Cours 4 Suites de fonctions

- Quelques exemples
  $\alpha_n(t) \equiv \frac{1}{n}\sin(nt), t \in \mathbb{R}, n \geq 1$
  $\beta_n(t) \equiv t^n, t \in [0,\,1], n \in \mathbb{N}$
  $\gamma_n(t) \equiv n^2 t \exp(-nt), t \in [0,\,+\infty[, n \in \mathbb{N}$
  $\delta_n(t) \equiv \sqrt{t}\,\exp(-nt), t \in [0,\,+\infty[, n \in \mathbb{N}$
- Convergence simple

La suite de fonctions $f_n(t)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et t appartenant à un intevalle I, converge simplement vers une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $t \in I$, la suite numérique $f_n(t)$ converge vers le nombre $f(t)$ si n tend vers $+\infty$.

- Convergence uniforme

La suite $f_n(t)$ convergence uniformément vers la fonction f si et seulement si pour toute mesure de l'erreur $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour tout entier $n \geq N$ et pour tout réel $t \in I$, on a $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.
La suite $\alpha_n(t)$ converge uniformément vers 0 si n tend vers $+\infty$. Il en est de même de la suite $\delta_n(t)$ sur $[0,\,+\infty[$. Pour la suite $\gamma_n(t)$, on observe que cette suite converge simplement vers 0. Par contre, on remarque que la suite numérique $\gamma_n(1/n)$ ne tend pas vers 0 si n tend vers $+\infty$ et la convergence n'est donc pas uniforme.

- Théorème important: continuité de la limite uniforme

Si la suite $f_n(t)$ de fonctions continues sur I converge uniformément vers la fonction f, alors la fonction limite f est continue sur l'intervalle I.
La convergence de la suite $\beta_n(t)$ n'est pas uniforme sur $[0,\,1]$.

- Dérivation d'une suite de fonctions dont les dérivées convergent uniformément

On se donne une suite de fonctions $f_n(t)$ dérivables sur l'intervalle I. On suppose qu'elle converge simplement vers une fonction f. On suppose de plus que la suite des fonctions dérivées $f_n'(t)$ converge uniformément sur I vers une fonction g. Alors la fonction limite f est dérivable et $f' = g$.
La suite des dérivées $\alpha_n'(t)$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur la droite réelle $\mathbb{R}$.

- Intégration d'une famille de fonctions qui converge uniformément

On se donne deux réels $a < b$ et on suppose $I = [a,\,b]$. Si la suite de fonctions $f_n(t)$ converge uniformément vers la fonction f sur I, alors on peut échanger les symboles d'intégration et de passage à la limite : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
Attention. Cette propriété peut être mise en défaut si on intègre sur un intervalle non borné. Considérons par exemple la fonction g_n définie par $g_n(t) = \frac{1}{n}$ si $0 \leq t \leq n$ et $g_n(t) = 0$ sinon. Elle converge uniformément vers 0 sur l'intervalle $[0,\,+\infty[$ alors que $\int_0^\infty g_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$ pour tout entier n.

François Dubois et Chloé Mimeau, 19 octobre 2016.