Lecture 1. Théorie de Hodge mixte.

(1) Theorie de Hodge pure.

X : variété Kählerienn. complex.

$$H^n(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(X, \mathbb{C})$$

- $\overline{H^{p,q}(X, \mathbb{C})} = H^{q,p}(X, \mathbb{C})$.

- $H^{p,q}$ est l'espace des classes de cohomologie de de Rham rep. dans $A^{p,q}(X)$

$$H^{p,q}(X, \mathbb{C}) \cong H^q(X, \Omega_X^p)$$

<u>Filtration de Hodge</u>: $F^pH^\bullet(X) = \bigoplus_{p' \geq p} H^{p',q'}(X)$.

$\rightsquigarrow H^{p,q}(X) = F^p \cap \overline{F^q}$ $(p+q=n)$.

- $\sigma_{\geq k}\Omega_X^\bullet = (\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \Omega_X^k \longrightarrow \Omega_X^{k+1} \longrightarrow \cdots)$

$\rightsquigarrow$ <u>Filtration</u> sur $\mathbb{H}^\bullet(X, \Omega_X^\bullet) \simeq H^\bullet(X, \mathbb{C})$.

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega_X^p) \Rightarrow H^\bullet(X, \mathbb{C}).$$

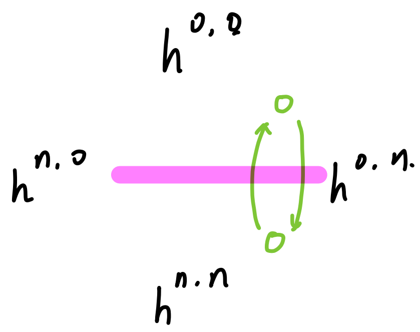
Un complexe de Hodge (faisceautique):

- $K_\mathbb{Q}^\bullet \otimes \mathbb{C} \simeq K_\mathbb{C}^\bullet$
- $K_\mathbb{C}^\bullet$ filtré par F

On demande que F induise sur $\mathbb{H}^k(K)$ une structure de Hodge de poids k.

<u>Thm</u>: le complexe $(\underline{\mathbb{Q}}, (\Omega_X^\bullet, \sigma_{\geq \bullet}))$ est un complexe de Hodge.

$\dim X = n.$ $\quad h^{p,q} = \dim(H^{p,q}(X)).$



$$L : H^{p,q}(X) \longrightarrow H^{p+1,q+1}(X).$$
$$\eta \longmapsto [\omega] \cup \eta.$$

métrique Kählerienne.

$$\Lambda : H^{p+1,q+1}(X) \longrightarrow H^{p,q}(X).$$

$\Rightarrow (L, \Lambda, [L,\Lambda])$ induire une action de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

<u>Théorème de Hard Lefschetz.</u>

$L^{n-(p+q)} : H^{p,q}(X) \xrightarrow{\simeq} H^{n-q,\, n-p}(X)$ est une iso.

Structure de Hodge mixte:

Les variétés complexes non-compacte / non lisse.
n'ont pas de HS (Hodge structure).

<u>Def</u>: Une $(\mathbb{Q}-)$ structure de Hodge mixte. V. c'est.

- $V_{\mathbb{Q}}$ de dim. fini filtré par W.
- $V_{\mathbb{C}} \simeq V_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}$ filtré par $F^\bullet$

t.q. $Gr_n^W V$ soit une HS pure de poids n.

<u>Theoreme:</u>

Toute variété complexe algébrique admet une structure de Hodge mixte fonctorielle.

Def: Un complexe de Hodge mixte (faisceautique).

- $K^\bullet_{\mathbb{Q}}$ filtré par W.
- $K^\bullet_{\mathbb{C}} \simeq K^\bullet_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}$ filtré par F.

t.q. $Gr^W_n K^\bullet$ soit un complexe Hodge de poids n.

Thm: La cohomologie d'un complexe de Hodge mixte est munie d'une structure de Hodge mixte.

$H^k(Gr^W_n K)$

Construction: X lisse algébrique.

- $X \overset{j}{\hookrightarrow} \bar{X}$ t.q. $\bar{X} \setminus X = D$ est un diviseur à croisement normaux. (localement $D = \{z_1 \cdot z_k = 0\}$) avec les D_i (composantes irr. de D) lisses.
- $\Omega^k_{\bar{X}}(\log D)$ = formes ω sur X avec des pôles simples le long de D et t.q. $d\omega$ aussi.

Prop: $\Omega^\bullet_{\bar{X}}(\log D) \xrightarrow{\sim} j_* \Omega^\bullet_X$

donc $\mathbb{H}^\bullet(X, \Omega^\bullet_{\bar{X}}(\log D)) = H^\bullet(X, \mathbb{C})$.

Candidat: $CHM = \Omega^\bullet_{\bar{X}}(\log D)$.

$$\begin{array}{ccc} (\Omega^\bullet_{\bar{X}}(\log D), \tau) & \xrightarrow{id} & (\Omega^\bullet_{\bar{X}}(\log D), W) \\ \uparrow s & & \\ (Rj_*\underline{\mathbb{C}}, \tau) \cong (j_*\Omega^\bullet_X, \tau) & & \end{array}$$

$$D = \sum_{i=1}^{N} D_i \qquad D_I = \bigcap_{i \in I} D_i \qquad D(I) = \sum_{j \notin I} D_j \cap D_I.$$

$$res_I : \Omega^d_{\bar X}(\log D) \longrightarrow \Omega^{d-m}_{D_I}(\log D(I))$$

$$\omega = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dz_m}{z_m} \wedge \eta + \eta' \longmapsto \eta|_{D_I}.$$

$$res_I : W_m \Omega^d_{\bar X}(\log D) \longrightarrow \Omega^{d-m}_{D_I}.$$

En sommant sur les $|I| = m$.

$$res_m : W_m \Omega^d_{\bar X}(\log D) \longrightarrow \pi_* \Omega^{d-m}_{D(m)}, \quad D(m) = \bigsqcup_{|I|=m} D_I.$$

Elle induit:

$$Gr^W_m \Omega^d_{\bar X}(\log D) \xrightarrow{\sim} \pi_* \Omega^{d-m}_{D(m)}$$

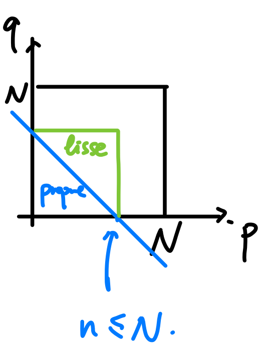
$$\rho_I : \Omega^{d-m}_X \longrightarrow Gr^W_m \Omega^d_{\bar X}(\log D)$$

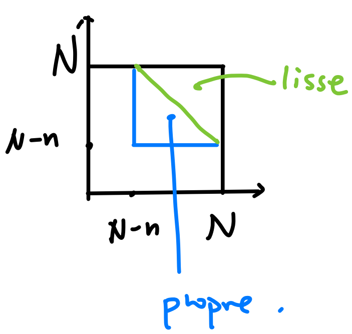
$$\omega \longmapsto \frac{dz_1}{z_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dz_m}{z_m} \wedge \omega.$$

$$Gr^W_m \Omega^\bullet_{\bar X}(\log D) \xrightarrow{\sim} \pi_* \Omega^{\bullet - m}_{D(m)}$$

$$H^k(\bar X, \pi_* \Omega^{\bullet - m}_{D(m)}) = H^k(D(m), \Omega^{\bullet - m}_{D(m)}).$$ ← Structure de Hodge de poids $k+m$.

Nombre de Hodge. (sur le H^n. $\dim X = N$).





Fonctorielité
$$\begin{tikzcd} \bar{X} \arrow[r] & \bar{Y} \\ X \arrow[u, hook] \arrow[r] & Y \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$
$\rightsquigarrow$ Tout $f : X \to Y$ induit $f^* : H^\bullet(Y) \to H^\bullet(X)$ morphisme de MHS.

$(X, \bar{X})$, $(Y, \bar{Y})$, $(X \times Y, \bar{X} \times \bar{Y})$ bonne compactification

$H^\bullet(X \times Y) \simeq H^\bullet(X) \otimes H^\bullet(Y)$ de MHS.

$$\begin{tikzcd} H^\bullet(X) \otimes H^\bullet(X) \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & H^\bullet(X \times X) \arrow[r, "\Delta^*"] & H^\bullet(X) \end{tikzcd}$$

le cup produit respecte le MHS