**MAGISTERE MATH.-INFO. (2003-2004)** **Logique - E. Bouscaren**

# Examen Jeudi 29 Janvier 2004

__**CALCUL DES PRÉDICATS**__ On ne considère que des langages et des structures **égalitaires**.

**Exercice (I):** Soit $\mathcal{L} = \{R\}$, avec $R$ un symbole de relation binaire.
**a)** Soit $\mathcal{K}$ la classe des $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{M} =< M, R^{\mathcal{M}} >$ telles que :
- $R^{\mathcal{M}}$ est une relation d'équivalence,
- pour chaque entier $n > 0$, dans $M$ il y a une et une seule classe de cardinalité $n$.

Trouver une théorie $T$ qui axiomatise la classe $\mathcal{K}$ dans le langage $\mathcal{L}$. La classe $\mathcal{K}$ est-elle finiment axiomatisable?
**b)** Montrer que $T$ a, à $\mathcal{L}$-isomorphisme près, un unique modèle $\mathcal{M}_0$ tel que toutes les $R$-classes d'équivalence soient finies et que tout modèle de $T$ a une $\mathcal{L}$-sous-structure isomorphe à $\mathcal{M}_0$.
**c)** Montrer que $T$ a un nombre dénombrable infini de modèles dénombrables deux-à-deux non $\mathcal{L}$-isomorphes. Décrire tous ces modèles. La théorie $T$ est-elle $\lambda$-catégorique pour un cardinal $\lambda$ non dénombrable?
**d)** Montrer que tout modèle dénombrable $\mathcal{M}$ de $T$ a une extension élémentaire dénombrable $\mathcal{N}$, dans laquelle la relation d'équivalence $R^{\mathcal{N}}$ a une infinité de classes infinies.
**e)** Montrer que la théorie $T$ est complète.
**f)** Soit $\mathcal{N}$ un modèle dénombrable de $T$ avec au moins une classe infinie. Montrer qu'il existe un $\mathcal{L}$-plongement de $\mathcal{M}_0$ dans $\mathcal{N}$ qui n'est pas élémentaire.
**g)** (*) Soit $\mathcal{N}$ un modèle dénombrable de $T$. Montrer qu'il existe un $\mathcal{L}$-plongement de $\mathcal{M}_0$ dans $\mathcal{N}$ qui est élémentaire. Décrire tous les $\mathcal{L}$-plongements élémentaires de $\mathcal{M}_0$ dans $\mathcal{N}$.
**h)** (*) Soit $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup \{S_n; n > 0\}$, où pour chaque $n$, $S_n$ est un symbole de prédicat unaire.
Soit $T_1 = T \cup \{\forall x\,(S_n(x) \leftrightarrow \sigma_n(x))\}$ (où $\sigma_n(x)$ est une formule de $\mathcal{L}$ telle que $\sigma_n(a)$ est vraie ssi la classe de $a$ est de cardinalité égale à $n$).
Montrer que $T$ et $T_1$ ont exactement les mêmes modèles, mais que si $\mathcal{M}$ est un modèle dénombrable de $T_1$, alors tout $\mathcal{L}_1$-plongement de $\mathcal{M}_0$ dans $\mathcal{M}$ est élémentaire.
**i)**(*) Soit $\alpha > 0$ un ordinal. Combien la théorie $T$ a-t-elle de modèles de cardinalité $\aleph_\alpha$ qui sont non $\mathcal{L}$-isomorphes?

**Exercice (II):** Montrer que deux ensembles totalement ordonnés infinis quelconques satisfont les mêmes énoncés universels (dans le langage $\mathcal{L} = \{\leq\}$).

**Exercice supplémentaire (III):** Soit $\mathcal{L} = \{\leq\}$, le langage habituel des structures ordonnées, et $T$ la théorie dans $\mathcal{L}$ des ordres denses sans premier ni dernier élément.
**1.** Soit $\mathcal{L}_n = \mathcal{L} \cup \{c_i;\, 0 \leq i \leq n\}$, où les $c_i$ sont des symboles de constantes, et soit $T_n$ l'ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}_n$ suivant:

$$T_n = T \cup \{c_i < c_j;\, 0 \leq i < j \leq n\}.$$

Montrer que la théorie $T_n$ est $\aleph_0$-catégorique.
**2.** Soit maintenant $\mathcal{L}_\omega = \mathcal{L} \cup \{c_i;\, i \in \mathbb{N}\}$, et $T_\omega$ l'ensemble d'énoncés de $\mathcal{L}_\omega$ suivant:

$$T_\omega = T \cup \{c_i < c_j;\, i < j \in \mathbb{N}\}.$$

Montrer que la théorie $T_\omega$ est complète.
**3.**(*) a) Construire $\mathcal{M}$, modèle dénombrable de $T_\omega$, dans lequel la suite $(c_i^{\mathcal{M}})_{i\in\mathbb{N}}$ est majorée, et $\mathcal{N}$, modèle dénombrable de $T_\omega$, dans lequel la suite $(c_i^{\mathcal{N}})_{i\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.
b) Montrer que la théorie $T_\omega$ a exactement **trois** modèles dénombrables non $\mathcal{L}_\omega$-isomorphes.

**ARITHMETIQUE**

**Exercice (IV):** On considère un sous-langage du langage de l'arithmétique: $\mathcal{L}_0 = \{0, s, +\}$, et la théorie $S_0$ dans ce langage, constituée des six axiomes suivants:

$\mathbf{A_1}$: $\forall x \forall y (s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$;

$\mathbf{A_2}$: $\forall x\ s(x) \neq 0$;

$\mathbf{A_3}$: $\forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y\ x = s(y))$;

$\mathbf{A_4}$ $\forall x\ x + 0 = x$;

$\mathbf{A_5}$: $\forall x \forall y\ x + s(y) = s(x + y)$;

$\mathbf{A_6}$: $\forall x \forall y\ x + (y + z) = (x + y) + z$.

$(\mathbb{N}, 0, s, +)$ est évidemment un modèle de $S_0$.

**a)** Soit $c$ un nouveau symbole de constante. Soit $F_n$ un énoncé du langage $\mathcal{L}_0 \cup \{c\}$ signifiant que $c$ est la somme de $n$ éléments non nuls.

Montrer, en utilisant le théorème de compacité, que $S_1 = S_0 \cup \{F_n; n \geq 1\}$ est consistant.

**b)** (*Construction directe d'un modèle de* $S_1$) Vérifier que, en prenant pour ensemble de base $M = (\{0\} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N}^* \times \mathbb{Z})$ ($\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$) et en y interprétant les symboles du langage $\mathcal{L}_0$, de la manière suivante:

– $0^M = (0, 0)$

– $s^M((a, b)) = (a, b + 1)$

– $(a, b) +^M (a', b' = (a + a', b + b')$,

on obtient un modèle de $S_0$. Trouver une interprétation pour le symbole de constante $c$ dans $\mathcal{M}$ afin que $\mathcal{M}$ devienne modèle de la théorie $S_1$.

**c)** Montrer que le modèle $M$ de $S_1$ construit au b) ne satisfait pas l'énoncé

$$\forall v\ \exists y\ (v = y + y\ \vee v = y + y + s(0)).$$

En déduire que ce modèle n'est pas modèle du schéma d'induction de l'arithmétique (restreint aux formules du langage $\mathcal{L}_0$).

**d)** (*Impossibilité de mettre une multiplication sur* $M$) Montrer que l'on ne peut pas enrichir le modèle $M$, en une $\mathcal{L}_0 \cup \{.\}$-structure, de façon à avoir un modèle de l'énoncé suivant (contenu dans l'Arithmétique de Peano):

$$\forall x\ x.0 = 0\ \wedge\ \forall x \forall y\ x.(s(y)) = x.y + x.$$

(*Indication: essayer par exemple de donner une valeur à* $(1, 1).(1, 1)$)

**THÉORIE DES ENSEMBLES** On travaille dans $\mathcal{U}$ modèle de $ZFC$.

**Exercice (V): 1.** Soit $c$ un ensemble dont tous les éléments sont des ordinaux. Montrer (proprement) que $c$ a une borne supérieure. (résultat qui avait été laissé en exercice dans le cours)

**2.** Soit $F : On \mapsto On$ une relation fonctionelle définissable de la collection des ordinaux dans les ordinaux.

– Montrer que si $F$ est strictement croissante, alors pour tout ordinal $\alpha$, $F(\alpha) \geq \alpha$.

On dit que $F$ est continue si elle est strictement croissante et si, pour tout ordinal limite $\lambda$, $F(\lambda) = sup\{F(\beta)\ ; \beta \in \lambda\}$.

– Montrer que si $F$ est continue, alors $F$ a un point fixe. (*Indication : considérer une suite de la forme* $(F^n(\alpha)), n \in \omega$ )

– Rappeler la définition de la fonction $\aleph$ et montrer qu'il existe un ordinal $\alpha$ tel que $\aleph_\alpha = \alpha$.

– Rappeler la définition de la fonction $V$ et montrer qu'il existe des ordinaux $\alpha$ arbitrairement grands tels que $|V_\alpha| = \alpha$ ( $|V_\alpha|$ est le cardinal de l'ensemble $V_\alpha$).