcal{U}$ sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments.

AX(2) L'axiome de la paire

$$\forall x \; \forall y \; \exists z \; \forall u \; (u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y)$$

C'est-à-dire, si $\mathcal{U} \models AX(1) \wedge AX(2)$, pour tous a, b ensembles de $\mathcal{U}$, il existe un (unique) ensemble c qui a comme seuls éléments les ensembles a et b. On l'appelle **la paire** $\{a, b\}$. Si $a = b$, on l'appelle **le singleton** $\{a\}$.

Si $\mathcal{U} \models AX(1) \wedge AX(2)$ alors pour tous a, b ensembles de $\mathcal{U}$, il existe un ensemble appelé la **paire ordonnée**, ou **le couple** (a, b): c'est l'ensemble $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Par induction sur n on définit aussi pour $a_1, \ldots, a_n$ ensembles, le n-uplet $(a_1, \ldots, a_n) = (a_1, (a_2, \ldots, a_n))$.

AX(3) L'axiome de la réunion

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y\ \leftrightarrow\ \exists t(t \in x \wedge z \in t)$$

C'est-à-dire, si $\mathcal{U} \models AX(1) \wedge AX(3)$, pour tout ensemble a, il existe un (unique) ensemble, noté $\bigcup a$, ou $\bigcup_{x \in a} x$, appelé **réunion de** a, dont les éléments sont exactement les éléments des éléments de a.

On peut alors définir par induction sur n, pour $a_1, \ldots, a_n$ ensembles, l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_n\}$ dont les éléments sont exactement les ensembles $a_1, \ldots, a_n$: c'est

$$\{a_1, \ldots, a_n\} = \bigcup \{\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}, \{a_n\}\}.$$

Puis l'ensemble noté $a_1 \cup \ldots \cup a_n$, la réunion des ensembles $a_1, \ldots, a_n$ qui est égal à $\bigcup \{a_1, \ldots, a_n\} = \bigcup_{x \in \{a_1, \ldots, a_n\}} x$.

AX(4) L'axiome de l'ensemble des parties

Si a, b sont des ensembles, on écrit $a \subset b$ pour la formule $\forall x\ (x \in a \rightarrow x \in b)$, lu "$a$ est un sous-ensemble de b".

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y\ \leftrightarrow\ z \subset x)$$

C'est-à-dire, si a est un ensemble, il existe un ensemble, noté $\mathcal{P}(a)$ dont les éléments sont exactement les sous-ensembles de a.

Si $\phi(x)$ est une formule, on appellera **collection** définie par $\phi(x)$ dans $\mathcal{U}$ la sous-partie de $\mathcal{U}$ formée des ensembles a tels que $\mathcal{U} \models \phi(a)$, notée $\{a; \mathcal{U} \models \phi(a)\}$.

SC Schéma de compréhension

Pour chaque formule $\phi(x, w_1, \ldots, w_k)$ de $\mathcal{L}_\in$, on a l'énoncé suivant:

$$\forall w_1, \ldots \forall w_k \forall t \exists y \forall x\ (x \in y \leftrightarrow (x \in t \wedge \phi(x, w_1, \ldots, w_k)).$$

C'est-à-dire, si $a_1, \ldots, a_n$ sont des ensembles, si t est un ensemble, alors la collection des ensembles x de $\mathcal{U}$, qui sont éléments de t et qui sont tels que $\mathcal{U} \models \phi(x, a_1, \ldots, a_n)$ forme un ensemble c, qu'on note $c = \{x \in t; \mathcal{U} \models \phi(x, a_1, \ldots, a_n)$.

On ne peut pas supprimer l'ensemble t (paradoxe de Russel): la collection S des ensembles x dans $\mathcal{U}$ tels que $\mathcal{U} \models x \notin x$ ne forme pas un ensemble. Sinon, soit c cet ensemble alors $\mathcal{U} \models c \notin c$ si et seulement si $\mathcal{U} \models c \in c$, ce qui est impossible.

Cela entraine que l'univers $\mathcal{U}$ lui-même ne forme pas un ensemble, c'est-à-dire, il n'existe pas d'ensemble c dans $\mathcal{U}$ telque $\forall x\ x \in c$: sinon, on pourrait, par le schéma de compréhension appliqué à cet ensemble c, déduire que la collection S au-dessus est un ensemble.

SR Schéma de remplacement ou de substitution

Pour chaque formule $\phi(x, y, w_1, \dots, w_k)$ de $\mathcal{L}_\in$, on a l'énoncé:

$$\forall w_1, \dots w_k \ (\forall x \forall y \forall z (\phi(x, y, w_1, \dots, w_k) \wedge \phi(x, z, w_1, \dots, w_k) \to y = z)$$

$$\to (\forall t \ \exists u \forall y \ (y \in u \leftrightarrow \exists x (x \in t \wedge \phi(x, y, w_1, \dots, w_k))))).$$

C'est-à-dire, si $a_1, \dots, a_k$ sont des ensembles, si la formule $\phi(x, y, a_1, \dots, a_k)$ définit une relation fonctionelle (pour chaque x, il existe au plus un y tel que $\phi(x, y, a_1, \dots, a_k)$), alors, si b est un ensemble, la collection des ensembles y qui sont image d'un élément x de b forme un ensemble.

Lemme 1.1 *Le schéma de remplacement implique le schéma de compréhension.*

Preuve: Soit $\phi(x, w_1, \dots, w_k)$ une formule de $\mathcal{L}_\in$. On applique le schéma de remplacement à la formule $\psi(x, y, w_1, \dots, w_k) = \phi(x, w_1, \dots, w_k) \wedge x = y$, qui est bien fonctionelle.

On appelle $\mathbf{Z}^-$ la théorie formée des Axiomes 1 à 4 et du Schéma de Compréhension.
On appelle $\mathbf{ZF}^-$ la théorie formée des Axiomes 1 à 4 et du Schéma de Remplacement.

PREMIÈRES PROPRIÉTÉS.

– 1. Si $\mathcal{U}$ est un modèle de Z^-, alors il existe un (unique) ensemble qui n'a auncun élément, qu'on note $\emptyset$: soit a un ensemble quelconque dans $\mathcal{U}$, alors

$$\emptyset = \{x \in a \ ; \ x \neq x\}.$$

– 2. Si $\mathcal{U}$ est un modèle des axiomes 1,3,4 et du Schéma de remplacement, alors $\mathcal{U}$ est un modèle de l'axiome 2 (axiome de la paire).

Enfin, **la théorie ZF** est formée de ZF^- et du dernier axiome, sur lequel nous reviendrons plus tard, **l'axiome de l'infini, AI** :

$$\exists x \ (\emptyset \in x \wedge \forall y \ (y \in x \to y \cup \{y\} \in x)).$$

Attention certains auteurs incluent dans ZF, un axiome supplémentaire, **l'axiome de fondation, AF** sur lequel nous reviendrons également:

$$\forall x \ (x \neq \emptyset \ \to \ \exists y (y \in x \ \wedge y \cap x = \emptyset)).$$

Cet axiome implique que la relation d'appartenance sur l'univers $\mathcal{U}$ est "bien fondée": il n'existe pas d'ensemble infini I et de suite $(u_i)_{i \in I}$ telle que $u_{n+1} \in u_n$ pour tout n. Il implique aussi en particulier que pour tout x, $x \notin x$.

On a défini également en cours : **produit cartésien, application, intersection, familles indexées, produit**.

2 Petites remarques sur l'ensemble vide, Axiome du choix

On a vu que dans tout modèle $\mathcal{U}$ de ZF^-, il existe un (unique) ensemble qui n'a aucun élément, noté $\emptyset$.

Qu'en est-il des différentes constructions d'ensembles données par les axiomes, dans le cas de l'ensemble vide?

La réunion:

- $\bigcup \emptyset$ est un ensemble par l'axiome de la réunion et est égal à $\emptyset$.

- Si I est un ensemble, et $a = (a_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles indexée par I (c'est-à-dire une application de domaine I), on définit la réunion de la famille, notée $\bigcup_{i \in I} a_i$, comme étant $\bigcup Im(a)$. Il s'agit bien d'un ensemble par l'axiome de la réunion. Et on a

$$\mathcal{U} \models \forall x \ ((x \in \bigcup_{i \in I} a_i) \ \leftrightarrow (\exists i \ i \in I \ \wedge \ x \in a_i)).$$

Si $I = \emptyset$, $\bigcup_{i \in I} a_i = \emptyset$.

L'intersection

- Si a est un ensemble, on définit $\cap a$ comme étant la collection des ensembles x de $\mathcal{U}$ satisfaisant la formule suivante:

$$\forall y \ y \in a \ \rightarrow \ x \in y.$$

Si $a = \emptyset$ cette collection est l'univers $\mathcal{U}$ tout entier et n'est donc pas un ensemble.
Si $a \neq \emptyset$, cette collection est un ensemble par le schéma de compréhension: soit c un élément arbitraire de a, alors

$$\bigcap a = \{x \in c; \forall y \ y \in a \ \rightarrow \ x \in y\}.$$

- Si I est un ensemble, et $a = (a_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles indexée par I, on définit $\bigcap_{i \in I} a_i$ comme étant la collection $\bigcap Im \ a$, donc définie par la formule:

$$\forall i \ i \in I \ \rightarrow \ x \in a_i.$$

A nouveau, ceci est un ensemble si et seulement si I est non vide.

Applications et produit

- Rappelons que nous avons défini une application f de a dans b comme étant un sous-ensemble de $a \times b$ tel que pour tout $x \in a$, il existe un et un seul y dans b tel que $(x, y) \in f$, noté $f(x) = y$.

- Pour tout ensemble b, il existe une unique application de $\emptyset$ dans b, c'est l'ensemble $\emptyset$. En revanche, si $a \neq \emptyset$, il n'existe pas d'application de a dans $\emptyset$.

- Si a et b sont des ensembles, b^a (lu b puissance a) est l'ensemble de toutes les applications de a dans b (c'est-à-dire de domaine a et d'image incluse dans b). On a: $b^\emptyset = \{\emptyset\}$, $\emptyset^\emptyset = \{\emptyset\}$, et si $a \neq \emptyset$, $\emptyset^a = \emptyset$.

- Si I est un ensemble, et $a = (a_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles indexée par I, on définit le produit de la famille $(a_i)_{i\in I}$, noté $\Pi_{i\in I}a_i$ comme étant l'ensemble suivant (par compréhension)

$$\{f \in (\bigcup_{i\in I} a_i)^I \ ; \forall i \ i \in I \ \to f(i) \in a_i\}.$$

Si $I = \emptyset$, $\Pi_{i\in I}a_i = \{\emptyset\}$. Si $I \neq \emptyset$, et pour un $i \in I$, $a_i = \emptyset$, alors $\Pi_{i\in I}a_i = \emptyset$. Si $I \neq \emptyset$ et pour chaque $i \in I$, $a_i \neq \emptyset$, alors $\Pi_{i\in I}a_i$ peut être vide.

L'axiome du choix, AC, dit justement: si pour chaque $i \in I$, $a_i \neq \emptyset$, alors $\Pi_{i\in I}a_i \neq \emptyset$.

3 Ensembles bien ordonnés, ordinaux

On appelera **relation d'ordre strict** une relation R transitive et telle que pour tout x on n'a jamais xRx.

On suppose que $\mathcal{U} \models ZF^-$.

Définition: 1. Soit a un ensemble et $r \subset a \times a$. On dit que r est une relation de **bon ordre** sur a, ou que (a, r) est bien ordonné, si r est une relation d'ordre sur a et r est un bon ordre, c'est-à-dire, tout sous-ensemble non vide de a possède un plus petit élément.
2. $s \subset a$ est un **segment initial** pour r si pour tous $x, y \in a$, si $x \in s$ et $(y, x) \in r$, alors $y \in s$. Si $b \in a$, alors l'ensemble $S_b(a, r) = \{x \in a; (, b) \in r \wedge x \neq b\}$ est un segment initial de a.

Remarque: Si r est un bon ordre sur a, , alors r est un ordre total sur a (pour $x, y \in a$, le sous-ensemble $\{x, y\}$ doit avoir un plus petit élément).

On considère un ensemble a muni d'un bon ordre, qu'on note $\leq$.

Lemme 3.1 *$s \subset a$ est un segment initial pour $(a, \leq)$ si et seulement si $s = a$ ou bien $s = S_b(a, \leq)$ pour un $b \in a$.*

Définition: Un ensemble a est un **ordinal** si
(1) $\in$ est une relation d'ordre strict sur a
(2) $(a, \in)$ est bien ordonné
(3) a est un ensemble *transitif* c'est-à-dire tel que $\mathcal{U} \models \forall x\, (x \in a \ \to \ x \subset a)$.

Lemme 3.2 *Les ensembles de $\mathcal{U}$ qui sont des ordinaux forment une collection définissable. On notera $On(v)$ la formule qui la définit, et On la collection elle-même.*

Exemples: les ensembles suivants sont des ordinaux: $0 := \emptyset$, $1 := \{\emptyset\}$, $2 := \{0, 1\}$, ..., $n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$,....

Lemme 3.3 *Soit α un ordinal.*
1. $\alpha \notin \alpha$
2. Si $b \in \alpha$, b est un ordinal
3. $s \subset a$ est un segment initial pour $(\alpha, \in)$ si et seulement si $s = \alpha$ ou bien $s \in \alpha$.

Proposition 3.4 *Soient* α, β *des ordinaux. Alors un et un seul des trois cas suivants est posssible:* $\alpha = \beta$ *ou bien* $\alpha \in \beta$ *ou bien* $\beta \in \alpha$.

Proposition 3.5 *La relation* $\in$ *est une relation d'ordre strict sur la collection des ordinaux. C'est une relation de bon ordre au sens suivant: pour toute formule* $\phi(v, w_1, \ldots, w_k)$ *de* $\mathcal{L}_\in$, *pour tous* $a_1, \ldots, a_k$ *ensembles, si la sous-collection de* On, $\{x; \mathcal{U} \models On(x) \wedge \phi(x, a_1, \ldots, a_k)\}$ *n'est pas vide, alors elle a un plus petit élément.*

Corollaire 3.6 *La collection* On *n'est pas un ensemble*