Exercices d'Analyse et Calcul Matriciel

Cours 5 — Séries de fonctions

Correction du devoir numéro 1, composé des exercices 1, 2, 3.

- **Exercice 1**

  On se propose d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par récurrence par $u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5}$ et $u_0 = -1$.

  a) Calculer les termes de la suite de u_1 jusqu'à u_{10} (on pourra donner des valeurs approchées) et s'en servir pour avoir une première idée du comportement de la suite (u_n).

  b) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \leq 5$.

  c) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

  d) En déduire la convergence de (u_n).

  e) Montrer que la suite a pour limite 5. On remarquera que la question b) ne suffit pas.

- **Exercice 2**

  Soit (u_n) la suite définie par : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{5}{u_n}\right)$ et $u_0 = 1$.

  a) Calculer u_n pour $n = 1, 2, 3$

  b) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $\sqrt{5} \leq u_{n+1} \leq u_n$. On pourra étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{5}{x}\right)$.

  c) En déduire que la suite (u_n) est une suite convergente de limite $\sqrt{5}$.

  d) Montrer que $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} - \sqrt{5} \leq \dfrac{1}{2}(u_n - \sqrt{5})$.

  e) En déduire une approximation de $\sqrt{5}$ à 0.0001 près. Que remarquez-vous ?

- **Exercice 3**

  On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = n! \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{a}{k}\right)$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \pi\mathbb{N}$.

  a) On suppose que $a \neq 1$. En étudiant la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ préciser la nature de la série $\sum u_n$.

  b) Avec la même condition $a \neq 1$, préciser la nature de la suite u_n.

  c) Si $a_n = \ln\left[n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]$, quelle est la nature de la série $\sum a_n$? On pourra considérer le développement limité de la fonction sinus en 0 : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$ en se limitant à l'ordre 3.

  d) Plaçons-nous maintenant dans le cas où $a = 1$. Montrer que dans ce cas, on a
  $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k \sin\left(\frac{1}{k}\right)$

François Dubois, 26 octobre 2016.

e) Donner dans le cas où $a = 1$ la nature de la suite $\ln(u_n)$ et en déduire la nature de la suite (u_n).

- **Fonction ζ de Riemann**

Soit x un nombre complexe de partie réelle strictement supérieure à un : $\mathrm{Re}x > 1$. On considère la série de terme général $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$. On note $\zeta(x) \equiv \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ la somme de cette série quand elle existe.

a) Montrer que si x est un nombre réel strictement supérieur à un, la série réelle $\zeta(x)$ converge.

b) Montrer que si x est un nombre complexe tel que $\mathrm{Re}x > 1$, la série complexe $\zeta(x)$ converge.

c) Soit $\alpha > 1$ et Γ_α le demi plan fermé des complexes de partie réelle supérieure ou égale à α: $\Gamma_\alpha = \{x \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}x \geq \alpha\}$. Montrer que la série de Riemann $\zeta(x)$ converge normalement dans le demi plan Γ_α.

- **Passage à la limite dans une intégrale**

On pose $u_n(x) = \frac{1}{n^2}\sin(nx)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$. On note $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\sin(nx)$ la somme de cette série quand elle converge.

a) Si x décrit $\mathbb{R}$, la série converge-t-elle simplement ? uniformément ? absolument ? normalement ?

b) Après avoir justifié l'interversion de l'intégration et du passage à la limite, calculer à l'aide d'une série numérique l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^\pi S(x)\,\mathrm{d}x$.