Théorie des ensembles (Notes 8)

Suite : Les cardinaux
(On continue la numérotation en suivant celle des notes n° 6 et 7)

4 Les cardinaux

On suppose maintenant que $\mathcal{U}$ est un modèle de ZFC = ZF + Axiome du choix.

Par la proposition 3.2 , $\mathcal{U}$ satisfait le théorème de Zermelo, c'est-à-dire, tout ensemble a peut être muni d'un bon ordre. Par la Proposition 2.12, pour tout ensemble a, il existe donc (au moins) un ordinal α et une bijection f de α sur a.

Définition 1. Soit a un ensemble, on appelle **cardinal de** a, noté $|a|$ ou $\overline{\overline{a}}$, le plus petit ordinal α qui est en bijection avec a.
2. Soient a, b seux ensembles. On dit que a et b sont **équipotents** (dans $\mathcal{U}$) s'il existe une bijection f de a sur b.

On voit donc que a et b sont équipotents dans $\mathcal{U}$ si et seulement si $|a| = |b|$.
3. Un ordinal α est **un cardinal** si $\alpha = |\alpha|$. On note Cn la sous-collection définissable des ordinaux qui sont des cardinaux

$$\mathcal{U} \models Cn(x) \text{ ssi } \mathcal{U} \models (On(x) \wedge \forall y(On(y) \wedge \exists f \text{ “bijection de } x \text{ sur } y\text{” }) \rightarrow x \leq y).$$

Lemme 4.1 (exercice) *Tout ordinal fini est un cardinal.*

On remarque que : ω est un cardinal, $\omega = |\omega + n| = |\omega + \omega|$.

On dit qu'un ensemble est fini si son cardinal est un ordinal fini, qu'il est dénombrable (infini) si il est de cardinal égal à ω.

Proposition 4.2 *Soient a et b deux ensembles non vides, les conditions suivantes sont équivalentes:*
(i) $|a| \leq |b|$,
(ii) il existe une injection de a dans b,
(iii) il existe une surjection de b dans a.

Corollaire 4.3 (Cantor-Bernstein) *Si il existe une injection de a dans b et une injection de b dans a, alors il existe une bijection de a dans b.*

Remarque: On peut aussi démontrer directement, comme on le fait d'habitude le théorème de Cantor-Bernstein dans tout modèle de ZF (sans utiliser AC en fait).

Lemme 4.4 *Soit a un ensemble, alors* $|a| < |\mathcal{P}(a)|$.

Lemme 4.5 (exercice) *Soit c un ensemble dont tous les éléments sont des cardinaux. Alors la borne supérieure de c,* $\cup_{x \in c} x$ *est un cardinal.*

Corollaire 4.6 *La collection des cardinaux n'est pas un ensemble.*

On considère maintenant la collection Cn_∞ des cardinaux infinis. C'est une sous-collection des ordinaux, elle est donc bien ordonnée.
Remarques: *Un cardinal infini est toujours un ordinal limite.* Si λ est un cardinal, on appelle **cardinal successeur** de λ, noté λ^+, le premier cardinal strictement supérieur à λ. On appelle **cardinal limite** un cardinal infini qui n'est pas un cardinal successeur.

On construit un isomorphisme de bon ordre entre On et Cn_∞, la fonction $\aleph$.

Définition par induction:
- $\aleph_0 = \omega$
- $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$
- si β est un ordinal limite $\aleph_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \aleph_\alpha$.

On remarque que on peut également définir la relation fonctionnelle $\aleph$ directement:

$\aleph_\alpha$ est égal à l'unique cardinal infini γ tel que l'ensemble $\{\delta < \gamma; Cn_\infty(\delta)\}$ est de type d'ordre α.

Proposition 4.7 *1. La fonction* $\aleph$ *est strictement croissante et surjective.*
2. Pour tout ordinal α, $\alpha \leq \aleph_\alpha$

Notation: Soient α, β deux cardinaux. On note β^α le cardinal de l'ensemble β^α, ensemble des applications de β dans α.
Avec cette notation, on a donc, pour tout cardinal λ, $|\mathcal{P}(\lambda)| = |\{f \in \{0,1\}^\lambda\}|) = 2^\lambda$.
Par définition de $\aleph_1$ et par 4.4, dans tout modèle $\mathcal{U}$ de ZFC, on a :

$$\omega = \aleph_0 < \aleph_1 \leq 2^{\aleph_0} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|.$$

L'hypothèse du Continu dit justement: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.
L'hypothèse généralisée du Continu dit: pour tout ordinal α, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, ou de manière équivalente, pour tout cardinal infini κ, $2^\kappa = \kappa^+$.
On a les résultats de consistance relative suivants (énoncés mais non démontrés en cours!):

Théorème 4.8 *1. Si ZFC a un modèle, alors ZFC a un modèle dans lequel l'hypothèse du continu est vraie.*
2. Si ZFC a un modèle, alors ZFC a un modèle dans lequel l'hypothèse du continu est fausse.

On dit que l'Hypotèse du Continu est **indépendante** de ZFC.

Pour les opérations élémentaires sur les cardinaux, sommes, produits finis et infinis, voir le TD n°13.