Contexte : Toute variété ~~sera~~ une variété algébrique complexe,
$H^i(X) := H^i_{sing}(X^{an}, \mathbb{Q})$, $D(X) := D^b(Sh_{\mathbb{Q}}(X^{an}))$

But : définir la filtration perverse $P_k H^i(X)$ associée à un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$.

§1. Motivation : le cas lisse.

Thm. de dégénérescence (Deligne)

$X \xrightarrow{f} Y$ morphisme projectif lisse, η classe de Chern d'un fibré en droites sur X relativement ample par rapport à X,
d = dim rel X/Y

1) $\forall i \in \mathbb{Z}$, cup produit avec η^i induit $\eta^i : \mathcal{H}^{d-i} Rf_* \mathbb{Q}_X \simeq \mathcal{H}^{d+i} Rf_* \mathbb{Q}_X$

2) Il existe un isomorphisme dans $D(Y)$
$$Rf_* \mathbb{Q}_X \simeq \bigoplus_{i=0}^{2d} \mathcal{H}^i Rf_* \mathbb{Q}_X[-i]$$

3) Chaque $\mathcal{H}^i Rf_* \mathbb{Q}_X$ est un système local semi-simple.

Idées de preuve.

1) Hard Lefschetz classique + changement de base propre.

2) Conséquence formelle de l'existence de $\eta : K \to K[2]$ dans $D(X)$ (avec $K = Rf_* \mathbb{Q}_X$) avec les propriétés de 1).

3) Utilise l'existence d'une structure canonique de variation de structure de Hodge polarisée sur les $\mathcal{H}^i Rf_* \mathbb{Q}_X$.

Corollaire. Dégénérescence de la suite spectrale de Leray
$E_2^{p,q} = H^p(Y, \mathcal{H}^q Rf_* \mathbb{Q}_X) \Rightarrow H^{p+q}(X)$.

Remarques 1) Si f n'est pas lisse, la suite spectrale de Leray dégénère rarement.

Contre-EX : Y projective singulière, $X \xrightarrow{f} Y$ résolution des singularités à fibres connexes $\Rightarrow$ si la structure de Hodge mixte sur $H^i(Y)$ n'est pas pure, alors $f^* : H^i(Y) \to H^i(X)$ pas injectif. Mais si Leray dégénère, f^* induit $H^i(Y, f_* \mathbb{Q}_X) \hookrightarrow H^i(X)$!

2) On a $\mathcal{H}^i Rf_* \mathbb{Q}_X = \tau_{\leq i} \tau_{\geq i} Rf_* \mathbb{Q}_{X}$, où si $K \in D(X)$,

$K = \dots \xrightarrow{d^{i-1}} K^i \xrightarrow{d^i} K^{i+1} \to \dots$ alors

$\tau_{\leq i} K := \longrightarrow \xrightarrow{d^{i-1}} \ker d^i \to 0 \to 0 \to \dots$

$\tau_{\geq i} K := \dots 0 \to 0 \to \operatorname{Coker} d^{i-1} \xrightarrow{d^i} \longrightarrow$

$\Rightarrow$ Idée Pour avoir analogue du thm. de dégénérescence avec f non lisse, il faut "tronquer autrement".

§2. Faisceaux pervers et filtration perverse.

Rappels sur les 6 foncteurs

Catégorie dérivée constructible : $D^b_c(X) = \{K \in D(X) \mid K$ constructible$\}$

$D_X :=$

i.e. $\exists\, X = \coprod_{\lambda \in \Lambda \text{ fini}} X_\lambda$, X_λ constructible

tq $\forall \lambda, \forall i$, $\mathcal{H}^i K|_{X_\lambda}$ loc. constant à tiges de dimension finie

$f : X \to Y$

$\Rightarrow D_X \underset{Rf_*}{\overset{f^*}{\rightleftarrows}} D_Y$

$\Rightarrow D_X \underset{Rf^!}{\overset{Rf_!}{\rightleftarrows}} D_Y$

$\boxed{\text{adjonction } (f^*, Rf_*)}$

(si $f : X \to \{*\}$, $Rf_* = R\Gamma(X, -)$)

$Rf_!$ image directe à support propre

(si $f : X \to \{*\}$, $Rf_! = R\Gamma_c(X, -)$

si $f : X \longrightarrow Y$ loc. fermée, $Rf_! = f_!$ extension par zéro

si f propre, $Rf_* = Rf_!$)

$Rf^!$ image inverse exceptionnelle

(si $f : X \hookrightarrow Y$ imm. ouverte, $Rf^! = f^*$

si $f : X \hookrightarrow Y$ imm. fermée, $Rf^! = f^* R\Gamma_X$ — sections à support dans X

si f lisse de dim d, $Rf^! \simeq f^*[2d]$)

(*) $\boxed{\text{adjonction } (Rf_!, Rf^!)}$

Déf. Si $f : X \to \{*\}$, le complexe dualisant sur X est
$\omega_X := Rf^! \mathbb{Q}$.

↳ **EX.** X lisse de dim $d \Rightarrow \omega_X \simeq \mathbb{Q}_X[2d]$.

Déf. Le dual de Verdier de $K \in D_X$ est $\mathbb{D}K := R\mathcal{H}om(K, \omega_X)$.
$\Rightarrow$ foncteur $\mathbb{D} : D_X \to D_X$
tq $\mathbb{D} \circ \mathbb{D} = id$, $\mathbb{D} \circ Rf_* = Rf_! \circ \mathbb{D}$ pour $f : X \to Y$
$\mathbb{D} \circ f^* = Rf^! \circ \mathbb{D}$

↳ **EX.** Si $\mathcal{L}$ système local sur X lisse de dim d,
$\mathbb{D}\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^\vee[2d]$.

Dualité de Verdier : L'adjonction $(*)$ donne $H^i(X, \mathbb{D}K) \simeq \left(H_c^{-i}(X, K)\right)^\vee$
pour $K \in D_X$, $\forall i \in \mathbb{Z}$.
↳ Si X lisse de dim d, $K = \mathbb{Q}_X$, on obtient la dualité de Poincaré.

Faisceaux pervers

Déf. Un complexe $K \in D_X$ est un faisceau pervers s'il satisfait les deux conditions suivantes :

i) $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\dim \{x \in X \mid \underbrace{\mathcal{H}_x^{-i}(K)}_{:= \varinjlim_{U \ni x \text{ ouvert}} H^{-i}(U, K)} \neq 0\} \leq i$ (condition de support)

ii) $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\dim \{x \in X \mid \underbrace{\mathcal{H}_{x,c}^{i}(K)}_{:= \varprojlim_{U \ni x \text{ ouvert}} H_c^{i}(U, K)} \neq 0\} \leq i$ (condition de cosupport)

Obs. 1) D'après la dualité de Verdier, $H_c^i(U, K) \simeq (H^{-i}(U, \mathbb{D}K))^\vee$, donc condition de cosupport pour $K \Leftrightarrow$ condition de support pour $\mathbb{D}K$, donc K pervers $\Leftrightarrow \mathbb{D}K$ pervers.

2) $\mathcal{H}_x^{-i}(K) \simeq H^{-i}(i_x^* K) \simeq i_x^*(\mathcal{H}^{-i}K)$, donc
$i_x : \{x\} \hookrightarrow X$
condition de support pour $K \Leftrightarrow \dim \operatorname{supp} \mathcal{H}^{-i}K \leq i \ \forall i$
condition de cosupport pour $K \Leftrightarrow \dim \operatorname{supp} \mathcal{H}^{-i}\mathbb{D}K \leq i \ \forall i$.

3) $\mathcal{H}^{-i}(i_x^* \mathbb{D}K) \simeq \big(H^i(\underbrace{Ri_x^! K}_{\text{"co-tige"}})\big)^\vee$,

donc condition de cosupport pour K $\Leftrightarrow$ $\dim\{x \mid H^i(Ri_x^! K) \neq 0\} \leq i$ $\forall i$.

EXEMPLES.

1) X lisse de dim d $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}_X[d]$ pervers.

Plus en général, $\mathcal{L}$ système local sur X lisse de dim d $\Rightarrow$ $\mathcal{L}[d]$ pervers (utiliser $\mathbb{D}(\mathcal{L}[d]) \simeq \mathcal{L}^\vee[d]$).

2) $U \overset{j}{\hookrightarrow} X$ immersion ouverte de U lisse de dim d, $\mathcal{L}$ système local sur U $\Rightarrow$ $\exists!\, K$ dans D_X tq

i) $j^*K \simeq \mathcal{L}[d]$

ii) $\forall i < d$, $\dim \operatorname{supp} \mathcal{H}^{-i}K < i$

$\dim \operatorname{supp} \mathcal{H}^{-i}\mathbb{D}K < i$

En particulier, K est pervers. On pose $K := IC(\mathcal{L})$ (complexe d'intersection à valeurs dans $\mathcal{L}$)

EX. Supp. $X \setminus U = \{x_i\}_{i \in I}$ fini (eg X à singularités isolées, $U = X^{reg}$)

$\Rightarrow IC(\mathcal{L}) \overset{(*)}{\simeq} \tau_{\leq -1} Rj_* \mathbb{Q}_U[d]$.

En fait, i) est vérifiée car j^* exact, $j^*Rj_* \simeq id$

ii) est vérifiée car

$$\mathcal{H}^{-i}(\tau_{\leq -1} Rj_*\mathbb{Q}_U[d]) \overset{(**)}{\simeq} \begin{cases} 0 \text{ si } i<1 & \Rightarrow \dim \underbrace{\operatorname{supp} \mathcal{H}^{-i}}_{=\emptyset} < i \text{ si } i<1 \\ \mathcal{H}^{d-i} Rj_*\mathbb{Q}_U \text{ si } i \geq 1 & \Rightarrow \dim \operatorname{supp} \mathcal{H}^{-i} = 0 \text{ si } i<d \\ & (\text{car } \dim(X \setminus U) = 0) \end{cases}$$

donc les conditions de support sont ok, et pour les conditions de cosupport, elles sont vérifiées en posant $i : \{x_i\}_{i \in I} \hookrightarrow X$, en considérant le triangle de localisation sur X $i_*i^!K \to K \to j_*j^*K$ pour $K = \tau_{\leq -1} Rj_*\mathbb{Q}_U[d]$ et en étudiant $H^i(i_x^! K) \underset{\text{car } \dim(X \setminus U) = 0}{\simeq} H^i(i_x^* i_* i^! K)$ via la suite exacte longue et en utilisant $(*)$, $(**)$.

3) • Si X lisse de dim d, $X \xrightarrow{f} Y$ avec f fini,

alors $Rf_* \mathbb{Q}_X[d] = f_* \mathbb{Q}_X[d]$ est pervers sur Y.

• Plus en général, si $X \xrightarrow{f} Y$ avec f semi-petite

(i.e. f propre, surjective, et $Y = \coprod_{\lambda \in \Lambda \text{ fini}} Y_\lambda$,

Y_λ loc. fermée lisse, $f^{-1}(Y_\lambda) \to Y_\lambda$ fibration loc. top. triviale

tq $\forall \lambda$, $\forall y \in Y_\lambda$, $\dim f^{-1}(y) \underset{(*)}{\leq} \frac{1}{2}(\dim Y - \dim Y_\lambda)$)

alors $Rf_* \mathbb{Q}_X[d]$ pervers sur Y.

→ Ex. Tout f surjectif entre surfaces est semi-petit.

Obs. Si f petit (i.e. $(*)$ est vraie strictement sur tout Y_λ non ouvert dans Y)

alors $Rf_* \mathbb{Q}_X[d] \simeq IC((Rf_* \mathbb{Q}_X)[d]|_U)$

où $U \subseteq Y$ ouvert lisse tq $f_U : X_U \to U$ étale.

Théorème (BBDG).

Soient ${}^pD_X^{\leq 0} := \{K \in D_X \mid K$ satisfait les conditions de support$\}$

${}^pD_X^{\geq 0} := \{$ —— $\mid$ —— cosupport$\}$

1) Les sous-catégories pleines ${}^pD_X^{\leq 0}$, ${}^pD_X^{\geq 0}$ sont telles que

axiomes de t-structure

i) $\mathrm{Hom}_{D_X}(K, K') = 0$ $\forall K \in {}^pD_X^{\leq 0}$, $K' \in {}^pD_X^{\geq 1} := {}^pD_X^{\geq 0}[-1]$

ii) ${}^pD_X^{\leq -1} \subseteq {}^pD_X^{\leq 0}$, ${}^pD_X^{\geq 0} \supseteq {}^pD_X^{\geq 1}$

iii) $\forall K \in D_X$, $\exists$ triangle $K' \to K \to K'' \xrightarrow{+1}$

avec $K' \in {}^pD_X^{\leq 0}$, $K'' \in {}^pD_X^{\geq 1}$

2) La sous-catégorie pleine P_X des faisceaux pervers,

$P_X = {}^pD_X^{\leq 0} \cap {}^pD_X^{\geq 0}$, est abélienne (et stable sous $\mathbb{D}$).

3) Tout objet P de P_X admet une filtration croissante

$P = Q_0 \supseteq Q_{-1} \supseteq \cdots \supseteq Q_{-n}$ tq Q_i/Q_{i-1} est un objet simple de P_X,

et tout tel objet est de la forme $IC_Z(\mathcal{L}) := i_* IC(\mathcal{L})$

pour $Z \hookrightarrow \bar{Z} \xhookrightarrow{i} X$ avec Z lisse irréductible, $\mathcal{L}$ système local simple sur Z.

Corollaire.

Si $K \in D_X$ est tq $K' \to K \to K'' \xrightarrow{+1}$ avec $K' \in {}^pD_X^{\le 0}$, $K'' \in {}^pD_X^{\ge 1}$,
alors on obtient des foncteurs ${}^p\tau_{\le 0} : D_X \to {}^pD_X^{\le 0}$,
(troncation perverses) $K \mapsto K'$

${}^p\tau_{\ge 0} : D_X \to {}^pD_X^{\ge 0}$
$K \mapsto (K[-1])''[1]$

et ${}^p\mathcal{H}^0 = {}^p\tau_{\le 0}\,{}^p\tau_{\ge 0}\; D_X \to P_X$, ${}^p\mathcal{H}^i = {}^p\mathcal{H}^0[i]$
(objets de cohomologie pervers)

($\forall i \in \mathbb{Z}$, ${}^p\tau_{\le i}K := ({}^p\tau_{\le 0}K[i])[-i]$, ${}^p\tau_{\ge i}K := ({}^p\tau_{\ge 0}K[i])[-i]$)

Déf. Soit $f : X \to Y$ morphisme, X lisse de dim d.
La filtration perverse sur $H^\cdot(X)$ associée à f est celle induite par
$${}^p\tau_{\le k} Rf_*\mathbb{Q}_X[d] \to Rf_*\mathbb{Q}_X[d] \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z},$$
i.e. $$P_kH^{\ell+d}(X) := \mathrm{Im}\big(H^\ell(Y, {}^p\tau_{\le k} Rf_*\mathbb{Q}_X[d]) \to \underbrace{H^\ell(Y, Rf_*\mathbb{Q}_X[d])}_{\simeq H^{\ell+d}(X)}\big)$$

§2. Le théorème de décomposition et les opérateurs de Lefschetz sur la cohomologie perverse.

Thm. de décomposition (BBDG)

Soit $f : X \to Y$ morphisme projectif, X lisse de dim d, η classe de Chern d'un fibré en droites sur X rel. ample par rapport à f.

1) le cup produit avec η^i induit, $\forall i \in \mathbb{Z}$, ${}^p\mathcal{H}^{-i}Rf_*\mathbb{Q}_X[d] \simeq {}^p\mathcal{H}^{i}Rf_*\mathbb{Q}_X[d]$
(Hard Lefschetz relatif pervers)
2) Il existe un isomorphisme dans D_X : $Rf_*\mathbb{Q}_X[d] \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} {}^p\mathcal{H}^iRf_*\mathbb{Q}_X[d][-i]$
3) Tout objet ${}^p\mathcal{H}^iRf_*\mathbb{Q}_X[d]$ est un faisceau pervers semi-simple (donc somme de $i_*IC(\mathcal{L})$, $\mathcal{L}$ système local simple sur Z lisse irréductible, $Z \hookrightarrow \bar{Z} \overset{i}{\hookrightarrow} Y$).

Preuves : BBDG '82 : par réduction aux corps finis (conjectures de Weil)
M. Saito fin '80s - début '90s : modules de Hodge mixtes } théorie des poids

De Cataldo-Migliorini 2005 : par réduction à propriétés non triviales de théorie de Hodge classique sur $H^*(X)$ quand $X \xrightarrow{f} Y$ semi-petit + réduction à f semi-petit via induction sur le "défaut de semi-petitesse" (preuve géométrique)

(Si X singulier, remplacer $\mathbb{Q}_X[d]$ par $IC_X := IC(\mathbb{Q}_{X_{reg}})$)

Corollaire. Dégénérescence de la "suite spectrale de Leray perverse"

$\Rightarrow P_k H^{\ell+d}(X) = \bigoplus_{i \leq k} H^\ell(Y, {}^p\mathcal{H}^i Rf_* \mathbb{Q}_X[d])$

$\Rightarrow H^\ell_k := P_k H^{\ell+d}(X) / P_{k-1} H^{\ell+d}(X) \simeq H^\ell(Y, {}^p\mathcal{H}^k Rf_* \mathbb{Q}_X[d])$

et on obtient Hard Lefschetz sur les gradués de la filtration perverse : $\eta^k : H^\ell_{-k} \simeq H^{\ell+2k}_k$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$

EXEMPLES. 1) $f : X \to Y$ semi-petit, Y_λ pertinent si $f^{-1}(y)$ a dimension $= \frac{1}{2}(\dim Y - \dim Y_\lambda)$ pour $y \in Y_\lambda$

- Soit $\mathcal{L}_\lambda :=$ système local associé à la monodromie des composantes irréductibles de $f^{-1}(y)$ (sur Y_λ)
- Alors $Rf_* \mathbb{Q}_X[d] \simeq {}^p\mathcal{H}^0 Rf_* \mathbb{Q}_X[d] \simeq \bigoplus_{\lambda / Y_\lambda \text{ pertinent}} IC(\mathcal{L}_\lambda)$

car $Rf_* \mathbb{Q}_X[d]$ pervers pour f semi-petit

2) $f : \underset{\text{K3 elliptique}}{X} \to Y \simeq \mathbb{P}^1$, $Y^\circ =$ ouvert de lissité, $Y \setminus Y^\circ = \{y_i\}_{i \in I}$ fini, $f^\circ : X^\circ \to Y^\circ$

$\Rightarrow Rf^\circ_* \mathbb{Q}_{X^\circ} \underset{\text{(Deligne)}}{\simeq} \mathbb{Q}_{Y^\circ} \oplus \mathcal{H}^1 Rf_* \mathbb{Q}_{X^\circ}[-1] \oplus \mathbb{Q}_{Y^\circ}[-2]$

$\Rightarrow Rf_* \mathbb{Q}_X \underset{\text{(BBDG)}}{\simeq} (\underbrace{\mathbb{Q}_Y[1]}_{\text{pervers}})[-1] \oplus \underbrace{IC(\mathcal{H}^1 Rf_* \mathbb{Q}_{X^\circ}[1])}_{\text{pervers}}[-2] \oplus$
$\oplus (\mathbb{Q}_Y[1])[-3] \oplus (\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Q}_{y_i}^{n_i - 1})[-2]$ où $n_i := \#$ comp. irred. de $f^{-1}(y_i)$, $\bigoplus_i \mathbb{Q}_{y_i}^{n_i-1}$ pervers.