Orsay, 3/11/2020

Introduction à l'intégration motivique

But : définir l'intégrale motivique pour une variété lisse $/\mathbb{C}$ (telle qu'elle fut inventée par Kontsevich)

Différents blocs de la théorie :

(1) Domaine de l'intégration : $J_\infty(X)$, espace des arcs de X

+ ensembles de mesurables : "cylindres"

(2) L'anneau des valeurs : $\widehat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}$, construit à partir de l'anneau de Grothendieck $K_0(Var_{\mathbb{C}})$

(3) mesure " μ_X : {mesurables de $J_\infty(X)$} $\longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}$

classe de fonctions intégrables

Cadre : X lisse, $k = \mathbb{C}$ [Kontsevich, 95']

Motivation historique (Kontsevich) :

Batyrev : deux variétés (lisses) Calabi-Yau (projectives), i.e : $K_X = 0$, $K_Y = 0$ ont les mêmes nombres de Betti (intégration p-adique)

Conj : les mêmes nombres de Hodge – Deligne

Kontsevich (intégration motivique) : démontre la conjecture de Batyrev.

References

Craw : " An introduction to motivic integration "

Blickle : "A short course on geom. motivic integration"

Looijenga : " motivic measure"

Batyrev : "Stringy Hodge numbers of varieties with Gorenstein canonical sing"

Veys "Arc spaces, motivic integration and stringy invariants"

Denef-Loeser : "Germs of Arcs on a singular varieties and motivic integration"

Ishii : "geometric properties of jet schemes"

[C-LNS18]

1 _ Espaces des arcs

[introduit par Nash 95' : germes de arcs ⟷ sing de X)
Ref : Ishii]

X schéma de type fini (quelconque)

$m \geq 0$, $\alpha : \operatorname{Spec} \mathbb{C}[t]/(t^{m+1}) \longrightarrow X$ is a $\underline{m\text{-jet}}$ of X

$J_m(X) = \{m\text{-jets}\}$ possède naturellement une structure de schémas.

$J_m(X)$ caractérisé par :

$\forall$ schéma Z :

$$\operatorname{Hom}\left(Z \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{C}} \operatorname{Spec} \mathbb{C}[t]/(t^{m+1}),\ X\right) \simeq \operatorname{Hom}\left(Z, J_m(X)\right)$$

" foncteur adjoint à dte de : $\_\times \operatorname{Spec} \mathbb{C}[t]/t^{m+1}$

$Z \xmapsto{F} Z \times \operatorname{Spec} \mathbb{C}[t]/(t^{m+1})$ $\qquad \operatorname{Hom}_{\text{sch}}(F(Z), X) = \operatorname{Hom}_{\text{sch}}(Z, G(X))$

contenant

Autrement dit : $J_m(X)$ représente le foncteur $\operatorname{Hom}(\_\times \operatorname{Spec} \mathbb{C}[t]/(t^{m+1}))$

[Greenberg 61-63] $\qquad \exists\, \tilde{X}$ $\operatorname{Hom}(F(Z), X) = \operatorname{Hom}(Z, \tilde{X})$ "

$$\mathbb{C}\text{-pts de } J_m(X) = \mathbb{C}[t]/(t^{m+1})\text{-pts of } J_m(X)$$

$\underline{\text{Ex}}$: $X = \operatorname{Spec} R$, $R = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]/(f_1, \dots, f_r)$

$Z = \operatorname{Spec} A$

$$\operatorname{Hom}(Z \times \operatorname{Spec} \mathbb{C}[t]/t^{m+1}, X) = \{\varphi : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N] \longrightarrow A[t]/(t^{m+1}),\ \varphi(f_i) = 0 \quad i = 1 \dots r\}$$

$$\varphi : x_j \longmapsto a_j^{(0)} + a_j^{(1)} t + \dots + a_j^{(m)} t^m, \quad a_i^{(\ell)} \in A$$

$$\varphi(f_i) = F_i^{(0)}(a_j^{(\ell)}) + F_i^{(1)}(a_j^{(\ell)}) t + \dots + F_m(a_j^{(\ell)}) t^m$$

(on veut : $F_i^{(n)}(a_j^{(\ell)}) = 0 \ \forall i$) $\qquad F_i^{(n)}(a_j^{(\ell)})$: polynôme en $a_j^{(\ell)}$

$$= \operatorname{Hom}(R_m, A), \quad R_m = \mathbb{C}[x_j^{(\ell)}, j = 1 \dots N, \ell = 0 \dots m] / (F_i^{(\ell)}(x_j^{(\ell')}), i = 1 \dots r, \ell, \ell' = 0 \dots m)$$

$$= \operatorname{Hom}(\underbrace{\operatorname{Spec} A}_{Z}, \underbrace{\operatorname{Spec} R_m}_{J_m(X)})$$

Ex : $X \subset \mathbb{A}^3$ défini par $x^2+yz=0$

$J_1(X)$: $(x_0+x_1t)^2+(y_0+y_1t)(z_0+z_1t) \equiv 0 \quad [t^2]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2+y_0z_0=0 \\ 2x_0x_1+y_0z_1+y_1z_0=0 \end{cases}$$

$J_1X \simeq TX$

Rem : general fact $J_0X \simeq X$, $J_1X \simeq TX$

Rem : par X general (pas nécessairement affine), J_mX obtenu par recollement

(X recouvrement affine ouvert : $\{U_i\}_{i\in I}$ $\quad J_m(U_i) \simeq \pi_m^{-1}(U_i)$ $\quad \pi_m : J_mX \to X$)

. $m \geqslant n$. La projection naturelle $\mathbb{C}[t]/(t^{m+1}) \longrightarrow \mathbb{C}[t]/(t^{n+1})$

induit un morphisme

$$\pi_{m,n} : J_m(X) \longrightarrow J_n(X)$$

Remarque importante : si X est lisse, $\pi_{m,n} : J_m(X) \longrightarrow J_n(X)$ est une fibration localement triviale (Zariski) de fibre $\mathbb{A}^{(m-n)\dim X}$

⚠ FAUX si X non lisse : par ex, $J_1X \simeq TX$ fibré sur $X \Leftrightarrow X$ lisse ...

Def : L'espace des arcs $J_\infty(X)$ est défini par :

$$J_\infty(X) = \varprojlim J_m(X)$$

Rem : . $\mathbb{C}$-pts de $J_\infty(X)$ = $\mathbb{C}[[t]]$-pts de X

. $\mathrm{Hom}(Z \hat{\times}_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}} \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[[t]], X) \simeq \mathrm{Hom}(Z, J_\infty X)$

Digression sur les sous-ensembles stables (important si X non lisse)

[Denef-Loeser]

Df : $A \subset J_\infty(X)$ est stable si : $\forall m \geq 0$, $\pi_m(A) =: A_m$ est un sous-ensemble constructible de $J_m(X)$, $A = \pi_m^{-1}(A_m)$ et l'application

$$\pi_{m+1,m} : A_{m+1} \longrightarrow A_m$$ est une fibration localement triviale de fibre $\mathbb{A}^{\dim X}$

$\longrightarrow \mu_X(A) = [A_m]\,\mathbb{L}^{-m\,d}$

Cas non lisse : principale difficulté : montrer que la classe des sous-ensembles stables peut être élargie en une classe d'alg. d'ens. mesurables qui contient les cylindres .. (cf [Denef-Loeser])

Pour l'intégration motivique, seule la structure réduite de $J_m(X)$, $J_\infty(X)$ importe : $\mathbb{C}$-pts.

<u>Cylindres</u> : classe particulière de sous-ensembles de $J_\infty(X)$ qui proviennent de jets finis

$$\pi_m : J_\infty(X) \longrightarrow J_m(X)$$

<u>Def</u> : Un <u>cylindre</u> de $J_\infty(X)$ est un ensemble de la forme $\pi_m^{-1}(B)$, $m \geq 0$
où B est un ensemble <u>constructible</u> de $J_m(X)$

union finie, disjointe, de (Zariski) localement fermés.

<u>Rem</u> L'ensemble des cylindres forme une algèbre au sens de la mesure (stable par complémentaire, union et intersection finie)

<u>Exemples importants de cylindres</u>

$Z \subset X$ fermée $\quad (ex : Z = \{f = 0\})$

$$\mathrm{ord}_Z : J_\infty(X) \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

$$\gamma \longmapsto \mathrm{ord}_Z(\gamma) : \text{l'ordre d'annulation de } \gamma^*(f)$$

$\gamma : \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[[t]] \longrightarrow X$, $\gamma^* : \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}[[t]]$, $f \in \mathbb{C}[X]$

$\gamma^*(f) = \underbrace{a_i}_{\neq 0} t^i + a_{i+1} t^{i+1} + \ldots$, $\gamma^*(f) \in \mathbb{C}[[t]]$; si $\gamma^*(f) = 0$, $\mathrm{ord}_Z(\gamma) = \infty$

- $\mathrm{ord}_Z(\gamma) = 0 \iff \pi_0(\gamma) \notin Z$
- $\mathrm{ord}_Z(\gamma) = \infty \iff \gamma \in J_\infty(Z)$
- $\mathrm{ord}_Z(\gamma) \geq m \iff \pi_{m-1}(\gamma) \in J_{m-1}(Z)$

$m \geq 0$, $\mathrm{ord}_Z^{-1}(m)$ cylindre

$\mathrm{ord}_Z^{-1}(\geq m) = \pi_{m-1}^{-1}(J_{m-1}(Z))$ $\boxed{m \neq 0}$

$\Rightarrow \mathrm{ord}_Z^{-1}(m) = \pi_{m-1}^{-1}(J_{m-1}(Z)) \setminus \pi_m^{-1}(J_m(Z)) = \pi_m^{-1}(\pi_{m,m-1}^{-1}(J_{m-1}(Z)) \setminus J_m(Z))$

$$\begin{tikzcd} J_\infty(X) \arrow[r, "\pi_m"] \arrow[rr, bend right, "\pi_{m-1}"'] & J_m(X) \arrow[r, "\pi_{m,m-1}"] & J_{m-1}(X) \end{tikzcd}$$

$\triangle$: $\mathrm{ord}_Z^{-1}(\geq 0) = \pi_0^{-1}(X) = J_\infty(X) \Rightarrow \mathrm{ord}^{-1}(0) = \pi_0^{-1}(X) \setminus \pi_0^{-1}(Y)$.

<u>Rem</u> : $\mathrm{ord}_Z^{-1}(\infty) = \bigcap_{m \geq 0} \mathrm{ord}_Z^{-1}(\geq m) = J_\infty(Z)$ <u>PAS</u> un cylindre !!!

<u>Rem</u> : $D = \sum_{i=1}^{r} a_i D_i$ diviseur effectif , $a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

on pose $\mathrm{ord}_D = \sum_{i=1}^{r} a_i \,\mathrm{ord}_{D_i}$

2 – Anneau de Grothendieck.

catégorie des variétés alg. sur $\mathbb{C}$

$K_0(Var_{\mathbb{C}})$ = groupe abélien engendré par les symboles $[X]$, $X \in Var_{\mathbb{C}}$, avec relations :

* $[X] = [Y]$ si $X \sim Y$ isomorphes
* $[X] = [X - Y] + [Y]$, $Y \subset X$ sous-variété fermée

$K_0(Var_{\mathbb{C}})$ muni d'une structure d'anneau unitaire :

$$[X] \times [Y] = [X \times_k Y] \quad (= [(X \times_k Y)_{red}] \; : \; X - X_{red} = \emptyset)$$

$$1 = [Spec\, \mathbb{C}]$$

$$\mathbb{L} := [\mathbb{A}^1]$$

Ex : $[\mathbb{C}^*] = \mathbb{L} - 1$

$[\mathbb{P}^1] = \mathbb{L} + 1$, $[\mathbb{P}^n] = \mathbb{L}^n + \mathbb{L}^{n-1} + \dots + \mathbb{L} + 1$

Exercice : Soit $Y \longrightarrow X$ une fibration localement triviale (Zariski) de fibre constante F. Alors : $[Y] = [X] . [F]$

Notion de dimension pour $\tau \in K_0(Var_{\mathbb{C}})$

$\dim \tau = d \overset{def}{\iff}$ il existe une expression de τ dans $K_0(Var_{\mathbb{C}})$

$\tau = \sum a_i [X_i]$, $a_i \in \mathbb{Z}$, X_i de dimension $\leq d$

et il n'existe pas de telle expression avec $\dim X_i \leq d-1$ $\forall i$

convention : $\dim \emptyset = -\infty$

Rem (exo) : $\dim (\tau \cdot \tau') \leq \dim \tau + \dim \tau'$, $\dim (\tau + \tau') \leq \max(\dim \tau, \dim \tau')$

$=$ si $\dim \tau \neq \dim \tau'$

. Posons $\mathcal{M}_{\mathbb{C}} := K_0(Var_{\mathbb{C}})[\mathbb{L}^{-1}]$

$\tau : K_0(Var_{\mathbb{C}}) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ s'étend à $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ en posant $\tau(\mathbb{L}^{-1}) = -1$

. $\hat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}} :=$ complétion de $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ relativement à la filtration

$\mathcal{F}^n \mathcal{M}_{\mathbb{C}} = \{ \tau \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}} \mid \dim \tau \leq n \}$

$\mathcal{F}^n \mathcal{M}_{\mathbb{C}} =$ sous-groupe de $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ engendré par les éléments $[X]\mathbb{L}^{-i}$ $\dim X - i \leq n$

$\dots \subset \mathcal{F}^{-1}\mathcal{M}_{\mathbb{C}} \subset \mathcal{F}^{0}\mathcal{M}_{\mathbb{C}} \subset \mathcal{F}^{1}\mathcal{M}_{\mathbb{C}} \subset \dots$

Rem : On ne sait toujours pas si $\mathcal{M}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}$ est injectif

ie : si $\bigcap_n \mathcal{F}^n \mathcal{M}_{\mathbb{C}} = 0$

[$\mathcal{M}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\hat{F}} \hat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}$, $\tau \longmapsto \prod_n p_n(\tau)$, $p_n : \mathcal{M}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{C}} / \mathcal{F}^n \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$

$\ker \hat{F} = \{ \tau \mid p_n(\tau) = 0 \ \forall n \} = \bigcap_n \mathcal{F}^n \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$]

ie $\tau \in \mathcal{F}^n \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$

ni si $K_0(Var_{\mathbb{C}}) \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ est injective

Exercice : la convergence dans $\hat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}$ est facile :

$$(\tau_i)_i \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0 \text{ dans } \hat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}} \iff \dim \tau_i \xrightarrow[i\to\infty]{} -\infty$$

(1) Montrer que : $\sum_{i=0}^{\infty} \tau_i$ converge $\iff$ $\tau_i \xrightarrow[\infty]{} 0$ dans $\hat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}$

(2) Montrer l'égalité dans $\hat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{L}^{-ki} = \frac{1}{1-\mathbb{L}^{-k}} \qquad \text{ie: } (1-\mathbb{L}^{-k}) \sum_{i\geq 0} \mathbb{L}^{-ki} = 1$$

Def : $\lambda : \mathrm{Ob}\,\mathrm{Var}_{\mathbb{C}} \longrightarrow R$, R anneau

λ invariant additif si :

- $\lambda(X) = \lambda(Y)$ quand $X \simeq Y$
- $\lambda(X) = \lambda(X \setminus Y) + \lambda(Y)$ $Y \subset X$ fermée
- $\lambda(X \times Y) = \lambda(X) \times \lambda(Y)$

$\Rightarrow \lambda : K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}}) \longrightarrow R$

la cohomologie à support compact $H_c(X;\mathbb{C})$ possède une structure de Hodge mixte

Ex : $$E(X; u, v) = \sum_{p,q=0}^{d} \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \underbrace{h^{p,q}(H_c^i(X,\mathbb{C}))}_{} u^p v^q \quad , d = \dim X$$

nombre de Hodge-Deligne
comp. d'indice (p,q) de la coh. à support compacte.

$K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ vérifie la pté universelle suivante :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ob}\,\mathrm{Var}_{\mathbb{C}} \arrow[r, "\forall \lambda"] \arrow[d, "\forall \lambda"'] & K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}}) \arrow[dl, dashed, "\exists \bar{\lambda}"] \\
R &
\end{tikzcd}$$

$X \longmapsto [X]$

3- Mesure motivique

X lisse, $d = \dim X$

<u>Def</u> : $C = \pi_m^{-1}(B)$, B constructible

$\mu_X(C) := [B]\,\mathbb{L}^{-dm} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}$

$= \lim_n [\pi_n(C)]\,\mathbb{L}^{-dn}$

<u>Point clé</u> : $\forall n \geq m$, $[\pi_n(C)] = \mathbb{L}^{(n-m)d}[\pi_m(C)]$

En effet $\pi_{n,m}$ fibration de fibre $\mathbb{A}^{d(n-m)}$

$\Longrightarrow [\pi_n(C)]\,\mathbb{L}^{-nd} = [\pi_m(C)]\,\mathbb{L}^{-md} \quad \forall n \geq m$

- Par ailleurs indépendant du choix de C ...

<u>Exercice</u> : $D \subset X$ diviseur lisse

Alors $\mu_X(\mathrm{ord}_D^{-1}(m)) = [D](\mathbb{L}-1)\,\mathbb{L}^{-1}$, $m \geq 1$

[En effet : $\mathrm{ord}_D^{-1}(\geq m+1) = \pi_m^{-1}(J_m(D))$

$\Rightarrow \mu_X(\ ) = [J_m(D)]\,\mathbb{L}^{-nd} = [D]\,\mathbb{L}^{(d-1)m}\,\mathbb{L}^{-md} = [D]\,\mathbb{L}^{-m}$

$\Rightarrow \mu_X(\mathrm{ord}_D^{-1}(m)) = [D]\mathbb{L}^{-m+1} - [D]\mathbb{L}^{-m} = [D](\mathbb{L}-1)\mathbb{L}^{-m}$]

<u>Rem</u> : $\mathrm{ord}_D^{-1}(0) = \underset{\substack{\| \\ \pi_0^{-1}(X)}}{J_\infty(X)} \setminus \pi_0^{-1}(D) \Rightarrow \mu_X(\mathrm{ord}_D^{-1}(0)) = [X - D]$

Ensembles mesurables

$\mathcal{A}$ = ensemble de tous les "mesurables"

<u>Def-prop</u> $C \subset J_\infty(X)$ mesurable si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists$ un cylindre C_n, et des cylindres $D_{n,i}$

tels que $\underbrace{C \Delta C_n}_{(C \setminus C_n) \cup (C_n \setminus C)} \subset \bigcup_i D_{n,i}$ et $\dim \mu_X(D_{n,i}) \leq -n$

Si C est mesurable, on définit son volume par :

$$\mu_X(C) = \lim_{n \to \infty} \mu_X(C_n)$$

Cette limite converge dans $\hat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}$ et ne dépend pas des cylindres [Batyrev '98]

$*$

<u>Prop</u> : (1) μ_X additive pour les réunions disjointes finies

(2) si $(C_i)_i$ suite disjointe d'ensembles mesurables tq $\lim_i \mu_X(C_i) = 0$

alors $C = \bigcup_i C_i \in \mathcal{A}$ et $\mu_X(C) = \sum_i \mu_X(C_i)$

(3) si $Y \subset X$ sous-var localement fermée. Alors $J_\infty(Y) \in \mathcal{A}$

et si $\dim Y < \dim X$, alors $\mu_X(J_\infty(Y)) = 0$

$J_\infty(Y) = \bigcap_{n \geq 0} \mathrm{ad}_Y^{-1}(m)$

⚠ $\mu_X(\pi_m^{-1}(J_m(Y))) \neq 0$

En pratique, $\mathcal{A} \xrightarrow{\mu_X} \hat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{E(-;u,v)} \mathbb{Z}[u,v][[u^{-1},v^{-1}]]$

$E(\mathbb{L}^{-1};u,v) = (uv)^{-1}$

puis on étend par continuité ...

(*) Détails concernant l'assertion " $(\mu_X(C_n))_n$ converge dans $\widehat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}$ et est indép. des cylindres C_n "

Point clé : $k = \mathbb{C}$ et $\mathbb{C}$ est non-dénombrable

[th de Baire]

Prop : Soit $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$ suite infinie de constructibles non-vides d'une variété complexe X : Alors $\bigcap_i K_i \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ si (C_i) suite de cylindres $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$ suite de cylindres non vides dans $\mathcal{J}_\infty(X)$, X lisse $/\mathbb{C}$, alors $\bigcap_i C_i \neq \emptyset$

[① : Appliquer le résultat à $\pi_0(C_i) \Rightarrow \exists\ x_0 \in \bigcap_i \pi_0(C_i)$

② On pose $C_i' := C_i \cap \pi_0^{-1}(x_0)$ et on applique la prop à $\pi_1(C_i')$

$\Rightarrow \exists x_1 \in \bigcap_i \pi_1(C_i')$

③ On construit ainsi des suites : $x_0 \in X$, $x_1 \in \mathcal{J}_1(X)$, $x_2 \in \mathcal{J}_2(X)$ ...

$\leadsto x \in \mathcal{J}_\infty(X)$ qui appartient à tous les C_i ☒]

L'indépendance des C_n : un peu technique...

Rem : Quels sont les sous-ensembles $C \subset \mathcal{J}_\infty(X)$ mesurables de mesure nulle ?

C est dit est de mesure nulle si : $\forall N > 0$, $\exists$ suite de cylindres $C_1(N), C_2(N) \dots$ tels que $C \subset \bigcup_i C_i(N)$ et $\mu_i(C_i(N)) \subset F^{-N}\widehat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}$, $i \geq 1$

Intégration

$F : A \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, $A \in \mathcal{A}$, mesurable

ie : $\forall s \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, $F^{-1}(s) \in \mathcal{A}$ et $\dim \mu_X(F^{-1}(\infty)) = 0$

Alors on pose :

$$\int_A \mathbb{L}^{-F} d\mu_X := \sum_s \mu_X(F^{-1}(s))\, \mathbb{L}^{-s}$$

On dit que F est intégrable si cette somme converge dans $\widehat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}$.

Ex : $D \subset X$ diviseur lisse de X

déjà vu : $\mu_X(\mathrm{ord}_D^{-1}(n)) = [D](\mathbb{L}-1)\mathbb{L}^{-n}$, $n \geqslant 1$

$\mu_X(\mathrm{ord}_D^{-1}(0)) = [X-D]$ & $\mu_X(\mathrm{ord}_D^{-1}(\infty)) = \mu_X(J_\infty(D)) = 0$

$$\int_{J_\infty(X)} \mathbb{L}^{-\mathrm{ord}_D} d\mu_X = \sum_n \mu_X(\mathrm{ord}_D^{-1}(n))\mathbb{L}^{-n}$$

$$= [X-D] + \sum_{n \geqslant 1} [D](\mathbb{L}-1)\mathbb{L}^{-2n}$$

$$= [X-D] + \frac{[D](\mathbb{L}-1)\mathbb{L}^{-2}}{1-\mathbb{L}^{-2}} \qquad \frac{[D](\mathbb{L}-1)\mathbb{L}^{-2}}{\mathbb{L}^{-2}\underbrace{(\mathbb{L}^2-1)}_{(\mathbb{L}-1)(\mathbb{L}+1)}} =$$

$$= [X-D] + \frac{[D]}{\mathbb{L}+1}$$

$$= [X-D] + \frac{[D]}{[\mathbb{P}^1]}$$

Plus généralement, $D = \sum_{i=1}^r a_i D_i$, D_i lisses, à CNS, $a_i \in \mathbb{N}$

$\mathrm{ord}_D = \sum_{i=1}^r a_i\, \mathrm{ord}_{D_i}$

[crw] Alors : $\boxed{\int_{J_\infty(X)} \mathbb{L}^{-\mathrm{ord}_D} d\mu_X = \sum_{J \subset \{1,\dots,r\}} [D_J^\circ] \prod_{j \in J} \frac{1}{[\mathbb{P}^{a_j}]}}$

$D_J = \bigcap_{j \in J} D_j$

$D_J^\circ = D_J \setminus \left(\bigcup_{j \notin J} D_j\right)$

$X = \bigsqcup_J D_J^\circ$

Règle de transformation

La puissance de la théorie réside dans l'existence d'une règle de transformation sous l'action d'un morphisme birationnel propre

th (Kontsevich / Denef-Loeser)

$f : Y \longrightarrow X$ morphisme birationnel propre, X, Y lisses

$K_{Y|X} = K_Y - f^*(K_X)$ $\left(= \sum a_i D_i\right)$. Alors

$$\int_{J_\infty(X)} \mathbb{L}^{-F} d\mu_X = \int_{J_\infty(Y)} \mathbb{L}^{-F \circ f_\infty - \mathrm{ord}\, K_{Y|X}} d\mu_Y$$

F mesurable, $f_\infty : J_\infty(Y) \longrightarrow J_\infty(X)$

$$\begin{tikzcd} J_\infty(Y) \arrow[r, "f_\infty"] \arrow[d, "\pi_0^Y"'] & J_\infty(X) \arrow[d, "\pi_0^X"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \gamma : \text{fct } \mathbb{C}[[t]] \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

$\rightarrow f_\infty(\gamma) = f \circ \gamma$

Ex : $f : \overset{Y}{\overset{\parallel}{\mathrm{Bl}_Z(X)}} \longrightarrow X$, $Z \subset X$ fermée, lisse, de codim r

$K_{Y|X} = (r-1)E$ $\left(= a_1 D_1\right)$

$F = 0$

$$\int_{J_\infty(Y)} \mathbb{L}^{-\mathrm{ord}\, K_{Y|X}} d\mu_X = [Y - E] + \frac{[E]}{[\mathbb{P}^{r-1}]} = [X - Z] + [Z] = [X]$$

$$= \int_{J_\infty(X)} d\mu_X$$

4 – Applications

thm (Kontsevich, version plus simple)

Deux variétés Calabi-Yau lisses (projectives) ont les mêmes nombres de Hodge

dém :

existe : cf [C-LNS] A.2.5.4

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\exists h_1"'] \arrow[dr, "\exists h_2"] & \\ X_1 \arrow[rr, dashed] & & X_2 \end{tikzcd}$$

"Théorème de Hironaka" : Z lisse, morphismes birationnels propres

$X_1 \dashrightarrow X_2$ birationnellement équivalentes

Il suffit de montrer que $[X_1] = [X_2]$ car alors $E([X_1], u, v) = E([X_2], u, v)$

or : $[X_1] = \int_{J_\infty(X_1)} d\mu_{X_1} = \int_{J_\infty(Z)} \mathbb{L}^{-\mathrm{ord}_{K_{Z|X_1}}} d\mu_Z \underset{\uparrow}{=} \int_{J_\infty(Z)} \mathbb{L}^{-\mathrm{ord}_{K_{Z|X_2}}} = [X_2]$

$K_{Z|X_1} = K_Z - \underbrace{h_1^*(K_{X_1})}_{=} = K_{Z|X_2}$ $\boxtimes$

[fait conjecturé par Batyrev : Batyrev démontre à l'aide de l'intégration p-adique que X et Y ont les mêmes nombres de Betti $h^i = \dim H^i(\_, \mathbb{C})$

$\leadsto$ K : intégration motivique pour montrer que $h^{i,j} = \dim H^i(\_, \Omega^j)$ sont les mêmes ...]

Conjecture de Batyrev (cadre légèrement plus large qu'en introduction)

Soient deux résolutions crépantes des singularités de X

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X_1 \arrow[dr, "\pi_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow [X_1] = [X_2]$

(X_1, X_2 birationnellement équiv.)

$K_{Y/X} = \sum a_i E_i$, $a_i \geq 0$

$f : Y \to X$

OK aussi A.2.5.4 [CLNS]

où X est une variété complexe projective avec singularités Gorenstein au plus canoniques

(crépante : $K_{X_i} - \pi_i^* K_X \equiv 0$)

Alors [Batyrev : $h_i = \dim H^i(-, \mathbb{C})$ sont les mêmes]

X_1 et X_2 ont les mêmes nombres de Hodge–Deligne $h^{p,q} = \dim H^q(-, \Omega^p)$.

Motivation (symétrie miroir : test topologique)

X, X^* paire miroir CY lisses, alors

$$h^{i,j}(X) = h^{n-i,j}(X^*)$$

FAUX si X^* non lisse.

Batyrev suggère : regarder les nombres de Hodge de résolutions crépantes si elle existe. Il faut alors prouver l'indépendance de ce choix

$\longrightarrow$ motivation pour le th de Kontsevich...

Plus généralement

si X_1, X_2 birationnellement équivalents, X, Y lisses

avec $h_1^*(K_{X_1}) = h_2^*(K_{X_2})$ alors X_1, X_2 ont les mêmes nombres de Hodge.

Conséquence : on peut définir

$$[X]_{st} := \int_{J_\infty(X_i)} \mathbb{L}^{-\mathrm{ord}\, K_{X_i|X}} \, d\mu_{X_i} \quad \left(= \sum_{p,q} (-1)^{p+q} h^{p,q}_{st}(X) u^p v^q \right)$$

$\rightsquigarrow$ nouveaux invariants : "invariants de cordes"

bien définis dès que X est à singularités $\mathbb{Q}$-Gorenstein log-terminales $(a_i > -1)$

$$E_{st}(X) := \int_{J_\infty Y} \mathbb{L}^{-\mathrm{ord}\, K_{Y|X}} \, d\mu_Y$$

Indépendance de la résolution Y : démonstration similaire à ci-dessus (Batyrev)

cas où X Gorenstein