# Introduction aux espaces de modules de fibré de Higgs et fibration de Hitchin

## §1 Echauffement : espaces de modules de fibrés vectoriels

Surface de Riemann compacte $C$ de genre $g$. (On travaille sur $\mathbb{C}$)

Fibré vectoriel complexe $E \longrightarrow C$ avec $\text{rang}(E) = r$ $\longrightarrow r = \dim_{\mathbb{C}}(E_x) \quad \forall x \in C$

$\text{degré}(E) = d$, $\longrightarrow$ fibré en droite $\det(E) = \Lambda^r E$

degré$(E)$ = degré section globale de $\det(E)$.

Peut-on former un "espace" des fibrés vectoriels de rang / degré fixés à isomorphisme près ?

$\longrightarrow$ Problème de séparation des points si le quotient est pris naïvement.

**def** | Un fibré vectoriel $E \longrightarrow C$ est stable (semi-stable) si $\forall$ sous-fibré vectoriel complexe $F \subsetneq E$,

$$\text{pente}(F) := \frac{\deg(F)}{\text{rang}(F)} \underset{(\leq)}{<} \frac{\deg(E)}{\text{rang}(E)}$$

ex: Pas de fibré stable de rang $r \geq 2$ sur $\mathbb{C}P^1$ : on a $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}(n_i)$ pour des entiers $n_i$ et

si $N = \max_i(n_i)$, $F = \mathcal{O}(N)$ tel que $\text{pente}(F) = \frac{N}{1} = \frac{Nr}{r} \geq \frac{\sum_i n_i}{r} = \text{pente}(E)$.

Pour définir relation d'équivalence : filtration de Jordan-Hölder d'un fibré semi-stable

On considère la suite $E = E_0 \supsetneq E_1 \supsetneq \cdots \supsetneq 0$

où $E_{i+1}$ est un sous-fibré de rang maximal dans $E_i$ de même pente.

$\Rightarrow \quad \text{Gr}\, E = \bigoplus_i E_i / E_{i+1}$ est bien défini à isomorphisme près.

**def** | Les fibrés vectoriels $E$ et $E'$ semi-stables (de rang $r$ et degré $d$) sont S-équivalents si on a un isomorphisme $\text{Gr}\, E \cong \text{Gr}\, E'$.

**Théorème** [Mumford] Pour $C, r, d$ fixés, il existe un espace de modules $\mathcal{N}_{r,d}$ des classes de S-équivalences de fibrés vectoriels semi-stables $E \to C$, $rg(E) = r$, $\deg(E) = d$.
C'est une variété algébrique projective complexe de dimension $r^2(g-1)+1$ si $g \geq 2$.

**Remarque** : • Si $\gcd(r,d) = 1$, stabilité = semi-stabilité. Alors $\mathcal{N}_{r,d}$ est lisse.
car $\frac{\deg(F)}{rg(F)} = \frac{d}{r}$ pour $F \subsetneq E$ $\Rightarrow$ $\deg(F) = \frac{d}{r} rg(F) \notin \mathbb{Z}$

• Identification $T_{[E]} \mathcal{N}_{r,d} \cong H^1(C, End(E))$
Par dualité de Serre $T^*_{[E]} \mathcal{N}_{r,d} \cong H^0(C, End(E) \otimes K)$ pour $K$ fibré canonique sur $C$.
$H^1(C,E) \cong H^0(C, E^{-1} \otimes K)^*$
↳ $K = \Omega^n_X = \det \Omega^1_C$. Here $n=1$

⚠ Tous les produits tensoriels sur $\mathbb{C}$ ou $\mathcal{O}_C$

## §2 Fibrés de Higgs [Hitchin, '87]

**def** | Un fibré de Higgs est une paire $(E, \Phi)$ où $E$ est un fibré vectoriel et $\Phi \in H^0(C, End(E) \otimes K)$ est le champs de Higgs.

**def** | Un fibré de Higgs est (semi-)stable si il a la propriété d'être (semi-)stable par rapport à tous les sous-fibrés $F \subsetneq E$ tels que $\Phi(F) \subseteq F \otimes K$.

**ex** : ① ($g \geq 2$) Soit $K^{1/2}$ une racine du fibré canonique, et soit $a \in H^0(C, K^2)$ une différentielle quadratique.
Alors $E = K^{-1/2} \oplus K^{1/2}$ et $\Phi_a = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : K^{+1/2} \oplus K^{-1/2} \longrightarrow K^{3/2} \oplus K^{1/2}$ définit un fibré de Higgs stable
↳ Aussi pour $a = 0$.

② Pas de fibré de Higgs (non-nul) stable sur $\mathbb{CP}^1$ de rang $r \geq 1$, car $K \cong \mathcal{O}(-2)$ et pas de section globale de $\mathcal{O}(m)$, $m < 0$.
e.g. si $E = \mathcal{O}(n_1) \oplus \mathcal{O}(n_2)$, $\Phi = (\phi_{ij})$ avec $\phi_{ij} : \mathcal{O}(n_j) \to \mathcal{O}(n_i) \otimes \mathcal{O}(-2)$
$\Rightarrow \phi_{ij} \in H^0(C, n_i - n_j - 2)$

Donc $\phi_{ii} = 0$ pour $i = 1,2$. Si $n_1 \geq n_2$, $\phi_{21} = 0$ donc $\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \phi_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\phi_{12} \neq 0$ si $n_1 \geq n_2 + 2$
alors $\mathcal{O}(n_1)$ est $\Phi$-stable mais $\frac{n_1}{1} \geq \frac{n_2+2}{1} > \frac{n_1+n_2}{2}$ donc $E$ pas (semi-)stable

Pour $C, r, d$ fixés,

<u>Théorème</u> [Hitchin $r=2$ '87 ; Nitsure, cas général, $\Phi : E \to E \otimes L$ '91] L'espace de modules $\mathcal{M}_{r,d}$ des classes de S-équivalences de fibrés de Higgs semi-stables $(E, \Phi)$ avec $rg(E) = r$, $\deg(E) = d$, est un schéma quasi-projectif. $\mathcal{M}_{r,d}$ contient le sous-schéma ouvert $\mathcal{M}_{r,d}^{st}$ paramétrisant les classes de fibrés de Higgs stables, et ce dernier est une variété irréductible quasi-projective lisse de dimension $2r^2(g-1)+2$.

↳ même notion de S-équivalence mais doit préserver la restriction de $\Phi$ à $G_r E$.

<u>Remarque</u> (i) $T^* N_{r,d}^{st} \subset \mathcal{M}_{r,d}^{st}$ sous-variété ouverte

(ii) $r, d$ premiers entre eux $\Rightarrow \mathcal{M}_{r,d} = \mathcal{M}_{r,d}^{st}$

<u>Variantes</u> $\boxed{1}$ Groupe de Lie semi-simple complexe $G$ avec $\mathfrak{g} = Lie(G)$

Pour fibré $G$-principal $\pi : P \to C$, on a le fibré adjoint $ad P = P \times_{ad} \mathfrak{g}$

→ classe d'équivalence $[pg, \xi] = [p, Ad_g(\xi)]$ $\forall p \in P$, $g \in G$, $\xi \in \mathfrak{g}$

<u>déf</u> Un $G$-fibré de Higgs est une paire $(P, \Phi)$ avec $P$ un fibré $G$-principal et $\Phi \in H^0(C, ad P \otimes K)$ est le champs de Higgs

Lorsque $G \subset GL_r(\mathbb{C})$, par exemple $G = SL_r(\mathbb{C})$, $SP_m(\mathbb{C})$, ou $SO_{2(k)}(\mathbb{C})$, un $G$-fibré de Higgs est un fibré de Higgs avec des contraintes.

e.g. $G = SL_r(\mathbb{C})$, on suppose $\Phi \in H^0(C, \underbrace{End(E)}_{\simeq\, ad E} \otimes K)$ avec $tr(\Phi) = 0$ et $\det(E) = \mathcal{O}_C$ est le fibré en droite trivial. d'où $\deg(E) = 0$

donc $\left(E = K^{-1/2} \oplus K^{1/2}, \Phi_a = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est un $SL_2(\mathbb{C})$-fibré de Higgs

diff. quadratique

On construit aussi un espace de modules à partir d'isomorphismes de fibrés $G$-principaux.

$\boxed{2}$ Soit $D$ diviseur effectif sur $C$ et $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_C(D)$ fibré en droite $(\Rightarrow \dim H^0(C,\mathcal{L})>0)$

On pose $K_{\mathcal{L}} := K \otimes \mathcal{L}$.

**def.** Un fibré de Higgs tordu (par $D$ ou $\mathcal{L}$) est une paire $(E, \Phi)$ où $E$ est un fibré vectoriel et $\Phi \in H^0(C, \mathrm{End}(E) \otimes K_{\mathcal{L}})$

- On a le cas classique pour $D = 0$.
- Notion de (semi-)stabilité pour les sous-fibrés $F \subsetneq E$ avec $\Phi(F) \subset F \otimes K_{\mathcal{L}}$.

(stable car pour $F = \mathcal{O}(-1)$, pente$(F) = -1 < \frac{-1+1}{2} = 0 =$ pente$(E)$)

ex. $\mathcal{L} = \mathcal{O}(4)$ sur $C = \mathbb{C}P^1$

$E = \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ et $\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(-1) \longrightarrow (\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)) \otimes \underbrace{K_{\mathcal{L}}}_{\mathcal{O}(-2)\otimes\mathcal{O}(4)} \simeq \mathcal{O}(3) \oplus \mathcal{O}(1)$.

$\boxed{2'}$

- [Nitsure '91] cas encore plus général : $\Phi \in H^0(C, \mathrm{End}(E) \otimes \tilde{\mathcal{L}})$ pour $\tilde{\mathcal{L}}$ quelconque fibré en droite

Si (i) $\deg \tilde{\mathcal{L}} = \deg K$ mais $\tilde{\mathcal{L}}^r \not\simeq K^r$ ou si (ii) $\deg \tilde{\mathcal{L}} > \deg K$

alors $\mathcal{M}^{st}_{r,d}(\tilde{\mathcal{L}})$ est une variété lisse (irréductible) quasi-projective de dimension

$r^2 \deg(\tilde{\mathcal{L}}) + \dim H^1(C, \tilde{\mathcal{L}}) + 1 \quad \overset{(i)}{=} \quad r^2(2g-2) + 1$

$\overset{(ii)}{=} \quad r^2 \deg \tilde{\mathcal{L}} + 1$

( Nitsure montre aussi que ça marche pour $\tilde{\mathcal{L}} = K$ et $\dim(\mathcal{M}^{st}_{r,d}) = 2r^2(g-1) + 2$

car $\begin{cases} \dim H^1(C,K) = 1 \\ \deg K = 2g-2 \end{cases}$

~~$\boxed{3}$ Version parabolique où les morphismes respectent des drapeaux à points $E_{1,p_i} \subseteq E_{2,p_i} \subseteq \dots \subseteq E_{r,p_i} \subseteq E$ à des points $\{P_1, \dots, P_n\}$ fixés.~~

Rappel pour moi-même si je m'embrouille : genre $g = \dim H^1(C, \mathcal{O}_C) \overset{\text{lisse}}{=} \dim H^0(C,K)$

En effet, Riemann-Roch : $\dim H^0(C,\mathcal{L}) - \underbrace{\dim H^0(C, \mathcal{L}^{-1}\otimes K)}_{\substack{\| \text{ dualité de Serre} \\ \dim (H^1(C,\mathcal{L})^*)}} = \deg(\mathcal{L}) + 1 - g$

avec $\mathcal{L} = \mathcal{O}_C$ comme $H^0(C,\mathcal{O}_C) = \mathbb{C}$, $\deg \mathcal{O}_C = 0$

$\mathcal{L} = K$ $\deg(K) = 2g-2$

$\dim H^1(C,K) = 1$ par Serre dualité

en général, Riemann-Roch : $\dim H^0(C, \mathcal{O}(D)) - \dim H^0(C, K(-D)) = \deg(D) + 1 - g$

$\boxed{3}$ Version parabolique : classification de fibrés de Higgs respectant certains drapeaux $0 \subset E_{p_i,0} \subset E_{p_i,1} \subset \dots \subset E_{p_i,s_i} = E|_{p_i}$ en fonction de certains poids $1 = \alpha_{i0} > \alpha_{i,1} > \dots > \alpha_{i,s_i} \geq 0$, à des points $\{P_1, \dots, P_n\} \subset C$ fixés.

La stabilité est basée sur le degré parabolique $\mathrm{pardeg}(E) = \deg(E) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{s_j} \underbrace{m_{j,s}}_{\dim(E_{p_j,s}/E_{p_j,s-1})} \alpha_{j,s}$

Cas $n=1$ : classification de $(\overset{x \in C \text{ fixé}}{x}; \underbrace{E, \Phi}_{\text{fibré de Higgs}}; 0 \subset (E|_x)_0 \subset \dots \subset (E|_x)_s = E|_x)$ tel que $\Phi|_x (E|_x)_j \subset (E|_x)_j \otimes K(D)|_x$

avec $D = x$ diviseur.

$\boxed{4}$ Variété Kählerienne $X \longrightarrow$ fibré de Higgs $(\underset{\downarrow X}{E}, \Phi)$ où $\Phi : E \to E \otimes \Omega^1_X$ avec $\Phi \wedge \Phi = 0$, e.g. [Simpson, '92]

## §3 Fibration de Hitchin

Version la plus simple sur $T^*N_{r,d}$ [Hitchin, '87] : $\longrightarrow$ considère déjà la variante avec $H^0(C, \mathrm{ad}P \otimes K)$

$(g \geq 2)$

**Théorème** Soit $p = (p_1, \dots, p_r)$ une base de l'anneau $\mathbb{C}[\mathfrak{gl}_r(\mathbb{C})]^{GL_r(\mathbb{C})}$ e.g. $\begin{cases} p_j(X) \text{ tel que } \det(\lambda \mathrm{Id}_r - X) = \sum_{j=0}^{r} \lambda^{r-j} p_j(X) \\ p_j(X) = \frac{1}{j} \mathrm{tr}(X^j) \end{cases}$

Etendons $p : H^0(C, \mathrm{End}(E) \otimes K) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{r} H^0(C, K^j)$ à $T^*N_{r,d}$.

Alors ces fonctions Poisson commutent, et la fibre générique est un ouvert d'une variété abélienne de dimension $r^2(g-1)+1$ $\longrightarrow$ [$r$ fonctions décomposées en $r^2(g-1)+1$ fonctions dans la base $\downarrow$ comptage par $\dim H^0(C, K^j) = \begin{cases} g & j=1 \\ (2j-1)(g-1) & j \geq 2 \end{cases}$]

↳ Système algébriquement complètement intégrable (ACIS)

De manière générale, on a $p : M_{r,d} \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{r} H^0(C, K^j)$. "fibration de Hitchin"

$M_{r,d}(\tilde{\mathcal{L}}) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{r} H^0(C, \tilde{\mathcal{L}}^j)$ ($\tilde{\mathcal{L}}$ fibré en droite quelconque ou $\tilde{\mathcal{L}} = K \otimes \mathcal{L}$ pour $\mathcal{L}$ fibré en droite)

**Théorème** [Nitsure, '91] Le morphisme $p$ est propre. De plus il est surjectif dans le cas non-tordu $\tilde{\mathcal{L}} = K$.

se base sur [Beauville, Narasimhan, Ramanan, '89] qui montre la dominance du morphisme

Remarque Il n'y a pas nécessairement de forme symplectique sur $M_{r,d}(\tilde{\mathcal{L}})$ et donc la fibration n'est plus Lagrangienne en général (e.g. $\deg(\tilde{\mathcal{L}}) > 0$ et $\tilde{\mathcal{L}} = K \otimes \mathcal{L}^{w}$)

Restons dans le cas ~~simple~~ basique $p : M_{r,d} \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{r} H^0(C, K^j)$. (avec les $p_j$ donnés par coefficients de $\det(\lambda \mathrm{Id}_r - X)$)

Dénotons par $\eta$ la section tautologique du ~~poussé~~ tiré en arrière $\pi^*K$ sur $\mathrm{Tot}(K)$ avec $\pi : \mathrm{Tot}(K) \to C$.

Soit $a = (a_1, \dots, a_r) \in \bigoplus_{j=1}^{r} H^0(C, K^j)$.

Alors les éléments $(E, \Phi) \in p^{-1}(a)$ sont tels que leur courbe spectrale est

$$\det(\eta - \underset{\substack{\eta \\ \text{pull-back sur Tot}(K)}}{\Phi}) = \eta^{r} + a_1 \eta^{r-1} + \dots + a_{r-1}\eta + a_r = 0$$

$\hookrightarrow$ Courbe $\pi : S_a \xrightarrow{r:1} C$ définie dans $\mathrm{Tot}(K)$ en variant $a$.

Fibre générique en $a$ de $p$ est donc $\cong \mathrm{Jac}(S_a) \longrightarrow$ variété abélienne

espace propre de $\Phi$ $\rightsquigarrow$ ce fibré en droite $L$ permet de reconstruire $(E, \Phi)$ par poussé en avant $\pi_*(L)$

Vrai aussi dans le cas tordu [Beauville-Narasimhan-Ramanan] : correspondance BNR

[Laumon] : On appelle la fibre en $0$ $p^{-1}(0) \subset M_{r,d}$ le cône global nilpotent.

* Quel rapport avec la filtration perverse ?

Pour rappel, étant donné $X \xrightarrow{f} Y$, on cherchait à décomposer $\underset{\text{faisceau pervers}}{Rf_* \mathbb{Q}_X[n]}$, $n = \dim X$,

en parties simples associées à des sous-variétés de $Y$ $\rightsquigarrow$ "support".

$\hookrightarrow$ possible sous certaines conditions : e.g. $X$ lisse et $f$ propre (ce sera notre cas)

<u>Théorème</u> [Chaudouard - Laumon 2016] Soit $p$ la fibration de Hitchin dans le cas tordu $\tilde{L} = \mathcal{O}_C(D)$, $\deg \tilde{L} > 2g-2$

pour sa partie stable :
$$p^{st} : \underbrace{M^{st}_{r,d}(\tilde{L})}_{\dim = r^2 \deg(\tilde{L}) + 1} \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{r} H^0(C, \tilde{L}^j) =: \underbrace{A_r}_{\dim = r(1-g) + \frac{r(r+1)}{2}\deg(\tilde{L})}.$$

Alors $Rp^{st}_* \mathbb{Q}$ est supporté (au point générique) de $A_r$.

C'est-à-dire que : $\underset{\substack{\text{shift possible ?} \\ [d_{A_r} + ?]}}{Rp^{st}_* \mathbb{Q}} \cong \bigoplus_i IC_{A_r}(R^i p^{\text{lisse}}_* \mathbb{Q})[-i]$

- Énoncé sur la partie elliptique $A_r^{\text{ell}} = \{ a \in A_r \mid \text{courbe spectrale } S_a \text{ intègre} \} \supset A_r^{\text{lisse}} = \{ a \in A_r \mid \text{courbe spectrale } S_a \text{ lisse} \}$

  par Bao Châu NGÔ dans sa preuve du lemme fondamental pour les algèbres de Lie. [2010]

- Chaudouard - Laumon en fait sur $k$ caractéristique $0$ et pour $\mathbb{Q} \rightsquigarrow \mathbb{Q}_\ell$