Examen

25/01/19, durée 3h

Les documents sont interdits.

Exercice 1. Les questions suivantes n'ont besoin que de brèves justifications.

1. Donner la définition d'un anneau de Dedekind.
2. Soit L/K une extension finie de corps de nombres, $\mathcal{O}_K$ et $\mathcal{O}_L$ les anneaux d'entiers correspondant. Décrire en fonction de $\Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}$ les idéaux premiers ramifiés de $\mathcal{O}_L$.
3. Rappeler la définition d'un corps local.
4. Soit K un corps. Soit $\alpha \in Br(K)$, $n > 0$. Peut-on trouver $\beta \in Br(K)$ tel que $n\beta = \alpha$? Donner une classe de corps pour laquelle c'est le cas.
5. Soit K un corps local. Combien existe-t-il de classes d'isomorphismes d'algèbres simples centrales de dimension finie A telles que $A^{\otimes n} \simeq M_n(K)$?

Exercice 2. Soit K un corps de nombres, et soit L une extension finie de K. On note $P(L/K)$ l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ non ramifiés de $\mathcal{O}_K$ tels qu'il existe dans $\mathcal{O}_L$ un idéal premier $\mathfrak{P}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$ tel que $f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = 1$.

1. Si L/K est galoisienne, rappeler la définition des Frobenius et le théorème de Cebotarev pour L/K.
2. On ne suppose plus L/K galoisienne. Soit N une extension galoisienne de K contenant L. Montrer que $\mathfrak{p}$ est dans $P(L/K)$ si et seulement si la classe de conjugaison du Frobenius en $\mathfrak{p}$ dans $Gal(N/K)$ rencontre $Gal(N/L)$.
3. Déduire de ce qui précède que la densité analytique de $P(L/K)$ est au moins $1/[L : K]$.
4. Montrer que L/K est galoisienne si et seulement si on a égalité dans la question précédente.
5. Supposons que tous les idéaux premiers de $\mathcal{O}_K$, sauf un nombre fini, soient totalement décomposés dans L. Montrer que $L = K$.
6. Montrer que L/K est galoisienne si et seulement si tout idéal premier dans $P(L/K)$ est totalement décomposé dans L.

Exercice 3. Soit $n \geq 3$, ζ_n une racine primite n-ième de l'unité dans $\mathbb{C}$.

1. Rappeler à quel condition sur le nombre premier p l'idéal (p) est ramifié dans $\mathbb{Q}(\zeta_n)$.
2. Décrire le groupe de Galois de $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$, et identifier le groupe de Galois de $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$ à l'intérieur.
3. Identifier les Frobenius dans le groupe de Galois de l'extension $\mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})/\mathbb{Q}$.

4. À quelle condition sur p l'idéal (p) est-il totalement décomposé dans $\mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$?

Problème

Soit K un corps local non-archimédien, et soit L une extension finie de K. On suppose L/K galoisienne de groupe G. On note v_K et v_L les valuations discrètes de K et L respectivement, $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{P}$ leurs idéaux premiers. On note p la caractéristique résiduelle.

1. Montrer qu'il existe un entier e tel que $(ev_L)_{|K} = v_K$. Donner une autre caractérisation de e.
2. Pour tout entier s, soit G_s le sous-groupe de G défini par

$$G_s = \{\sigma \in G | \forall a \in \mathcal{O}_L, v_L(\sigma(a) - a) \geq s + 1\}.$$

   Quels sont les groupes G_{-1}, G_0 ? Quelle est l'intersection des G_s ?
3. Si $s \geq 1$, soit U_s le groupe $1 + \mathfrak{P}^s$, $U_0 = \mathcal{O}_L^*$. Soit ϖ une uniformisante de L. Montrer que le morphisme

$$G_s/G_{s+1} \to U_s/U_{s+1}, \sigma \mapsto \frac{\sigma(\varpi)}{\varpi}$$

   est bien défini, indépendant de ϖ.
4. En se réduisant au cas totalement ramifié, montrer que le morphisme ci-dessus est injectif.
5. Que dire des groupes G_s/G_{s+1}, et de leur cardinal ?
6. Supposons maintenant que K contienne une racine primitive p-ième de l'unité. Soit $L = K(\varpi^{1/p})$. Montrer que L est galoisienne, cyclique, totalement ramifiée.
7. Soit σ un générateur de $Gal(L/K)$. Trouver le plus grand s tel que $\sigma \in G_s$, en fonction de e et p.
8. On suppose K arbitraire, on choisit n premier à p avec $n < pv_K(p)/(p-1)$. Soit $\alpha \in K$ de valuation $-n$, $L = K[X]/(X^p - X - \alpha)$. Montrer que L/K est galoisienne de groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (on pourra exprimer toutes les racines de l'équation en fonction de l'une d'entre elles).
9. Calculer les groupes G_s dans le cas précédent.
10. Calculer les groupes G_s pour l'extension $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$.