le cnam **Analyse et Calcul Matriciel**

Cours 12 Systèmes linéaires et changement de base

- Trois exemples de systèmes linéaires

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z &=& 3 \\ y+2z &=& 2 \\ z &=& 0 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z &=& 3 \\ y+2z &=& 2 \\ 2y+4z &=& -3 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z &=& 3 \\ y+2z &=& 2 \\ 2y+4z &=& 4 \end{array}\right. .$$

Avec des calculs simples, on se rend compte que le premier système linéaire a une solution unique. Par contre, le second système n'a pas de solution, alors que le troisième a une infinité de solutions.

- Matrices carrées inversibles.

On se donne une matrice $A = \big(a_{ij}\big)_{1\leq i,\, j\leq n}$ d'ordre n à coefficients réels et un vecteur colonne $B = \big(b_i\big)_{1\leq i\leq n}$ d'ordre n. On cherche à déterminer le vecteur colonne $X = \big(x_j\big)_{1\leq j\leq n}$ d'ordre n solution du système linéaire (1) $A\,X = B$.
On interprète le système linéaire (1) à l'aide d'une application linéaire u. On se donne un espace vectoriel E de dimension n et une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E. On suppose que u est une application linéaire de E dans E (on dit aussi un endomorphisme de l'espace E). On suppose que u a pour matrice A dans la base des (e_j). On se donne un vecteur $b \in E$ de coordonnées b_i dans la base précédente : $b = \sum_{i=1}^{n} b_i\, e_i$. Alors la résolution du système linéaire (1) est équivalente à la recherche de $x \in E$ de coordonnées x_j dans la base (e_j), c'est à dire $x = \sum_{j=1}^{n} x_j\, e_j$, de sorte que (2) $u(x) = b$. L'équation (2) a une solution unique $x \in E$ si et seulement si l'application linéaire u est bijective.

- Conditions de bijectivité d'un endomorphisme

On rappelle que le noyau $\ker u$ est l'ensemble des vecteurs x de E tels que $u(x) = 0$: $\ker u = \{x \in E,\ u(x) = 0\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E. L'application u est injective (c'est à dire l'équation (2) a au plus une solution) si et seulement si $\ker u = \{0\}$.
L'image $\mathrm{Im}\, u$ est l'ensemble de tous les vecteurs y de l'espace d'arrivée (ici égal à E lui même), qui peuvent s'écrire sous la forme $y = u(x)$: $\mathrm{Im}\, u = \{u(x), x \in E\} = \{y \in E,\ \exists x \in E,\ y = u(x)\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E. L'application u est surjective (c'est à dire l'équation (2) a au moins une solution) si et seulement si $\mathrm{Im}\, u = E$.
On a les équivalentes suivantes : l'endomorphisme u est bijectif $\Longleftrightarrow$ (u est injectif) $\Longleftrightarrow$ ($\ker u = \{0\}$) $\Longleftrightarrow$ (u est surjectif) $\Longleftrightarrow$ ($\mathrm{Im}\, u = E$) $\Longleftrightarrow$ (u transforme toute base de E en une base de E).

- Matrice transposée.

On se donne une matrice A. La matrice transposée A^{t} s'obtient en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice A: $A^{\mathrm{t}}_{ij} = A_{ji}$. On vérifie facilement que $(A\,B)^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}} A^{\mathrm{t}}$.

- Noyau, image et rang d'une matrice

Le noyau $\ker A$ de la matrice carrée A est l'ensemble des $X \in \mathbb{R}^n$ tels que $A\,X = 0$. L'image $\mathrm{Im} A$ est l'ensemble des $Y \in \mathbb{R}^n$ qui peuvent s'écrire sous la forme $Y = A\,X$. Le rang $\mathrm{rg} A$ de

François Dubois et Chloé Mimeau, 14 décembre 2016.

de la matrice carrée A est la dimension de l'image de A : $\mathrm{rg} A = \dim(\mathrm{Im} A)$.
Théorème. Si la matrice A est carrée d'ordre n, on a toujours $\dim(\ker A) + \mathrm{rg} A = n$.
Théorème. Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée : $\mathrm{rg} A^{\mathrm{t}} = \mathrm{rg} A$.

- Critère pratique pour garantir qu'un système linéaire carré a une solution unique

L'équation (1) a une solution unique si et seulement si l'équation homogène (3) $AX = 0$ (obtenue en remplaçant B par zéro dans le membre de droite de (1)) a pour seule solution $X = 0$.

- Matrice inverse d'une matrice carrée

Si le système linéaire (1) a une solution unique X, on a aussi (4) $X = A^{-1} B$. La matrice A^{-1} est la matrice inverse de la matrice A : $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = \mathrm{I}$.
La matrice A^{-1} est aussi la matrice de l'endomorphisme réciproque u^{-1} dans la base (e_i).
Si on pose par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on calcule A^{-1} en résolvant le système linéaire très général $\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - z &=& \alpha \\ y + 2z &=& \beta \\ z &=& \gamma \end{array} \right.$. La solution s'écrit $x = \alpha - 2\beta + 5\gamma$, $y = \beta - 2\gamma$, $z = \gamma$. On en déduit que l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est égal à $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Méthode des multiplicateurs (ou méthode de Gauss)

On expose la méthode sur l'exemple suivant : $\left\{ \begin{array}{rcl|l|l} x + 2y + 3z &=& 14 & 1 & 0 \\ -x + 4y + z &=& 10 & 1 & 1 \\ x - y + 0z &=& -1 & 0 & 1 \end{array} \right.$.
On multiplie les équations par les familles de multiplicateurs écrits dans les colonnes de droite, ce qui permet d'éliminer l'inconnue x. On en déduit alors un système de deux équations à deux inconnues $\left\{ \begin{array}{rcl} 6y + 4z &=& 24 \\ 3y + z &=& 9 \end{array} \right.$, que l'on simplifie : $\left\{ \begin{array}{rcl|l} 3y + 2z &=& 12 & 1 \\ 3y + z &=& 9 & -1 \end{array} \right.$.
On résout ce système de deux équations à deux inconnues avec le jeu de multiplicateurs indiqué dans la colonne à droite, de façon à éliminer l'inconnue y. On en déduit alors : $(2-1)z = 12 - 9$, c'est à dire $z = 3$. On reporte cette valeur dans l'une des équations du système deux par deux : $y = \frac{1}{3}(9 - z) = \frac{1}{3} 6 = 2$. Enfin, on reporte ces deux valeurs de y et z dans la première équation du système initial : $x = 14 - 2y - 3z = 1$.
On vérifie que le résultat est plausible : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Système linéaire carré de rang strictement inférieur à sa dimension

On se donne un système linéaire d'ordre n de la forme (1), où la matrice A n'est plus de rang n : $\mathrm{rg} A < n$. La matrice A n'est plus inversible, son noyau n'est pas réduit au seul vecteur nul. Toute application linéaire représentée par la matrice A n'est pas surjective : l'image $\mathrm{Im} A$ de A est incluse dans $\mathbb{R}^n$ mais on a $\mathrm{Im} A \neq \mathbb{R}^n$. Alors de deux choses l'une

(i) $B \in \mathrm{Im}A$. Le système (1) a une infinité de solutions. Si X_0 désigne une solution particulière du système (1) ($A X_0 = B$) et ξ une solution de l'équation homogène ($A\xi = 0$), alors toute solution X du système (1) est de la forme $X = X_0 + \xi$.
(ii) $B \notin \mathrm{Im}A$. Le système (1) n'a pas de solution.

- Changement de base

On se donne un espace vectoriel E de dimension n et une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E. Tout vecteur $x \in E$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $x = \sum_{j=1}^{n} x_j \, e_j$. Les nombres x_j sont les coordonnées du vecteur x dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur colonne (matrice à n lignes et une colonne) des coordonnées de x. Comment ce vecteur se transforme-t-il quand on change de base ?
On se donne une autre base $(\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \ldots, \widetilde{e}_n)$ de E. On exprime ces nouveaux vecteurs de base par leurs coordonnées dans la base initiale : $\widetilde{e}_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ji} \, e_j$ La matrice de passage P ainsi introduite contient dans sa i-ème colonne les coordonnées du vecteur $\widetilde{e}_i$. La matrice de passage est inversible : si on échange les rôles des deux bases, on voit rapidement que $e_j = \sum_{\ell=1}^{n} (P^{-1})_{\ell j} \, \widetilde{e}_\ell$.
Les coordonnées $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n$ du vecteur x dans la nouvelle base (on a donc $x = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_i \widetilde{e}_i$) peuvent s'écrire avec un vecteur colonne $\widetilde{X} = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{x}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. On a la relation (5) $X = P \, \widetilde{X}$.
Attention ! Les coordonnées dans la base initiale s'écrivent facilement à l'aide la matrice de passage ! La relation (5) est équivalente à (6) $\widetilde{X} = P^{-1} \, X$. Pour calculer les coordonnées $\widetilde{X}$ du vecteur x dans la nouvelle base à partir de ses coordonnées X dans la base initiale, il faut résoudre le système linéaire $P \, \widetilde{X} = X$ de matrice égale à la matrice de passage P.

- Nouvelle matrice dans la nouvelle base

Avec les mêmes notations que ci-dessus, on se donne une application linéaire u de E dans E. On suppose que la matrice de u dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est égale à A. L'image $y = u(x)$ a des coordonnées Y qui satisfont à la relation $Y = A \, X$. On note $\widetilde{A}$ la matrice du même opérateur u dans la nouvelle base $(\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \ldots, \widetilde{e}_n)$ de E.
Proposition. On a la relation (7) $\widetilde{A} = P^{-1} \, A \, P$.
Preuve. On écrit $y = u(x)$ dans la nouvelle base : $\widetilde{Y} = \widetilde{A} \, \widetilde{X}$. Puis on utilise la relation (6) pour le vecteur y: $\widetilde{Y} = P^{-1} \, Y = P^{-1} \, A \, X$ et enfin la relation (5) pour le vecteur x. On en déduit : $\widetilde{Y} = \widetilde{A} \, \widetilde{X} = P^{-1} \, A \, P \, \widetilde{X}$ et l'égalité $\widetilde{A} \, \widetilde{X} = P^{-1} \, A \, P \, \widetilde{X}$ est vraie pour tout vecteur colonne $\widetilde{X} \in \mathbb{R}^n$. On a donc démontré l'identité (7).
Exemple. Si on choisit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.