MAGISTERE MATH.-INFO. (2003-2004) **Logique**
E. Bouscaren

Partiel

Vendredi 28 Novembre 2003

Ce texte est assez long, le but n'est pas de tout faire. L'exercice IV est "en plus"(il n'est pas vraiment très difficile mais nécessite d'être à l'aise avec la manipulation des groupes libres). L'exercice I peut sembler long, mais c'est parcequ'il est très décomposé!

CALCUL PROPOSITIONNEL

Exercice I. On considère un ensemble infini de variables propositionnelles

$$\mathcal{P} = \{P_i\,;\, i \geq 0\} \cup \{Q_i\,;\, i \geq 0\},$$

et l'ensemble des formules propositionnelles à variables dans $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}(\mathcal{P})$, avec connecteurs $\{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$.
1. On définit la relation d'équivalence $\sim$ par $A \sim B$ ssi $(A \leftrightarrow B)$ est une tautologie et on considère l'ensemble quotient $\mathcal{F}(\mathcal{P})/\sim$, ensemble des classes d'équivalence. On notera $\widetilde{A}$ la classe de la formule A. Montrer que la relation $\leq$:

$$\widetilde{A} \leq \widetilde{B} \text{ ssi } (A \to B) \text{ est une tautologie}$$

est bien définie et est une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(\mathcal{P})/\sim$.
2. On considère l'ensemble ordonné $(\mathcal{F}(\mathcal{P})/\sim, \leq)$. Est-ce un ensemble totalement ordonné? Montrer que $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ a un plus petit élément et un plus grand élément. Montrer que tout sous-ensemble fini non vide de $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ admet une borne inférieure et une borne supérieure.
3. A) Soit $\{G_n; n \geq 0\}$ la famille de formules de $\mathcal{F}$ définie par:

$$G_0 = Q_0 \text{ et } G_{n+1} = (G_n \vee (Q_{n+1} \wedge P_0 \wedge \ldots \wedge P_n)).$$

Montrer que pour tout n, $(G_n \to G_{n+1})$ est une tautologie mais $(G_{n+1} \to G_n)$ n'est pas une tautologie.
B) Soit $\{F_n; n \geq 0\}$ la famille de formules définie par :

$$F_0 = (P_0 \vee Q_0) \text{ et } F_n = (P_n \vee Q_0 \vee \ldots \vee Q_n).$$

Montrer que pour tous les entiers m, n, $(G_n \to F_m)$ est une tautologie.
C) Soit A une formule dont les variables sont parmi $\{P_0, \ldots, P_n, Q_0, \ldots Q_n\}$. Trouver δ_1 et δ_2 deux distributions de valeur de vérite sur $\mathcal{P}$ telles que :
- $\delta_1(A) = \delta_2(A)$
- $\delta_1(F_{n+1}) = 0$ et $\delta_2(G_{n+1}) = 1$.

D) Déduire de la question précédente qu'il y un sous-ensemble (infini) de $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ qui n'admet pas de borne inférieure.

CALCUL DES PRÉDICATS
On ne considère que des langages et des structures **égalitaires**.

Exercice II.
Soient $\mathcal{L}$ un langage, T une théorie de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure.
On dit qu'un énoncé σ de $\mathcal{L}$ est *universel* si σ est de la forme $\forall v_1 \ldots \forall v_n\, \phi(v_1, \ldots, v_n)$, pour

$\phi(v_1, \ldots, v_n)$ une formule sans quantificateurs de $\mathcal{L}$.
Soit $\Gamma = \{\sigma ; \sigma$ énoncé universel de $\mathcal{L}$ tel que $T \vdash \sigma\}$.

Montrer qu'il existe un $\mathcal{L}$-plongement de $\mathcal{M}$ dans un modèle de T si et seulement si $\mathcal{M}$ est modèle de Γ.(Indication : utiliser le diagramme (= diagramme simple) de $\mathcal{M}$)

Exercice III

Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et T une théorie dans le langage $\mathcal{L}$. Si $\phi(v)$ est une formule de $\mathcal{L}$ à une variable libre, et $\mathcal{M} =< M, ... >$ un modèle de T, on désigne par $\|\phi(M)\|$ le cardinal de l'ensemble définissable $\{a \in M;\ \mathcal{M} \models \phi(a)\}$.

(1) On suppose qu'il existe un cardinal β tel que, dans tout modèle $\mathcal{M}$ de T, $\|\phi(M)\| < \beta$. Montrer qu'il existe un entier n tel que dans tout modèle $\mathcal{M}$ de T, $\|\phi(M)\| \leq n$.

(2) Soient $\phi_1(v)$ et $\phi_2(v)$ deux formules de $\mathcal{L}$, à une variable libre, et $\mathcal{M}_0 =< M_0, ... >$ un modèle de T tel que $\|\phi_1(M_0)\|$ et $\|\phi_2(M_0)\|$ sont tous deux infinis. Montrer que, pour tout cardinal infini β, il existe un modèle $\mathcal{M}$ de T tel que $\|\phi_1(M)\| = \|\phi_2(M)\| = \beta$.
(Indication : Ajouter à $\mathcal{L}$ deux ensembles de constantes de cardinal β).

(3) On suppose maintenant que, pour tout modèle $\mathcal{M}$ de T, $\|\phi_1(M)\|$ et $\|\phi_2(M)\|$ sont infinis et qu'il existe un cardinal β tel que tous les modèles $\mathcal{M}$ de T dans lesquels $\|\phi_1(M)\| = \|\phi_2(M)\| = \beta$ sont $\mathcal{L}$-isomorphes. Montrer que la théorie T est complète.

(4) On prend $\mathcal{L} = \{c_0, \ldots, c_n, \ldots, P\}$, les c_n étant des symboles de constantes, et P un symbole de relation unaire. Ecrire un ensemble d'énoncés T tel que, pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$, on ait $\mathcal{M} \models T$ si et seulement si $P^{\mathcal{M}}$ est infini et les constantes $({c_n}^{\mathcal{M}})_{n \in \mathbb{N}}$ ont des valeurs distinctes et n'appartiennent pas à $P^{\mathcal{M}}$.
Montrer que la théorie T est complète.
Montrer que T n'est β-catégorique [1] pour aucun cardinal β infini.

Exercice IV - Exercice supplémentaire

On considère $\mathcal{L} = \{., ^{-1}, 1\}$, le langage habituel des groupes.
A) 1. Existe-t-il dans le langage $\mathcal{L}$ une théorie dont les modèles sont exactement tous les groupes commutatifs finiment engendrés?

2. Si β est un cardinal supérieur ou égal à 1, on considère $G(\beta)$, le groupe libre commutatif sur β générateurs.

Montrer que si $\beta < \gamma$ sont des cardinaux infinis, alors il existe un $\mathcal{L}$-plongement de $G(\beta)$ dans $G(\gamma)$. On suppose dorénavant que ce plongement est l'inclusion, c'est-à-dire $G(\beta) \subset_{\mathcal{L}} G(\gamma)$.

3. Montrer que pour tous $a_1, \ldots a_n \in G(\beta)$ et pour tout $b \in G(\gamma)$, il existe un $\mathcal{L}$-automorphisme h de $G(\gamma)$ tel que $h(a_i) = a_i$, pour $1 \leq i \leq n$ et $h(b) \in G(\beta)$. En déduire que $G(\beta)$ est une $\mathcal{L}$-sous-structure élémentaire de $G(\gamma)$. (Indication: utiliser le critère de Tarski-Vaught pour les sous-structures élémentaires)

B) On considère maintenant les groupes non commutatifs. Si β est un cardinal supérieur ou égal à 2, F_β est le groupe (non commutatif) libre sur β générateurs. On admet le résultat suivant (Z.Sela):

Si n, m sont des entiers, $2 \leq n \leq m$, le plongement canonique de F_n dans F_m est un $\mathcal{L}$-plongement élémentaire.

Montrer que pour tous cardinaux β, γ, si $2 \leq \beta \leq \gamma$, alors le plongement canonique de F_β dans F_γ est $\mathcal{L}$-élémentaire.

[1] On rappelle qu'une théorie d'un langage $\mathcal{L}$ est β-catégorique si tous ses modèles de cardinalité β sont $\mathcal{L}$-isomorphes