## Cours 7 — Séries de Fourier (1)

- **Une première série de Fourier** [d'après Marco Caponigro]

On considère la fonction périodique $f$ de période $2\pi$, paire, qui satisfait à la relation $f(x) = x$ si $x \in [0, \pi]$.

a) Dessiner le graphe de la fonction $y = f(x)$.

b) Déterminer la série de Fourier trigonométrique $S(f)$ de la fonction $f$ et montrer que $S(f)(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{\ell \geq 0} \dfrac{1}{(2\ell+1)^2} \cos\big((2\ell+1)x\big)$.

c) Étudier la convergence simple, uniforme et normale de cette série.

d) Déduire de ce qui précède les sommes des séries numériques : $S_i = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2\ell+1)^2}$ et $\Sigma = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

- **Asymptotique des coefficients de Fourier**

On se donne une fonction périodique $f$ de période $2\pi$ et de plus continuement dérivable sur $\mathbb{R}$. On introduit les coefficients de Fourier $a_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \exp(-ikt)\, \mathrm{d}t$ si $k$ est un entier positif ou négatif. Montrer que $a_k(f)$ tend vers zéro si $|k|$ tend vers l'infini.

- **Une seconde série de Fourier** [d'après Marco Caponigro]

On considère la fonction $g$ périodique de période $2\pi$, impaire et qui satisfait à la relation : $g(x) = x(\pi - x)$ lorsque $x \in [0, \pi]$.

a) Dessiner le graphe de la fonction $y = g(x)$.

b) Démontrer que la fonction $g$ est dérivable en $x = 0$ et calculer $g'(0)$.

c) Déterminer la série de Fourier trigonométrique $S(g)$ de la fonction $g$.

d) Étudier la convergence simple, uniforme et normale de cette série.

e) Démontrer que la "série dérivée" obtenue en dérivant formellement la série $S(g)$ est uniformément convergente.

f) Développer la fonction $g'(x)$ en série de Fourier.

g) Calculer la valeur exacte de la somme $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.