

# Fibrati vettoriali e geometria algebrica

**Emanuele Macrì**, Université Paris-Saclay

**Accademia dei Lincei — Roma, 13 dicembre 2024**



European Research Council  
Established by the European Commission

université  
PARIS-SACLAY

# Lo spazio proiettivo

## Lo spazio proiettivo

$\mathbb{C}$  – numeri complessi  $\Leftarrow a + \mathbf{i}b$ ,  $\mathbf{i}^2 = -1$

## Lo spazio proiettivo

$\mathbb{C}$  – numeri complessi  $\Leftarrow a + \mathbf{i} b$ ,  $\mathbf{i}^2 = -1$

$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  – spazio proiettivo (complesso) di dimensione  $n \geq 0$

$\rightsquigarrow [x_0 : \cdots : x_n]$  coordinate, definite a meno di moltiplicazione per uno scalare  $\lambda \neq 0$ :

$$[x_0 : \cdots : x_n] = [\lambda x_0 : \cdots : \lambda x_n]$$

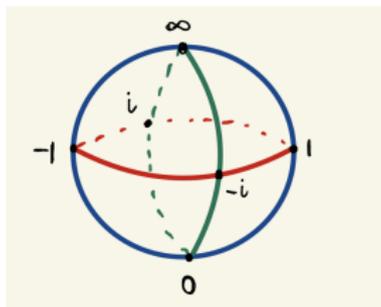
# Lo spazio proiettivo

$\mathbb{C}$  – numeri complessi  $\Leftarrow a + ib, i^2 = -1$

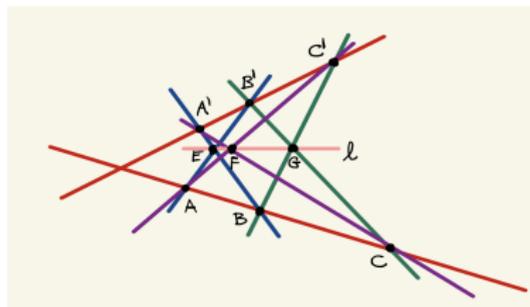
$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  – spazio proiettivo (complesso) di dimensione  $n \geq 0$

$\rightsquigarrow [x_0 : \dots : x_n]$  coordinate, definite a meno di moltiplicazione per uno scalare  $\lambda \neq 0$ :

$$[x_0 : \dots : x_n] = [\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n]$$



[LA RETTA PROIETTIVA,  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ ]



[IL TEOREMA DI PAPPUS]

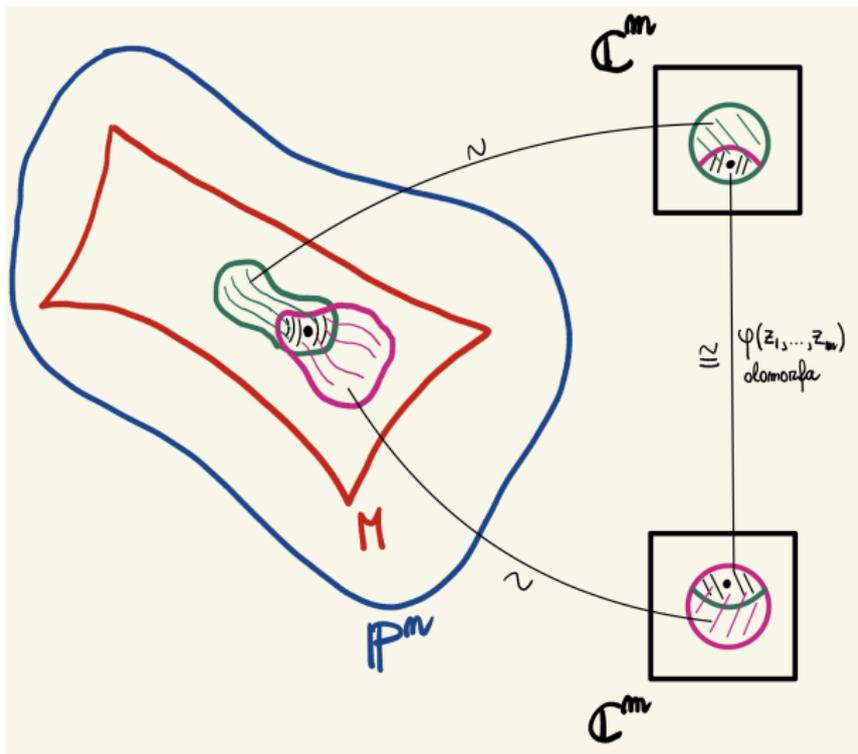
## Le varietà proiettive (lisce)

## Le varietà proiettive (lisce)

$M$  in  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  chiuso, localmente  $M \sim \mathbb{C}^m$  con funzioni di incollamento olomorfe,  $m = \dim_{\mathbb{C}}(M)$

## Le varietà proiettive (lisce)

$M$  in  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  chiuso, localmente  $M \sim \mathbb{C}^m$  con funzioni di incollamento **olomorfe**,  $m = \dim_{\mathbb{C}}(M)$



## Le varietà proiettive (lisce)

$M$  in  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  chiuso, localmente  $M \sim \mathbb{C}^m$  con funzioni di incollamento olomorfe,  $m = \dim_{\mathbb{C}}(M)$

**TEOREMA** [Chow, 1949; Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique* "GAGA", 1956]

$M$  è un oggetto algebrico  $\iff$  definito da polinomi!

$$M: \begin{cases} f_1(x_0, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_k(x_0, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

con  $f_1, \dots, f_k$  polinomi (omogenei),  $k \geq n - m$ .

## Le varietà proiettive (lisce)

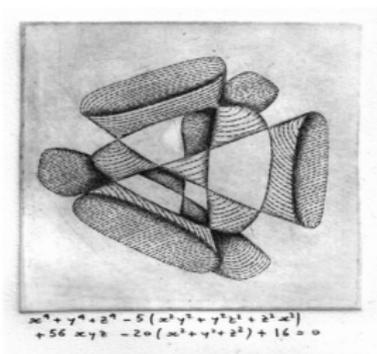
$M$  in  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  chiuso, localmente  $M \sim \mathbb{C}^m$  con funzioni di incollamento olomorfe,  $m = \dim_{\mathbb{C}}(M)$

**TEOREMA** [Chow, 1949; Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique* "GAGA", 1956]

$M$  è un oggetto algebrico  $\Leftarrow$  definito da polinomi!

$$M: \begin{cases} f_1(x_0, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_k(x_0, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

con  $f_1, \dots, f_k$  polinomi (omogenei),  $k \geq n - m$ .



© Patrice Jeener, La Motte Chalançon, France.

[LA SUPERFICIE DI KUMMER]

[[HTTPS://WWW.IHP.FR/FR/LE-GRAVEUR-DE-MATHEMATIQUES-PATRICE-JEENER](https://www.ihp.fr/fr/le-graveur-de-mathematiques-patrice-jeener)]

## Un esempio: la cubica gobba

## Un esempio: la cubica gobba

$C$  in  $\mathbb{P}^3$  curva parametrizzata da

$$[t : s] \mapsto [t^3 : t^2s : ts^2 : s^3]$$

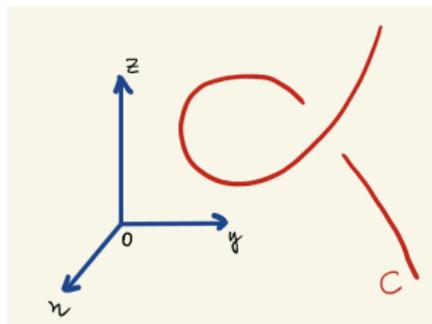
## Un esempio: la cubica gobba

$C$  in  $\mathbb{P}^3$  curva parametrizzata da

$$[t : s] \mapsto [t^3 : t^2s : ts^2 : s^3]$$

EQUAZIONI:

$$C: \begin{cases} x_0x_3 - x_1x_2 = 0 \\ x_1^2 - x_0x_2 = 0 \\ x_2^2 - x_1x_3 = 0 \end{cases}$$



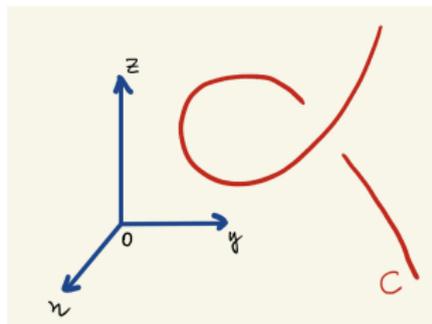
## Un esempio: la cubica gobba

$C$  in  $\mathbb{P}^3$  curva parametrizzata da

$$[t : s] \mapsto [t^3 : t^2s : ts^2 : s^3]$$

EQUAZIONI:

$$C: \begin{cases} x_0x_3 - x_1x_2 = 0 \\ x_1^2 - x_0x_2 = 0 \\ x_2^2 - x_1x_3 = 0 \end{cases}$$



**OSSERVAZIONE:**  $C$  non si può definire con meno di 3 equazioni!

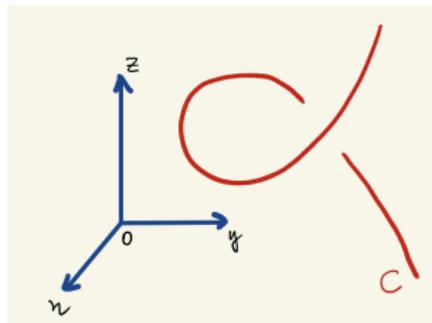
## Un esempio: la cubica gobba

$C$  in  $\mathbb{P}^3$  curva parametrizzata da

$$[t : s] \mapsto [t^3 : t^2s : ts^2 : s^3]$$

EQUAZIONI:

$$C: \begin{cases} x_0x_3 - x_1x_2 = 0 \\ x_1^2 - x_0x_2 = 0 \\ x_2^2 - x_1x_3 = 0 \end{cases}$$



**OSSERVAZIONE:**  $C$  non si può definire con meno di 3 equazioni!

**DOMANDA.** Di quante equazioni abbiamo bisogno in generale?

# La congettura di Hartshorne

## La congettura di Hartshorne

ESEMPIO: se  $M$  ha *codimensione 1* in  $\mathbb{P}^n$ ,

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{P}^n) - \dim_{\mathbb{C}}(M) = n - m = 1,$$

allora  $M$  è definita esattamente da un'equazione.

## La congettura di Hartshorne

ESEMPIO: se  $M$  ha *codimensione 1* in  $\mathbb{P}^n$ ,

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{P}^n) - \dim_{\mathbb{C}}(M) = n - m = 1,$$

allora  $M$  è definita esattamente da un'equazione.

CONGETTURA [Hartshorne, 1974]

Sia  $M$  una varietà proiettiva liscia di dimensione  $m$  in  $\mathbb{P}^n$ .

Se  $m > \frac{2}{3}n$ , allora  $M$  è definita da esattamente  $n - m$  equazioni polinomiali.

## La congettura di Hartshorne

ESEMPIO: se  $M$  ha *codimensione 1* in  $\mathbb{P}^n$ ,

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{P}^n) - \dim_{\mathbb{C}}(M) = n - m = 1,$$

allora  $M$  è definita esattamente da un'equazione.

CONGETTURA [Hartshorne, 1974]

Sia  $M$  una varietà proiettiva liscia di dimensione  $m$  in  $\mathbb{P}^n$ .

Se  $m > \frac{2}{3}n$ , allora  $M$  è definita da esattamente  $n - m$  equazioni polinomiali.

(NON-)ESEMPIO: cubica gobba  $\rightsquigarrow m = 1, n = 3$

## La congettura di Hartshorne

**ESEMPIO:** se  $M$  ha *codimensione 1* in  $\mathbb{P}^n$ ,

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{P}^n) - \dim_{\mathbb{C}}(M) = n - m = 1,$$

allora  $M$  è definita esattamente da un'equazione.

**CONGETTURA** [Hartshorne, 1974]

Sia  $M$  una varietà proiettiva liscia di dimensione  $m$  in  $\mathbb{P}^n$ .

Se  $m > \frac{2}{3}n$ , allora  $M$  è definita da esattamente  $n - m$  equazioni polinomiali.

**(NON-)ESEMPIO:** cubica gobba  $\rightsquigarrow m = 1, n = 3$

Il primo caso interessante è quello di codimensione 2

$\rightsquigarrow$  connessione con **fibrati vettoriali** e varie applicazioni.

# La congettura di Hartshorne

**ESEMPIO:** se  $M$  ha *codimensione 1* in  $\mathbb{P}^n$ ,

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{P}^n) - \dim_{\mathbb{C}}(M) = n - m = 1,$$

allora  $M$  è definita esattamente da un'equazione.

**CONGETTURA** [Hartshorne, 1974]

Sia  $M$  una varietà proiettiva liscia di dimensione  $m$  in  $\mathbb{P}^n$ .

Se  $m > \frac{2}{3}n$ , allora  $M$  è definita da esattamente  $n - m$  equazioni polinomiali.

**(NON-)ESEMPIO:** cubica gobba  $\rightsquigarrow m = 1, n = 3$

Il primo caso interessante è quello di codimensione 2

$\rightsquigarrow$  connessione con **fibrati vettoriali** e varie applicazioni.

**ESEMPIO** [Benoist–Voisin, 2024]

La congettura in codimensione 2 ha delle conseguenze per la **congettura di Hodge**: per risolvere la congettura di Hodge, studiare sottovarietà lisce non basterebbe!

# Fibrati vettoriali

## Fibrati vettoriali

D'ora in poi ci concentreremo soltanto sul caso di codimensione 2:

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{P}^n) - \dim_{\mathbb{C}}(M) = n - m = 2, \quad n \geq 7$$

## Fibrati vettoriali

D'ora in poi ci concentreremo soltanto sul caso di codimensione 2:

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{P}^n) - \dim_{\mathbb{C}}(M) = n - m = 2, \quad n \geq 7$$

### FIBRATO VETTORIALE

$E$  su  $M$ , localmente  $E \sim \mathbb{C}^r \times M$ , con funzioni di incollamento *lineari* in  $\mathbb{C}^r$ ,  $r = \text{rango}(E)$

## Fibrati vettoriali

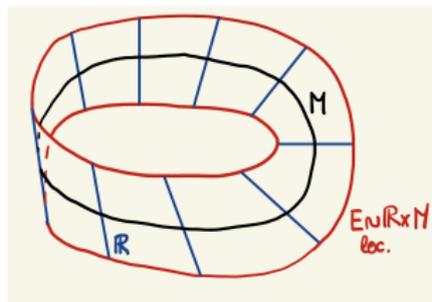
D'ora in poi ci concentreremo soltanto sul caso di codimensione 2:

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{P}^n) - \dim_{\mathbb{C}}(M) = n - m = 2, \quad n \geq 7$$

### FIBRATO VETTORIALE

$E$  su  $M$ , localmente  $E \sim \mathbb{C}^r \times M$ , con funzioni di incollamento *lineari* in  $\mathbb{C}^r$ ,  $r = \text{rango}(E)$

**ESEMPIO:** il **nastro di Möbius** (infinito)  $E$  è un fibrato vettoriale (reale) di rango 1 sul cerchio  $M$ :



## Fibrati vettoriali

D'ora in poi ci concentreremo soltanto sul caso di codimensione 2:

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{P}^n) - \dim_{\mathbb{C}}(M) = n - m = 2, \quad n \geq 7$$

### FIBRATO VETTORIALE

$E$  su  $M$ , localmente  $E \sim \mathbb{C}^r \times M$ , con funzioni di incollamento *lineari* in  $\mathbb{C}^r$ ,  $r = \text{rango}(E)$

$M$  in  $\mathbb{P}^n$  codimensione 2  $\rightsquigarrow$  esiste un fibrato vettoriale di rango 2 naturalmente associato:

## Fibrati vettoriali

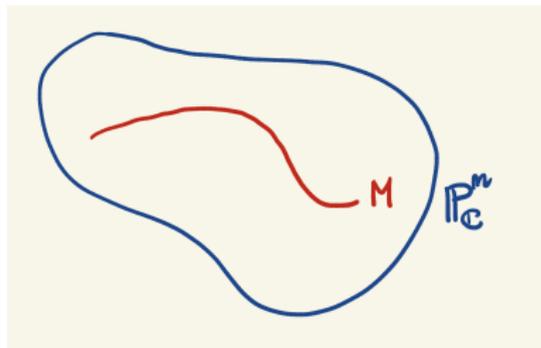
D'ora in poi ci concentreremo soltanto sul caso di codimensione 2:

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{P}^n) - \dim_{\mathbb{C}}(M) = n - m = 2, \quad n \geq 7$$

### FIBRATO VETTORIALE

$E$  su  $M$ , localmente  $E \sim \mathbb{C}^r \times M$ , con funzioni di incollamento *lineari* in  $\mathbb{C}^r$ ,  $r = \text{rango}(E)$

$M$  in  $\mathbb{P}^n$  codimensione 2  $\rightsquigarrow$  esiste un fibrato vettoriale di rango 2 naturalmente associato:



## Fibrati vettoriali

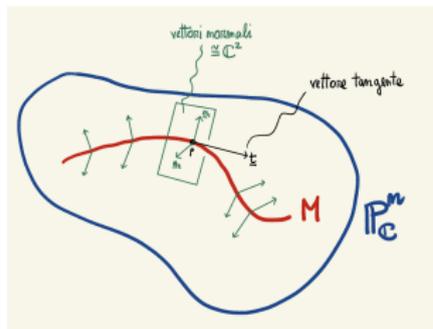
D'ora in poi ci concentreremo soltanto sul caso di codimensione 2:

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{P}^n) - \dim_{\mathbb{C}}(M) = n - m = 2, \quad n \geq 7$$

### FIBRATO VETTORIALE

$E$  su  $M$ , localmente  $E \sim \mathbb{C}^r \times M$ , con funzioni di incollamento *lineari* in  $\mathbb{C}^r$ ,  $r = \text{rango}(E)$

$M$  in  $\mathbb{P}^n$  codimensione 2  $\rightsquigarrow$  esiste un fibrato vettoriale di rango 2 naturalmente associato:



$\rightsquigarrow$  un  $\mathbb{C}^2$  di vettori normali

$\rightsquigarrow$  un fibrato vettoriale di rango 2 su  $M$

## Fibrati vettoriali

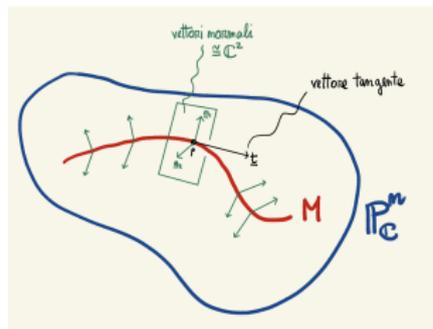
D'ora in poi ci concentreremo soltanto sul caso di codimensione 2:

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{P}^n) - \dim_{\mathbb{C}}(M) = n - m = 2, \quad n \geq 7$$

### FIBRATO VETTORIALE

$E$  su  $M$ , localmente  $E \sim \mathbb{C}^r \times M$ , con funzioni di incollamento *lineari* in  $\mathbb{C}^r$ ,  $r = \text{rango}(E)$

$M$  in  $\mathbb{P}^n$  codimensione 2  $\rightsquigarrow$  esiste un fibrato vettoriale di rango 2 naturalmente associato:



$\rightsquigarrow$  un  $\mathbb{C}^2$  di vettori normali

$\rightsquigarrow$  un fibrato vettoriale di rango 2 su  $M$

### TEOREMA [Barth, 1970]

Se  $n \geq 6$ , il fibrato vettoriale normale si estende ad un fibrato vettoriale di rango 2 su  $\mathbb{P}^n$ .

## Fibrati vettoriali

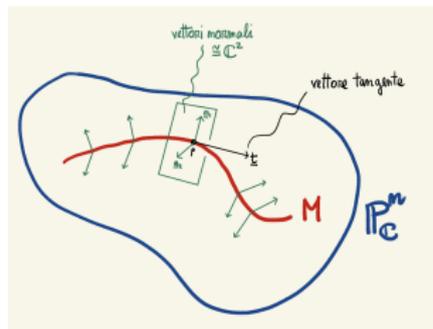
D'ora in poi ci concentreremo soltanto sul caso di codimensione 2:

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{P}^n) - \dim_{\mathbb{C}}(M) = n - m = 2, \quad n \geq 7$$

### FIBRATO VETTORIALE

$E$  su  $M$ , localmente  $E \sim \mathbb{C}^r \times M$ , con funzioni di incollamento *lineari* in  $\mathbb{C}^r$ ,  $r = \text{rango}(E)$

$M$  in  $\mathbb{P}^n$  codimensione 2  $\rightsquigarrow$  esiste un fibrato vettoriale di rango 2 naturalmente associato:



$\rightsquigarrow$  un  $\mathbb{C}^2$  di vettori normali

$\rightsquigarrow$  un fibrato vettoriale di rango 2 su  $M$

### TEOREMA [Barth, 1970]

Se  $n \geq 6$ , il fibrato vettoriale normale si estende ad un fibrato vettoriale di rango 2 su  $\mathbb{P}^n$ .

### CONGETTURA [Hartshorne, seconda versione, codimensione 2]

Se  $n \geq 7$ , tutti i fibrati di rango 2 su  $\mathbb{P}^n$  sono somme dirette di fibrati in rette.

## Fibrati vettoriali

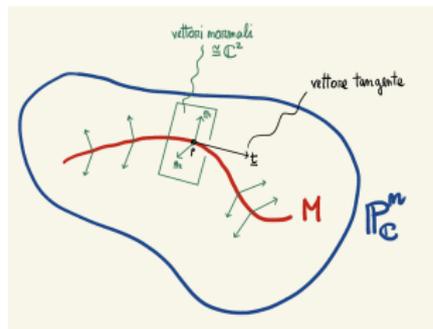
D'ora in poi ci concentreremo soltanto sul caso di codimensione 2:

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{P}^n) - \dim_{\mathbb{C}}(M) = n - m = 2, \quad n \geq 7$$

### FIBRATO VETTORIALE

$E$  su  $M$ , localmente  $E \sim \mathbb{C}^r \times M$ , con funzioni di incollamento *lineari* in  $\mathbb{C}^r$ ,  $r = \text{rango}(E)$

$M$  in  $\mathbb{P}^n$  codimensione 2  $\rightsquigarrow$  esiste un fibrato vettoriale di rango 2 naturalmente associato:



$\rightsquigarrow$  un  $\mathbb{C}^2$  di vettori normali

$\rightsquigarrow$  un fibrato vettoriale di rango 2 su  $M$

$\rightsquigarrow$  un fibrato vettoriale di rango 2 su  $\mathbb{P}^n$

**Idea:**  $M$  è definita da una sezione del fibrato, ovvero localmente da due equazioni.

La congettura di Hartshorne: queste due equazioni sono definite globalmente.

### TEOREMA [Barth, 1970]

Se  $n \geq 6$ , il fibrato vettoriale normale si estende ad un fibrato vettoriale di rango 2 su  $\mathbb{P}^n$ .

### CONGETTURA [Hartshorne, seconda versione, codimensione 2]

Se  $n \geq 7$ , tutti i fibrati di rango 2 su  $\mathbb{P}^n$  sono somme dirette di fibrati in rette.

## Curve in $\mathbb{P}^3$

## Curve in $\mathbb{P}^3$

Nello stesso articolo dove Hartshorne propone la sua celebre congettura, per dare contesto e ulteriori motivazioni, sono proposte *quattro domande* generali:

## Curve in $\mathbb{P}^3$

Nello stesso articolo dove Hartshorne propone la sua celebre congettura, per dare contesto e ulteriori motivazioni, sono proposte *quattro domande* generali:

*Question 1.1.* Which cohomology classes  $\xi \in H^{2q}(X, \mathbf{Z})$  are of the form  $\eta(Z)$  for some algebraic cycle  $Z$ ? If  $\xi = \eta(Z)$  we say that  $\xi$  is *represented* by the cycle  $Z$ .

*Question 1.2.* If  $\xi$  can be represented by some algebraic cycle, can one find a cycle  $Z = \sum n_i Y_i$  representing  $\xi$ , where the  $Y_i$  are all *nonsingular* subvarieties?

*Question 1.3.* Which cohomology classes  $\xi \in H^{2q}(X, \mathbf{Z})$  can be represented by a single irreducible nonsingular subvariety  $Y$ ?

*Question 1.4.* If  $Y$  is a nonsingular subvariety of codimension  $q$  in  $X$ , to what extent are properties of  $Y$  determined by its cohomology class  $\eta(Y)$ ?

## Curve in $\mathbb{P}^3$

Nello stesso articolo dove Hartshorne propone la sua celebre congettura, per dare contesto e ulteriori motivazioni, sono proposte *quattro domande* generali:

*Question 1.1.* Which cohomology classes  $\xi \in H^{2q}(X, \mathbf{Z})$  are of the form  $\eta(Z)$  for some algebraic cycle  $Z$ ? If  $\xi = \eta(Z)$  we say that  $\xi$  is *represented* by the cycle  $Z$ .

*Question 1.2.* If  $\xi$  can be represented by some algebraic cycle, can one find a cycle  $Z = \sum n_i Y_i$  representing  $\xi$ , where the  $Y_i$  are all *nonsingular* subvarieties?

*Question 1.3.* Which cohomology classes  $\xi \in H^{2q}(X, \mathbf{Z})$  can be represented by a single irreducible nonsingular subvariety  $Y$ ?

*Question 1.4.* If  $Y$  is a nonsingular subvariety of codimension  $q$  in  $X$ , to what extent are properties of  $Y$  determined by its cohomology class  $\eta(Y)$ ?

La domanda 1.4 implica la congettura di Hartshorne e ha senso di essere studiata anche in dimensioni più piccole, ad esempio per curve in  $\mathbb{P}^3$ .

## Curve in $\mathbb{P}^3$

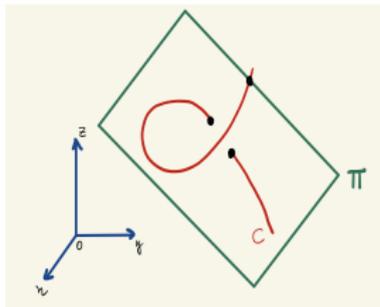
$C$  curva in  $\mathbb{P}^3$

$\rightsquigarrow$  possiamo associare a  $C$  due invarianti scalari, **grado**  $d = d(C)$  e **genere**  $g = g(C)$

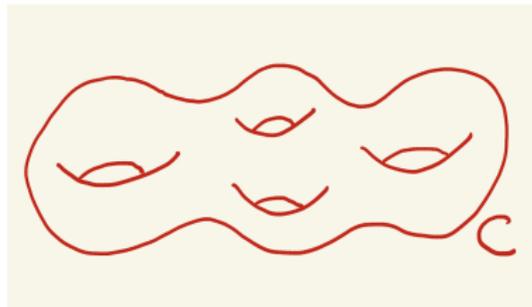
## Curve in $\mathbb{P}^3$

$C$  curva in  $\mathbb{P}^3$

$\rightsquigarrow$  possiamo associare a  $C$  due invarianti scalari, **grado**  $d = d(C)$  e **genere**  $g = g(C)$



[3 PUNTI DI INTERSEZIONE = GRADO]

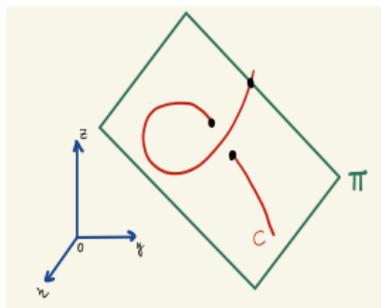


[4 BUCHI = GENERE]

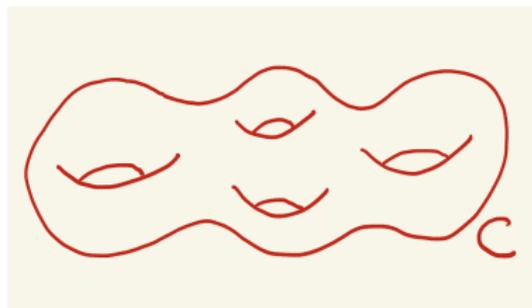
## Curve in $\mathbb{P}^3$

$C$  curva in  $\mathbb{P}^3$

↪ possiamo associare a  $C$  due invarianti scalari, **grado**  $d = d(C)$  e **genere**  $g = g(C)$



[3 PUNTI DI INTERSEZIONE = GRADO]



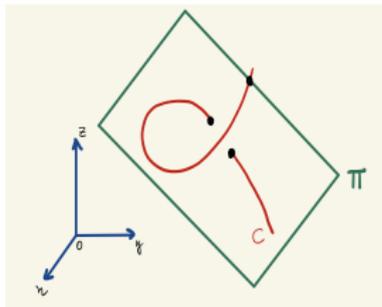
[4 BUCHI = GENERE]

**ESEMPIO:** se  $C$  è planare, allora  $g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ .

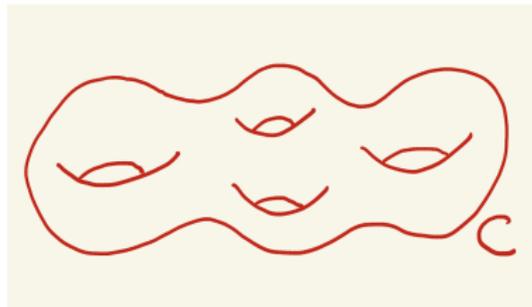
## Curve in $\mathbb{P}^3$

$C$  curva in  $\mathbb{P}^3$

↪ possiamo associare a  $C$  due invarianti scalari, **grado**  $d = d(C)$  e **genere**  $g = g(C)$



[3 PUNTI DI INTERSEZIONE = GRADO]



[4 BUCHI = GENERE]

**ESEMPIO:** se  $C$  è planare, allora  $g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ .

**TEOREMA** [Castelnuovo, 1893]

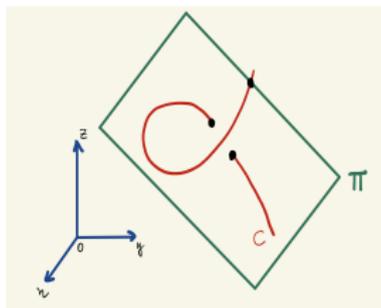
Se  $C$  non è contenuta in un piano, allora  $d \geq 3$  e

$$g \leq \frac{1}{4}d^2 - d + 1$$

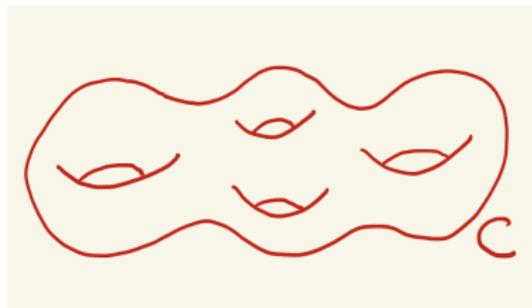
## Curve in $\mathbb{P}^3$

$C$  curva in  $\mathbb{P}^3$

↪ possiamo associare a  $C$  due invarianti scalari, **grado**  $d = d(C)$  e **genere**  $g = g(C)$



[3 PUNTI DI INTERSEZIONE = GRADO]



[4 BUCHI = GENERE]

**ESEMPIO:** se  $C$  è planare, allora  $g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ .

**TEOREMA** [Castelnuovo, 1893]

Se  $C$  non è contenuta in un piano, allora  $d \geq 3$  e

$$g \leq \frac{1}{4}d^2 - d + 1$$

Esiste una generalizzazione per curve non contenute in una superficie di grado  $< k$   
[problema di Halphen, 1882; congettura di Hartshorne–Hirschowitz, 1988]  
[Gruson–Peskine, Harris, 1978]: dimostrazione, se  $d > k(k-1)$

## La congettura BMT

## La congettura BMT

Esiste un punto di vista più recente su queste domande.

## La congettura BMT

Esiste un punto di vista più recente su queste domande.

APPROCCIO [Bayer–M.–Toda, 2014; Bayer–M.–Stellari, 2016; M.–Schmidt, 2018]

$C$  curva in  $\mathbb{P}^3$

## La congettura BMT

Esiste un punto di vista più recente su queste domande.

APPROCCIO [Bayer–M.–Toda, 2014; Bayer–M.–Stellari, 2016; M.–Schmidt, 2018]

$C$  curva in  $\mathbb{P}^3$

$\rightsquigarrow$  possiamo associare a  $C$  diversi fibrati vettoriali (o generalizzazioni di questi):

**fattori stabili** rispetto ad una certa nozione di stabilità [Douglas, 2002; Bridgeland, 2006]

## La congettura BMT

Esiste un punto di vista più recente su queste domande.

**APPROCCIO** [Bayer–M.–Toda, 2014; Bayer–M.–Stellari, 2016; M.–Schmidt, 2018]

$C$  curva in  $\mathbb{P}^3$

↪ possiamo associare a  $C$  diversi fibrati vettoriali (o generalizzazioni di questi):

**fattori stabili** rispetto ad una certa nozione di stabilità [Douglas, 2002; Bridgeland, 2006]

↪ la disuguaglianza di Castelnuovo (e le sue generalizzazioni) seguono allora da certe disuguaglianze per oggetti stabili:

**CONGETTURA** [BMT, dimostrata per diverse varietà proiettive, tra cui  $\mathbb{P}^3$ ]

$v_{\alpha,\beta}$  **condizione di stabilità** per (complessi di) fibrati vettoriali su  $\mathbb{P}^3$ , dipendente da due parametri reali  $\alpha, \beta$ . Se  $E$  è  $v_{\alpha,\beta}$ -stabile, allora

$$Q_{\alpha,\beta}(v) := \alpha(v_1^2 - 2v_0v_2) + \beta(3v_0v_3 - v_1v_2) + (2v_2^2 - 3v_1v_3) \geq 0,$$

dove  $v = (v_0, v_1, v_2, v_3) = \text{ch}(E) \in \mathbb{Q}^4$ .

## La congettura BMT

Esiste un punto di vista più recente su queste domande.

**APPROCCIO** [Bayer–M.–Toda, 2014; Bayer–M.–Stellari, 2016; M.–Schmidt, 2018]

$C$  curva in  $\mathbb{P}^3$

↪ possiamo associare a  $C$  diversi fibrati vettoriali (o generalizzazioni di questi):

**fattori stabili** rispetto ad una certa nozione di stabilità [Douglas, 2002; Bridgeland, 2006]

↪ la disuguaglianza di Castelnuovo (e le sue generalizzazioni) seguono allora da certe disuguaglianze per oggetti stabili:

**CONGETTURA** [BMT, dimostrata per diverse varietà proiettive, tra cui  $\mathbb{P}^3$ ]

$v_{\alpha,\beta}$  **condizione di stabilità** per (complessi di) fibrati vettoriali su  $\mathbb{P}^3$ , dipendente da due parametri reali  $\alpha, \beta$ . Se  $E$  è  $v_{\alpha,\beta}$ -stabile, allora

$$Q_{\alpha,\beta}(v) := \alpha(v_1^2 - 2v_0v_2) + \beta(3v_0v_3 - v_1v_2) + (2v_2^2 - 3v_1v_3) \geq 0,$$

dove  $v = (v_0, v_1, v_2, v_3) = \text{ch}(E) \in \mathbb{Q}^4$ .

**TECNICHE DI “WALL-CROSSING”**: invarianti di **Gromov–Witten** e **Donaldson–Thomas** per varietà di **Calabi–Yau** di dimensione 3 [Li, Huang–Klemm–Quackenbush, Liu–Ruan, Alexandrov–Feyzbakhsh–Klemm–Pioline–Schimannek, Feyzbakhsh–Thomas, . . . , 2024]

## La congettura BMT

Esiste un punto di vista più recente su queste domande.

**APPROCCIO** [Bayer–M.–Toda, 2014; Bayer–M.–Stellari, 2016; M.–Schmidt, 2018]

$C$  curva in  $\mathbb{P}^3$

↪ possiamo associare a  $C$  diversi fibrati vettoriali (o generalizzazioni di questi):

**fattori stabili** rispetto ad una certa nozione di stabilità [Douglas, 2002; Bridgeland, 2006]

↪ la disuguaglianza di Castelnuovo (e le sue generalizzazioni) seguono allora da certe disuguaglianze per oggetti stabili:

**CONGETTURA** [BMT, dimostrata per diverse varietà proiettive, tra cui  $\mathbb{P}^3$ ]

$v_{\alpha,\beta}$  **condizione di stabilità** per (complessi di) fibrati vettoriali su  $\mathbb{P}^3$ , dipendente da due parametri reali  $\alpha, \beta$ . Se  $E$  è  $v_{\alpha,\beta}$ -stabile, allora

$$Q_{\alpha,\beta}(v) := \alpha(v_1^2 - 2v_0v_2) + \beta(3v_0v_3 - v_1v_2) + (2v_2^2 - 3v_1v_3) \geq 0,$$

dove  $v = (v_0, v_1, v_2, v_3) = \text{ch}(E) \in \mathbb{Q}^4$ .

**TECNICHE DI “WALL-CROSSING”**: invarianti di **Gromov–Witten** e **Donaldson–Thomas** per varietà di **Calabi–Yau** di dimensione 3 [Li, Huang–Klemm–Quackenbush, Liu–Ruan, Alexandrov–Feyzbakhsh–Klemm–Pioline–Schimannek, Feyzbakhsh–Thomas, . . . , 2024]

**DOMANDA**. Disuguaglianza BMT generalizzata a  $\mathbb{P}^n$ ?

↪ possibili applicazioni alla congettura di Hartshorne?