GdT int. mot.
24/11/2020

Volume et réduction motiviques

Nicaise - Shinder
App. A.

k corps car $k=0$

$K = k((t))$ $\qquad S^0 = \mathrm{Spec}(k((t)))$.

$\cup$ $\qquad\qquad\qquad \cap$

$R = k[[t]]$ $\qquad S = \mathrm{Spec}(k[[t]]) \supset \{0\}$

Idée : . Partir de $X \to S^0$ propre et lisse

. étendre à $\mathcal{X} \xrightarrow{\pi} S$ (+ conditions)

. Prendre la fibre spéciale $\underbrace{\mathcal{X}_k = \pi^{-1}(0)}_{\text{pas canonique}}$.

⇝ Motivique :

$$K_0(\mathrm{Var}_K) \longrightarrow K_0(\mathrm{Var}_k)$$

Deux versions :

. Volume motivique (avec monodromie)

$$\mathrm{Vol}_K : K_0(\mathrm{Var}_K) \longrightarrow K_0^{\hat{\mu}}(\mathrm{Var}_k)$$

morphisme d'anneaux.

. <u>Réduction motivique</u> : quotienter par l'action de $\hat{\mu}$.

$MR : K_0(Var_K) \longrightarrow K_0(Var_k)$

morphisme de $\mathbb{Z}[\mathbb{L}]$-modules

$$[/\mathbb{A}^1]$$

$$\begin{tikzcd}
K_0(Var_K) \arrow[rr, "MR"] \arrow[dr, bend right, "Vol_K"'] & & K_0(Var_k) \\
& K_0^{\hat{\mu}}(Var_k) \arrow[ur, "-/\hat{\mu}"'] &
\end{tikzcd}$$

I <u>Modèles à croisements normaux</u>

<u>Déf</u> : $X \longrightarrow S^\circ$ propre et lisse

Un modèle à CN de X est un prolongement

$\mathcal{X} \xrightarrow{\pi} S$ propre, régulier et tel que

$\mathcal{X}_k = \pi^{-1}(0)$ soit un diviseur à CN dans $\mathcal{X}$.

<u>Rmq</u> : Ils existent : . Compactifier $X \longrightarrow S^\circ \longrightarrow S$

. Rés. des sing

<u>Déf</u> : $\underset{\displaystyle\mathcal{X}}{\overset{\displaystyle\mathcal{X}_k}{\cap}} = \sum_{i\in I} N_i E_i$

stratification de $\mathcal{X}$

. Pour $J \subset I$ $\quad E_J = \bigcap_{j\in J} E_j \quad \overbrace{E_J^0 = E_J \setminus \bigcup_{i\notin J} E_i}$

munis de leur structure réduite.

. $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad R(n) = k[[t^{1/n}]] \quad S(n) = \operatorname{Spec}(R(n))$

$K(n) = k((t^{1/n})) \quad S^0(n) = \operatorname{Spec}(K(n))$

$\mathcal{X}(n)$ normalisation de $\mathcal{X} \times_S S(n)$

. $J \subset I$ $\quad N_J := \operatorname{pgcd}(N_j, j \in J)$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{E}_J^0 \arrow[r] \arrow[d, "\mu_{N_J}\text{-torseur}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathcal{X}(N_J) \arrow[d] \\
E_J^0 \arrow[r] & \mathcal{X}
\end{tikzcd}$$

Théorème (NS)

$$MR : K_0(Var_K) \longrightarrow K_0(Var_k)$$

$$[X] \longmapsto \sum_{\emptyset \neq J \subset I} (1 - \mathbb{L})^{|J|-1} [E_J^\circ]$$

X → S° propre lisse

$$Vol_K : K_0(Var_K) \longrightarrow K_0^{\hat{\mu}}(Var_k)$$

$$[X] \longmapsto \sum_{\emptyset \neq J \subset I} (1 - \mathbb{L})^{|J|-1} [\tilde{E}_J^\circ].$$

sont bien définis.

Rmq : Thm de Bittner :

$$K_0(Var_K) = \langle [X], X \text{ propre et lisse} \rangle / {[\emptyset]=0}$$

$$[Bl_Y X] - [E] = [X] - [Y]$$

$Y \hookrightarrow X$ propres et lisses

E = div. exc.

Il faudra montrer :

① Les formules ne dépendent pas du choix du modèle à CN.

② Relations de Bittner

On se focalise sur ①.

Déf : Soit $\mathcal{X} \longrightarrow S$ un modèle à CN.

- Un éclatement $Bl_Z(\mathcal{X})$ de $\mathcal{X}$ est admissible si $\mathcal{I}_Z \subset \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ est cohérent et $Z \cap X = \emptyset$

$$\Updownarrow$$

$t^n \in \mathcal{I}_Z$ pour $n >> 0$.

- Un éclatement $Bl_Z(\mathcal{X})$ est élémentaire si
  - Z est régulier
  - $Z \hookrightarrow \mathcal{X}_k$
  - CN : localement sur Z, il existe $D_0 \subset \mathcal{X}$ div. tel que $D := D_0 + \mathcal{X}_k$ soit à CN, et tel que Z soit une intersection de composantes irréductibles de D.

Thm (Factorisation faible, Włodarczyk 2000
Abramovich-Temkin 2019)

Pour tout éclatement admissible $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, il existe une chaîne

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathcal{Y}_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathcal{Y} & & \mathcal{Y}_2 & & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

d'éclatements élémentaires. (cf Anne/François)

Prop :

Pour toute paire de modèles CN $\mathcal{X} \to S$, $\mathcal{Y} \to S$ d'un même $X \to S^\circ$, il existe une chaîne

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathcal{Y}_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathcal{Y} & & \mathcal{Y}_2 & & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

d'éclatements élémentaires

Rmq : Si $\mathcal{X}$ est modèle à CN alors tout éclatement élémentaire $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ est également un modèle à CN.

Démo : Soit Z_0 l'adhérence schématique de $X \times_{S^\circ} X$ dans $\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{Y}$.

- $Z_0 \to S$ propre
- <u>Raynaud–Gruson</u> : $\exists\, Z_1 \to Z_0$ écl. adm tel que $Z_1 \to \mathfrak{X}$, $Z_1 \to \mathfrak{Y}$ soient des éclatements admissibles
- <u>Hironaka</u> : $\exists\, Z \to Z_1$ écl. adm. tq $Z \to S$ soit un modèle à CN.

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\mathrm{adm}"'] \arrow[dr, "\mathrm{adm}"] & \\ \mathfrak{X} & & \mathfrak{Y} \end{tikzcd}$$ $\rightsquigarrow$ fact. faible pour conclure.

Pour montrer ①, il suffit de regarder le cas d'un éclatement élémentaire.

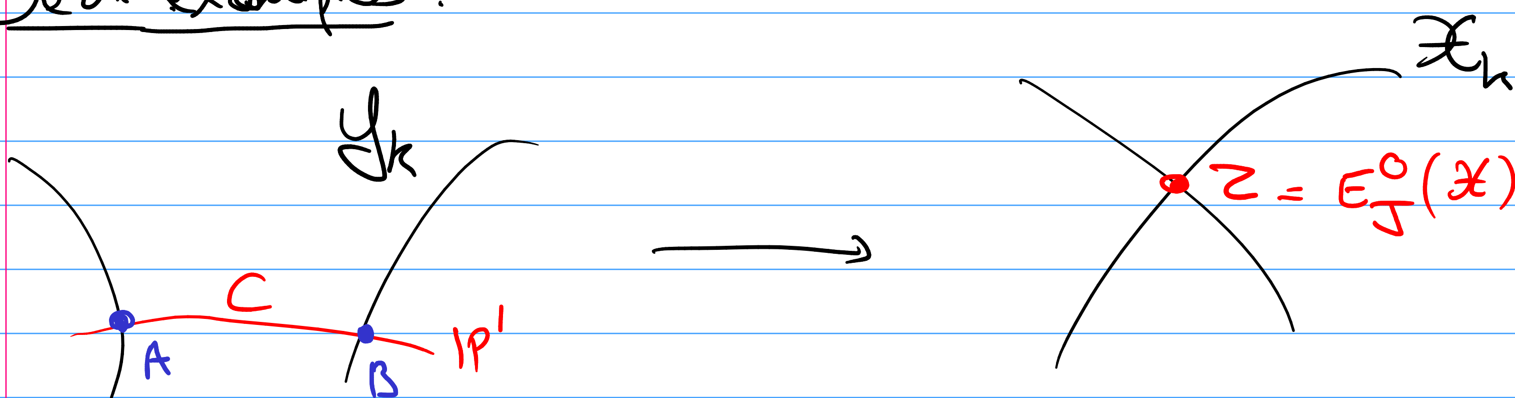
$\underline{\text{Mq}}$ $\forall\, \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ éclatement élémentaire

$$\sum_{\phi \neq J \subset I_{\mathcal{X}}} (1-\mathbb{L})^{|J|-1} [\widetilde{E_J^{o}(\mathcal{X})}]$$

$$\shortparallel$$

$$\sum_{\phi \neq J \subset I_{\mathcal{Y}}} (1-\mathbb{L})^{|J|-1} [\widetilde{E_J^{o}(\mathcal{Y})}]$$

<u>Deux exemples</u> :

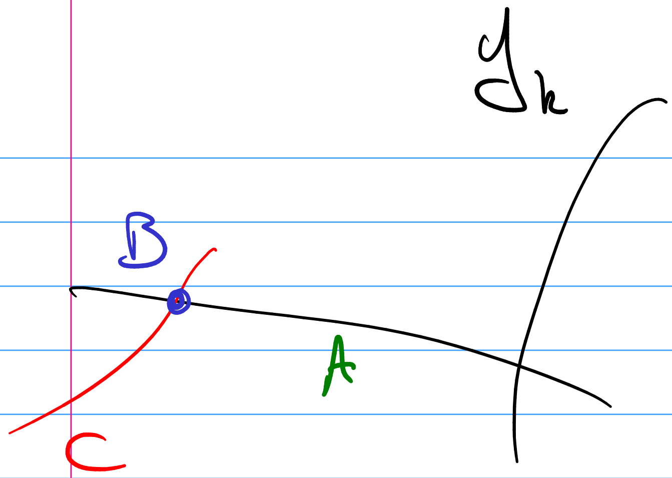


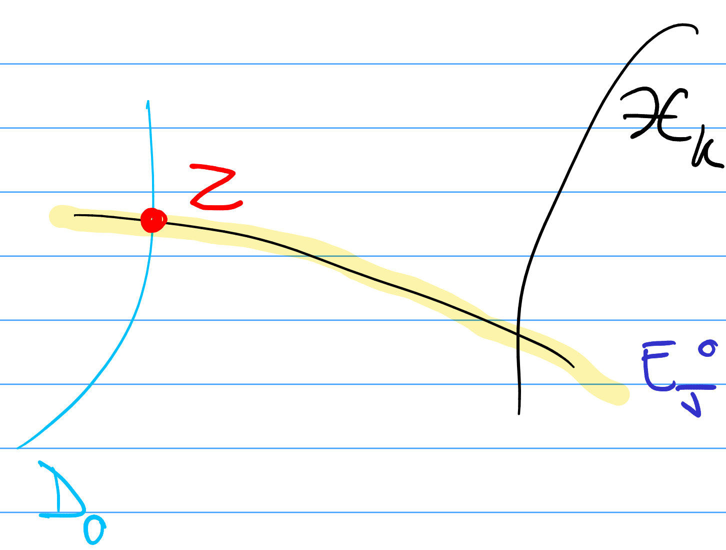
$(1-\mathbb{L})[A] = [E_J^o(\mathcal{X})]$

$(1-\mathbb{L})[B] =$

$[C] = (\mathbb{L}-1)[E_J^o(\mathcal{X})]$

$(1-\mathbb{L})[E_J^o]$





$$[A] = [E_J^\circ] - [B]$$

$$(1-\mathbb{L})[E_J^\circ]$$

$$[C] = \mathbb{L}[B]$$

$$[A] + [B] + [C] = --- = (1-\mathbb{L})[E_J^\circ]$$

II Version logarithmique

. $X \longrightarrow S^0$ propre et lisse, $\mathcal{X}$ modèle à CN

$\rightsquigarrow \mathcal{X}^+$ schéma log. régulier sur $S^+ = (S, \{0\})$

associé à $(\mathcal{X}, (\mathcal{X}_k)_{\text{réd}})$

$\rightsquigarrow$ Eventail $F(\mathcal{X}^+) = \left\{ \text{points génériques des strates } E_J^0 . \right\}$.

$$\begin{array}{c} F(\mathcal{X}^+) \\ \cap \\ \mathcal{X} \end{array}$$

. Pour $\sigma \in F(\mathcal{X}^+)$, on note $E(\sigma)^0$ la strate associée.

. Si $E(\sigma)^0 = E_J^0$ alors $|J|$ = dimension du monoïde caractéristique $\overline{M}_\sigma \simeq \mathbb{N}^{|J|}$.

. Fonctionne avec d'autres diviseurs :

Soit $D \subset \mathcal{X} \to S$ diviseur à CN, réduit et tel que $(\mathcal{X}_k)_{\text{réd}} \subset D$.

$$\underset{\text{log-régulier}}{\mathcal{X}^+ = (\mathcal{X}, D)} \underset{\text{log-lisse}}{\longrightarrow} S^+ = (S, \{0\})$$

$$\mathcal{X}^+ \longrightarrow S^+$$

$$\begin{array}{ccc} & & k[[t]]^{\neq 0}/k[[t]]^\times \quad \text{monoïde carac.} \\ & & \downarrow \text{val} \\ \overline{M}_\sigma = C_{\mathcal{X}^+,\sigma} & \longleftarrow & (\mathbb{N},+) \quad \text{tige en } t=0. \\ \overline{M}^\#_\sigma \nearrow \quad \overline{t} & \longleftarrow\!\shortmid & 1 \end{array}$$

$\sigma \in F(\mathcal{X}^+)$

: tige

Déf : $\cdot\, r(\sigma) = \dim_{Krull}(C_{\mathcal{X}^+,\sigma}) = \operatorname{codim}(E(\sigma)^0)$

$\cdot\, r_h(\sigma) = \dim_{Krull}(C_{\mathcal{X}^+,\sigma}/\overline{t})$ — nb de comp irréd de D non contenue dans $\mathcal{X}_k$ et contenant σ.

$\cdot\, r_v(\sigma) = r(\sigma) - r_h(\sigma)$

Déf : On définit $\tilde{E}(\sigma)^0 \longrightarrow E(\sigma)^0$ similairement à $\tilde{E}^0_\sigma$.

en remplaçant N_σ par $e_\sigma = \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \mid \overline{t} \text{ dans } C_{\mathcal{X},\sigma}\}$

not. additive

Thm (forme logarithmique) :

$$\sum (1-\mathbb{L})^{\varkappa_v(\sigma)-1} [\tilde{E}(\sigma)^\circ]$$

ne dépend que de la fibre générique de $\mathcal{X}^+$.

Stratégie de preuve :

· $\mathcal{Y} \xrightarrow{\pi} \mathcal{X}$ éclatement élémentaire

(localement, le centre est une intersection de comp. irréd d'un $\underbrace{\text{DCN}}_{D}$ contenant $\mathcal{X}_k$.)

① On localise $\mathcal{X} = \bigcup_{\ell \in L} \mathcal{U}_\ell$ finie ($\mathcal{U}_\ell$ ouverts.)

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{X}) = \sum_{\phi \neq M \subset L} (1-\mathbb{L})^{|M|-1} \mathrm{Vol}\left(\bigcap_{m \in M} \mathcal{U}_m\right)$$

② On montre $\mathrm{Vol}((\mathcal{X}, \mathcal{X}_k)) = \mathrm{Vol}((\mathcal{X}, D))$

$$\mathrm{Vol}((\mathcal{Y}, \mathcal{Y}_k)) = \mathrm{Vol}((\mathcal{Y}, \pi^{-1}(D)_{red}))$$

③ $(\mathcal{Y}, \pi^{-1}(D)) \longrightarrow (\mathcal{X}, D)$ modification toroïdale + iso sur la fibre générique.

$$\begin{array}{ccc} F(\mathcal{Y}) & \longrightarrow & F(\mathcal{X}) \\ h: \quad \tau & \longmapsto & \sigma \\ \tilde{E}(\tau)^o & \longrightarrow & \tilde{E}(\sigma)^o \end{array}$$

/ $\mathbb{G}_m^{n(\sigma)-n(\tau)}$ - torseur

$$\tilde{E}(\tau)^o = (\mathbb{L}-1)^{n(\sigma)-n(\tau)}[\tilde{E}(\sigma)^o]$$

⊛ $$\sum_{\tau \in h^{-1}(\sigma)} (1-\mathbb{L})^{n_\nu(\tau)-1}[\tilde{E}(\tau)^o] = (1-\mathbb{L})^{n_\nu(\sigma)-1}[\tilde{E}(\sigma)^o]$$

⊛ $\Leftarrow$ $$\sum_{\substack{\tau \in h^{-1}(\sigma) \\ n_h(\tau)=m}} (-1)^{n(\tau)} = \begin{cases} (-1)^{n(\sigma)} & \text{si } m = n_h(\sigma) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$