MAGISTERE MATH.-INFO. (2003-2004) **Logique**
E. Bouscaren

Calcul des prédicats, Compacité - Devoir 1

A rendre pour le 19 décembre 2003. Très fortement conseillé à ceux qui ont eu des difficultés lors du partiel.

On ne considère que des langages égalitaires.

Exercice I
Soit n un entier strictement positif et $\mathcal{L}_n = \{U_0, \ldots, U_n\}$ où chaque U_i est un symbole de relation unaire (= d'arité égale à un).
(1). Ecrire une théorie T_n de $\mathcal{L}_n$ dont les modèles sont exactement les $\mathcal{L}_n$-structures $\mathcal{M}$ telles que les sous-ensembles ${U_i}^{\mathcal{M}}$ pour $0 \leq i \leq n$ sont tous infinis, sont deux-à-deux disjoints. et telles que $M = \bigcup_{0 \leq i \leq n} {U_i}^{\mathcal{M}}$. Montrer que la théorie T_n n'est pas finiment axiomatisable.
(2). Montrer que la théorie T_n n'a qu'un seul modèle dénombrable à $\mathcal{L}_n$-isomorphisme près.
(3). La théorie T_n est-elle également κ-catégorique pour un cardinal κ non dénombrable?
(4). La théorie T_n est-elle complète?

Soit $\mathcal{L} = \{U_i; i \in \mathbb{N}\}$, où chaque U_i est un symbole de relation unaire (= d'arité égale à un).

(5). Ecrire une théorie T de $\mathcal{L}$ dont les modèles sont exactement les $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{M}$ telles que les sous-ensembles ${U_i}^{\mathcal{M}}$ sont tous infinis et sont deux-à-deux disjoints.
(6). On dit qu'un modèle $\mathcal{M}$ de la théorie T est "standard" si son ensemble de base M est égal à la réunion des sous-ensembles ${U_i}^{\mathcal{M}}$. Montrer que la théorie T a des modèles non-standards en toute cardinalité infinie.
(7). Montrer que la théorie T a un unique modèle dénombrable standard à $\mathcal{L}$-isomorphisme près.
(8). Montrer qu'il existe une suite $(\mathcal{M}_i)_{i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ de modèles dénombrables de T, telle que:
- $\mathcal{M}_0$ est l'unique modèle standard dénombrable,
- pour $i < j \in \mathbb{N}$ $\mathcal{M}_i \subset_{\mathcal{L}} \mathcal{M}_j$ (c'est-à-dire $\mathcal{M}_i$ est une $\mathcal{L}$-sous-structure de $\mathcal{M}_j$).
- pour $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{M}_i$ et $\mathcal{M}_j$ ne sont pas $\mathcal{L}$-isomorphes,
- $\mathcal{M}_\infty = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_i$,
- pour chaque modèle $\mathcal{N}$ dénombrable de T, il existe (un unique) $i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tel que $\mathcal{N}$ est $\mathcal{L}$-isomorphe à $\mathcal{M}_i$.

(9). Montrer que si $\mathcal{M}$ est un modèle dénombrable de T, alors $\mathcal{M}$ a une extension $\mathcal{L}$-élémentaire $\mathcal{L}$-isomorphe au modèle $\mathcal{M}_\infty$ de la question précédente.
(10). Déduire de (9) que la théorie T est une théorie complète.

Exercice II.
Soient $\mathcal{L}$ un langage, $\mathcal{M} =< M, ... >$ une $\mathcal{L}$-structure et $\mathcal{L}(M)$ le langage associé à la structure $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L} \cup \{c_m \ ; \ m \in M\}$$

où, pour chaque $m \in M$, c_m est un nouveau symbole de constante.
On appelle **Diagramme positif** de $\mathcal{M}$, la théorie suivante dans le langage $\mathcal{L}(\mathcal{M})$:

$$Diagpos(\mathcal{M}) = \{\phi(c_{m_0}, \ldots, c_{m_n}) \ ; \ \phi(v_0, \ldots, v_n) \textbf{ formule atomique } \text{de } \mathcal{L}, \text{ telle que}$$

$$\mathcal{M} \models \phi(m_0, \ldots, m_n), m_0, \ldots, m_n \in M, n \geq 0\}.$$

(1) *(prière de rédiger les questions a) et b) avec beaucoup de soin)*
a) Montrer que s'il existe un $\mathcal{L}$-homomorphisme de $\mathcal{M}$ dans une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{N}$, alors on peut enrichir $\mathcal{N}$ en une $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-structure de façon que

$$\mathcal{N} \models \mathit{Diagpos}(\mathcal{M}) \text{ (en tant que } \mathcal{L}(\mathcal{M})\text{-structure).}$$

b) Montrer que si $\mathcal{N}$ est une $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-structure qui est modèle de $\mathit{Diagpos}(\mathcal{M})$, alors il existe un $\mathcal{L}$-homomorphisme de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$.

(2) Soit $\mathcal{L} = \{\leq\}$ et T_0 la théorie dont les modèles sont exactement les structures $\mathcal{E} =< E, \leq^{\mathcal{E}}>$ pour lesquelles $\leq^{\mathcal{E}}$ est une relation d'ordre.
a) Vérifier que si $< E, \leq>$ est un ensemble ordonné **fini**, alors on peut étendre la relation d'ordre $\leq$ en une relation **d'ordre total** $\leq_1$ sur E de façon que pour tous $e_1, e_2 \in E$,

$$\text{si } e_1 \leq e_2, \text{ alors } e_1 \leq_1 e_2.$$

b) Soit $\mathcal{E} =< E, \leq^{E}>$ un ensemble ordonné, c'est-à-dire un modèle de T_0 et $\mathcal{L}(\mathcal{E}) = \mathcal{L} \cup \{c_e ; e \in E\}$, le langage associé à $\mathcal{E}$. Montrer que la théorie suivante

$$T_1 \ = T_0 \cup \ \mathit{Diagpos}(\mathcal{E}) \cup \{c_e \neq c_f \ ; e \neq f, e, f \in E\} \cup \{\forall x \ \forall y \ (x \leq y \ \vee \ y \leq x)\}$$

est finiment consistante.
c) Soit $\mathcal{E} =< E, \leq^{\mathcal{E}}>$ un ensemble ordonné, montrer, en utilisant les questions précédentes, qu'il existe un ensemble totalement ordonné $\mathcal{F} =< F, \leq_{\mathcal{F}}>$ et un $\mathcal{L}$-homomorphisme injectif h de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$. Cet homomorphisme h est-il en général un $\mathcal{L}$-plongement?
d) Soit $\mathcal{E} =< E, \leq^{E}>$ un ensemble ordonné quelconque. Déduire de la question précédente que l'on peut étendre la relation d'ordre $\leq^{\mathcal{E}}$ en une relation d'ordre **total** $\leq_1$ sur E de façon que pour tous $e_1, e_2 \in E$, si $e_1 \leq^{\mathcal{E}} e_2$, alors $e_1 \leq_1 e_2$.