Examen partiel

30/11/18, durée 3h

Les documents sont interdits.

Exercice 1. Les questions suivantes n'ont besoin que de brèves justifications.

1. Énoncer le théorème de Wedderburn. En déduire la classification des algèbres simples centrales de dimension finie sur un corps algébriquement clos. Que dire du centre d'une algèbre simple de dimension finie sur un corps ?
2. Rappeler la définition d'un réseau dans $\mathbb{R}^n$. Soit L un réseau de $\mathbb{R}^n$, et soit L' un sous-réseau de L. Calculer le covolume de L' en fonction de celui de L.
3. Rappeler la définition des groupes de décomposition et d'inertie dans le contexte d'une extension finie de corps de nombres. Si L/K est une extension finie de corps de nombres, montrer que le groupe d'inertie est trivial en presque tout premier $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{O}_L$.

Exercice 2. Soit K un corps de nombres.

1. Soit A un anneau de valuation discrète, de corps des fractions K. Soit B un sous-anneau de K qui est un anneau de valuation discrète contenant A. Montrer que $A = B$ ou $B = K$.
2. Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K, soit L une extension finie de K, et soit B un sous-anneau de L, contenant A, local noethérien. Supposons que l'on a $\Omega^1_{B/A} = 0$. Montrer que B un anneau de valuation discrète.
3. Soit L une extension finie de K. Soit B un $\mathcal{O}_K$-ordre de L. Si $\Omega^1_{B/\mathcal{O}_K} = 0$, montrer que $B = \mathcal{O}_L$.
4. Soit a un élément de K, et soit n un entier strictement positif. Soit L l'extension finie $L = K(a^{1/n})$. Donner, en fonction de a et de n, un ensemble fini d'idéaux premiers de $\mathcal{O}_K$ en dehors desquels L est non-ramifiée.
5. Soit I un idéal fractionnaire de $\mathcal{O}_K$. Si I^n est principal, montrer qu'il existe a tel que $I\mathcal{O}_L$ est principal.
6. Soit I un idéal fractionnaire de $\mathcal{O}_K$, d'ordre $n > 1$ dans le groupe de classes de K. Montrer que si L est une extension finie de K de degré premier à n, alors $I\mathcal{O}_L$ n'est pas principal.

Exercice 3. Soit $d \neq 0, 1$ un entier sans facteur carré. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

1. Soit P un polynôme non constant à coefficients entiers. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ avec $P(n)$ divisible par p.

2. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que (p) est totalement décomposé dans $\mathcal{O}_K$.
3. Soit p un nombre premier, et supposons $p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}\mathfrak{q}$, avec $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ premiers distincts. Supposons que pour un certain entier n et un certain $x \in \mathcal{O}_K$, on ait $\mathfrak{p}^n = (x)$. Que dire de la norme de x ? L'élément x peut-il être dans $\mathbb{Z}$?
4. On suppose maintenant $d < 0$. Montrer que $p^n \geq |d|/4$. En déduire une borne inférieure sur le nombre de classes de $\mathcal{O}_K$.
5. Supposons que d n'est pas divisible par 3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur d pour que (3) soit totalement décomposé dans $\mathcal{O}_K$. En déduire que les nombres de classes des $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d < 0$, ne sont pas bornés.

Problème

Soit k un corps. Soit A une algèbre simple centrale de dimension n^2 sur k.

1. Supposons $A = \mathrm{End}(V)$, où V est un k-espace vectoriel de dimension n. Rappeler quel est, à isomorphisme près, l'unique A-module à gauche simple.
2. Soit $B = \mathrm{End}(W)$, où W est un k-espace vectoriel de dimension n, et soit $\phi : A \to B$ un automorphisme d'algèbres. En utilisant la question précédente, déduire de ϕ un isomorphisme $f : V \to W$, et calculer ϕ en fonction de f.
3. Soit V un espace vectoriel de dimension n. Montrer que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur $V^{\otimes n}$ de telle sorte que pour toute permutation σ et tous $v_1, \ldots, v_n \in V$, on ait
$$\sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)}.$$
4. Soit L le sous-espace de $V^{\otimes n}$ dont les éléments sont les $\alpha \in L$ tels que pour toute permutation σ, on ait
$$\sigma(\alpha) = \epsilon(\sigma)\alpha,$$
où $\epsilon(\sigma) = \pm 1$ est la signature de σ. Montrer que L est de dimension 1.
5. Construire une application naturelle $p : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$ d'image L, telle que $p \circ p = n!p$.
6. Constuire un isomorphisme canonique $\mathrm{End}(V)^{\otimes n} \to \mathrm{End}(V^{\otimes n})$.
7. Soit H l'image du morphisme
$$\mathrm{End}(V^{\otimes n}) \to \mathrm{End}(V^{\otimes n}), f \mapsto fp.$$
Montrer que H est un k-espace vectoriel de dimension n^n, et que la flèche naturelle
$$\mathrm{End}(V^{\otimes n}) \to \mathrm{End}(H)$$
que l'on définira est un isomorphisme.

8. On revient au cas où A est arbitraire. Soit K une extension finie galoisienne de k telle qu'il existe un isomorphisme $\phi : A \otimes_k K \to \mathrm{End}(V)$, où $V = K^n$. Soit G le groupe de Galois de K/k. Pour tout $\sigma \in G$, l'action de σ sur K induit une application $i_\sigma : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ qui est σ-linéaire. De même, soit $j_\sigma : A \otimes_k K \to A \otimes_k K$ l'isomorphisme σ-linéaire induit par σ sur K. Construire un isomorphisme K-linéaire $f_\sigma : V \to V$ tel que l'isomorphisme de K-algèbres
$$i_\sigma \circ \phi \circ (j_\sigma)^{-1} \circ \phi^{-1} : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$$
soit la conjugaison par f_σ.
9. Si tous les f_σ sont des homothéties, montrer que A est déployée sur k.
10. En utilisant la construction de la question 7, montrer que $A^{\otimes n}$ est une algèbre de matrices.
11. Montrer que tout élément du groupe de Brauer d'un corps de caractéristique 0 est de torsion.