Le théorème de factorisation faible

GDT : INTEGRAT° MOTIVIQUE ET RATIONALITÉ STABLE

le 01/12/20

Thm de la factorisat° faible

∘ Réf. : → Abramovich, Karu, Matsuki, Wlodarczyk [AKMW]
→ Wlodarczyk [W]
+ Proceedings of ICM
+ notes en ligne de son exposé

$k = \bar{k}$, car $k = 0$

I) INTRO → [factorisat° faible] [W, AKMW]

on va suivre cette preuve

∘ Thm : Soit $f : X \dashrightarrow Y$ bir, X, Y lisses et complètes/k.
Soit U un ouvert sur lequel f est un iso.
Alors f se factorise :

$$X = X_0 \overset{f_0}{\dashrightarrow} X_1 \dashrightarrow \cdots \overset{f_{n-1}}{\dashrightarrow} X_n = Y$$ où les f_i sont

des éclat° ou des contract°. de centre lisse
(+ isom sur U)

En dim 2 : Thm Zariski : Soit $f : S_1 \dashrightarrow S_2$ surfaces
complètes et lisses alors f se factorise :

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, dashed, "\text{éclat}^{t}"'] \arrow[dr, dashed, "\text{contract}^{°}"] & \\
f : S_1 \arrow[rr, dashed] & & S_2
\end{tikzcd}$$

↝ <u>conjecture</u> : Factorisat° forte ?
pareil que ds le thm de la factorisat° faible
+ $\exists\, 1 \leq i_0 \leq n$ tq $\forall i \leq i_0$ f_i est un éclatement et $\forall i > i_0$ f_i est une contraction.

<u>Rk</u> : Version torique [toroïdale] du thm de la factorisat° faible [Conjecture d'Oda] résolue par :
- Danilov en dim 3 '83
- Wlodarczyk '97 [91]
- Morelli '96 [93]

$\boxed{\text{Stratégie de Preuve}}$

1] Se ramener au cas où f est projective.

Hironaka : Eliminat° des pts d'indéterminat°

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, dashed, "f'"] \arrow[d, "\text{suites d'éclat}^{°}"'] & Y' \arrow[d] \\
f : X \arrow[r, dashed] & Y
\end{tikzcd}$$

f' projective

aujourd'hui

2] Construct° de cobordismes birationnels

[Wlo] ⇝ factoriser en des applicat° bir localement toriques

François

Grande contribut° de (AKMW)

3] [AKMW] $\boxed{\text{Torific at}^\circ}$ ⇝ factorisat° en des appli birat° toroidales

4) Résolut° des singularités + l'algorithme de Morelli

II) Cobordisme

1) Rappels Soit X variété et $k^* \curvearrowright X$

- def : Un quotient géométrique X/k^* : espace des orbites
- Un bon quotient $X//k^*$: espaces des classes d'équiv d'orbites où 2 orbites sont de la même classe d'équiv

si leur adhérence dans X s'intersectent.

<u>Ex</u> : $k^* \curvearrowright \mathbb{A}^n$ $t(x_1, \dots, x_n) = (tx_1, \dots, tx_n)$

$\mathbb{A}^n /\!/ k^* = \{pt\}$: bon quotient mais pas géom.

$\mathbb{A}^n \setminus \{0\} /_{k^*} = \mathbb{P}^{n-1}$: quotient géométrique

<u>Non ex</u> : $\mathbb{C} \curvearrowright \mathbb{C}^2$

$g \cdot (c_1, c_2) = (c_1, c_2 + g c_1)$

$\{(0,0)\}$ fixe

$\{(0,1)\}$ fixe

pr $\mathbb{C}^2 \xrightarrow{pr_1} \mathbb{C}$ pas un bon quotient.

② <u>Cobordisme en topo diff</u>

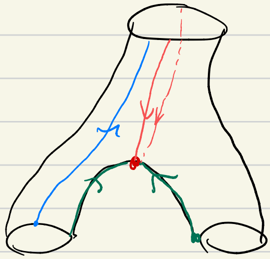
Soient M_1, M_2 deux var. diff compactes.

Un cobordisme $C(M_1, M_2)$ de M_1 et M_2 est une variété compacte à bord tq $\partial C(M_1, M_2) = M_1 \sqcup M_2$

Par ex :

$\mathcal{C}(\Omega_1,\Omega_2)$

$C = \mathcal{C}(\Omega_1,\Omega_2) \setminus \Omega_1 \cup \Omega_2$



$S^1 = \Omega_1$

$S^1 \sqcup S^1 = \Omega_2$

fonct° hauteur $h : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$

$(\mathbb{R}^{+*}, \cdot) \curvearrowright \mathcal{C}(\Omega_1,\Omega_2)$

$t \cdot p := \varphi_{\log t}(p)$: posit° de p au tps $\log t$ le long du flot associé au champ de vecteur

$C_+ = \{x \in C \mid \lim_{t \to +\infty} t.x$ n'existe pas ds $C\} = C \setminus \cap \simeq$ 

$C_- = \{x \in C \mid \lim_{t \to 0} t.x$ n'existe pas ds $C\} = C \setminus \cup \simeq$ 

$C_+/\mathbb{R}^{+*} \simeq M_1$

$C_-/\mathbb{R}^{+*} \simeq M_2$

③ Cobordisme birationnel [Wlodarczyk]

• déf : Soit $f : X_1 \dashrightarrow X_2$ bir. entre variétés normales.

Un cobordisme (birationnel) est une variété normale $B := B(X_1, X_2)$ munie d'une act° de k^* tq :

1] des ensembles

$$B_+ := \{ x \in B \text{ tq } \lim_{t \to +\infty} t.x \text{ n'existe pas dans } B \}$$

$$B_- := \{ x \in B \text{ tq } \lim_{t \to -\infty} t.x \text{ n'existe pas dans } B \}$$

soient des ouverts non-vides

2] $B_+ / k^* \xrightarrow{\sim} X_2$

$B_- / k^* \xrightarrow{\sim} X_1$

3) Soit φ l'appli birat° : $\varphi : B_+ \dashrightarrow B_-$

$$B_+ \hookleftarrow B_+ \cap B_- \hookrightarrow B_-$$

alors f est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} B_+ & \overset{\varphi}{\dashrightarrow} & B_- \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \overset{f}{\dashrightarrow} & X_2 \end{array}$$

$\underline{Ex}$: $k^* \curvearrowright \mathbb{A}_k^{\overset{l\ m}{2+2}} = B$

$t \cdot (x_1, x_2, y_1, y_2) = (tx_1, tx_2, t^{-1}y_1, t^{-1}y_2)$

1] $B_+ := \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{A}^4 \mid \bar{x} \neq 0\}$
$B_- := \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{A}^4 \mid \bar{y} \neq 0\}$ } ouverts non vides.

• $\underline{Rk}$: $B // k^*$

cone affine sur le plongement de Segre :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & & \mathbb{P}^3 \\ ([x_1 : x_2], [y_1 : y_2]) & \dashrightarrow & [\underset{u}{x_1y_1} : \underset{v}{x_1y_2} : \underset{w}{x_2y_1} : \underset{t}{x_2y_2}] \end{array}$$

$| \ ut - vw = 0 \ |$

$$S = \{(u, v, w, t) \in \mathbb{A}^4 \mid ut - vw = 0\}$$

• $\underline{Orbites}$: • $(0, 0, 0, 0)$

• $\forall \ \underline{[y_1 : y_2] \in \mathbb{P}^1}$ $\{t \cdot (\bar{0}, \bar{y})\}$

• $\forall \ \underline{[x_1 : x_2]} \in \mathbb{P}^1$ $\{t \cdot (\bar{x}, \bar{0})\}$

• $\forall \ [x_1 : x_2], [y_1 : x_2] \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ $\longleftrightarrow$ $S \setminus \{0\}$

B_+/h^* : quotient géométrique [adhérence des orbites ne s'intersecte plus de B_+]

$\ell^{-1} \subset$ lisse

$\mathbb{P}^1$

B_-/h^* : quot géom. lisse

m^{-1}

$\mathbb{P}^1 \subset$

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

$\mathbb{P}^1 \subset Bl_0 S$

flop d'Atiyah

$\mathbb{P}^1$

3) $f : B_+/h^* \dashrightarrow B_-/h^*$

$S \quad \bullet (0,0,0,0)$

④ Existence de cobordisme

Soit $f : X \dashrightarrow Y$ bir entre var proj lisses

$$\begin{tikzcd} & \Gamma_f(X,Y) \arrow[dl] \arrow[dr] & Z \arrow[l] \arrow[dll, bend right] \arrow[dl] \\ X \arrow[rr, dashed, "f"] & & Y \end{tikzcd}$$

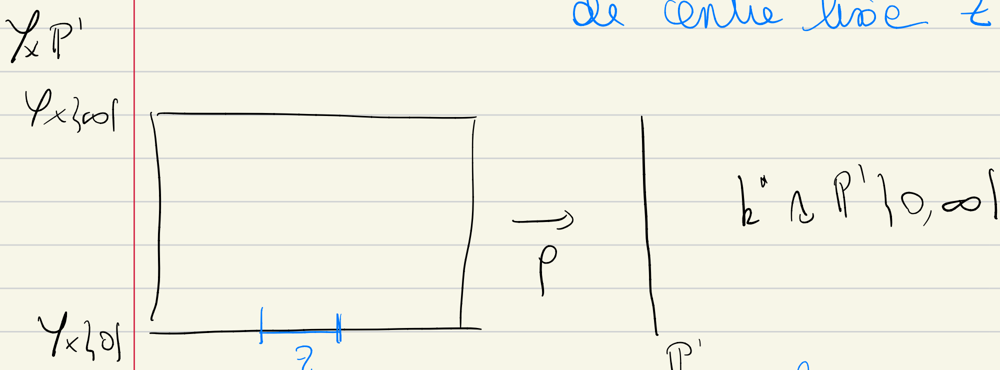
$\leftarrow$ morphisme birat°

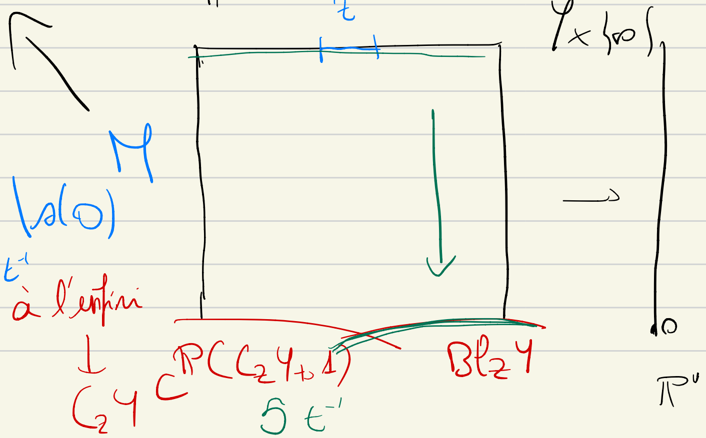
donc suffisant de construire un cobordisme pour $f : X \to Y$ morphisme birat°.

• **Prop :** Soit $f : X \to Y$ morphisme birat° entre var. lisses et proj. Soit $U \subset X$ tq f soit un iso sur U.
Alors $\exists$ cobordisme lisse $B(X,Y)$ entre X et Y contenant $U \times k^*$.

$\rightsquigarrow$ généralisat° de la déformat° du cône normal.

$\rightsquigarrow$ quand $f : X \to Y$ est un éclat° de centre lisse Z





$B = M \setminus Y \times \{\infty\} \cup Bl_Z Y$

$B_- = (Y - Z) \times \mathbb{A}^1 \cup \mathbb{P}(C_Z Y \oplus 1) \setminus s(0)$ $\circlearrowleft t^{-1}$ à l'infini

$B_+ = B \setminus \mathbb{P}(C_Z Y \oplus 1)$
$\simeq Y \times \mathbb{A}^1$

diviseur except

$B_- / h^{\alpha} = Y - Z \cup E \simeq X$

$B_+ / h^{\alpha} \simeq Y$.