Théorème de factorisation faible, II

1- Remarques sur la stratégie

$k=\bar{k}$ $(=\mathbb{C})$, car $k=0$.

$X \dashrightarrow X'$ application birationnelle entre var. proj. lisses

Cj (factorisation forte) : on peut trouver

$$\begin{tikzcd} & X'' \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X & & X' \end{tikzcd}$$

tq p, q soient des composés d'éclat^t à centres lisses.

Th (factorisation faible) : on peut trouver

$$X \leftarrow X_1 \rightarrow X_2 \leftarrow \cdots \rightarrow X'$$

où toutes les flèches sont des cp. d'éclatements à centres lisses.

Rq 1 On peut trouver $\begin{tikzcd} & X'' \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X & & X' \end{tikzcd}$ avec X'' lisse, p, q morphismes bir (résoudre les sing. du graphe)

Rq 2 On peut même supposer que p est une cposée d'éclat^t à centres lisses

Il faut utiliser

Th de principalisation X proj. lisse, $I \subset \mathcal{O}_X$ idéal

On peut trouver $\tilde{X} \xrightarrow[\pi]{} X$, cp. d'éclat^t à centres lisses, tq $\pi^* I \subset \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ est l'idéal de $\sum n_i D_i$ avec $\sum D_i$ est un DCNS dans $\tilde{X}$.

Applicat° on applique la Rq 1

Fait $p : X'' \to X$ est un éclatement, $X'' = Bl_I(X)$

On applique Hironaka à I

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r] \arrow[dr, "\pi"'] & X'' \arrow[d, "p"] \arrow[dr] & \\ & X & X' \end{tikzcd}$$

prop. univ. de l'éclat^t

Rq 3 La constr. des cob. bir. permet d'obtenir une factorisat° forte avec des éclat^t "à poids"

Stratégie : utiliser les cobordismes birat. pour se ramener à une constr. combinatoire de la factorisation cherchée

2- Variétés toriques, plong^t toroïdaux

ou singularités monomiales

Déf • Une var. torique est la donnée de $T \hookrightarrow X$ avec T tore, $T \simeq \mathbb{G}_m^n$, X q-proj. normale tq l'action de T sur lui-même se prolonge à X

• $U \hookrightarrow X$ est un plongement toroïdal (strict) si tout point de X a un vois. V tq $V \cap U \subset X \cap V$ admet un morphisme étale vers $T \subset X'$ torique.

Description combinatoire

* Variétés toriques affines $T \subset X$ torique, X affine

$\mathbb{Z}^n \simeq M = X^*(T) = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$, $M_{\mathbb{R}} = M \otimes \mathbb{R}$

= "monômes"

$N = X(T) = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$, $N_{\mathbb{R}} = N \otimes \mathbb{R}$

à X on peut associer $\sigma = \{ \varphi \in N$ sous-gpe à 1 par. tq $\varphi(t)$ a une limite pour $t \to 0 \}$

cône, strict^t convexe, rationnel polyedral dans $N_{\mathbb{R}}$

Récipoq^t, à σ on associe $X = \mathrm{Spec}\ k[M \cap \sigma^\vee]$

cône dual : l'ens des $m \in M$ tq $\langle \varphi, m \rangle \geq 0\ \forall \varphi \in \sigma$

Deux pts importants

• On généralise à X q-proj par la notion d'éventails

• X lisse $\iff$ σ est engendré par une base de $\langle \sigma \rangle \subset N$

Pour désingulariser X, on subdivise σ en cônes comme ci-dessus ou éventail, la subdiv. correspond à des modifications .

Cette descript° combinatoire s'étend aux plong^t toroïdaux

Retour sur le cas torique affine

$$T \subset X, \ M = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$$

à $m \in M$, on associe le div. de Cartier $D = \mathrm{Div}(x^m)$ sur $X - T$.

$\{ \text{div. de Cartier sur } X-T \} = M/(\sigma^\perp \cap M)$

$M_+^\sigma :=$ div. de Cartier eff.

$= \sigma^\vee \cap (M/_{M \cap \sigma^\perp})$

Alors $\sigma = (M_+^\sigma)^\vee$

<u>Cas toroïdal</u>

$U \subset X$, $X \setminus U = \bigcup D_i \leftarrow$ normal

nos strates X_α, avec une relation d'ordre

$$\mathrm{Star}(X_\alpha) = \bigcup_{X_\alpha \subset \overline{X}_\beta} X_\beta$$

$M^\alpha :=$ div. de Cartier sur $X_\alpha \setminus U$, $M_+^\alpha =$ div. effectifs

$\sigma_\alpha = (M^\alpha_+)^\vee$ donne une combinatoire associée aux plg^t tor.