Cours 10 — Transformation de Fourier (2)

- **Inversion de Fourier** [d'après Nathalie Zanon]

On désigne par sgn la fonction qui à tout nombre réel t non nul, associe son signe : $\mathrm{sgn}(t) = 1$ si $t > 0$ et $\mathrm{sgn}(t) = -1$ si $t < 0$. On pose $f(t) = \mathrm{sgn}(t)\, \exp(-|t|)$.

a) Calculer la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de la fonction f.

b) Calculer la transformée de Fourier conjuguée $\overline{\mathscr{F}} f$ de la fonction f.

c) Exprimer le théorème d'inversion de Fourier pour la fonction f.

d) En déduire, pour α nombre réel non nul, une expression analytique pour l'intégrale $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x \sin(\alpha x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$.

- **Inversion du carré de convolution de la porte**

On se donne un réel T strictement positif. On désigne par P_T la fonction "porte": $P_T(t) = 1$ si $|t| \leq \frac{T}{2}$ et $P_T(t) = 0$ si $|t| >$. Nous notons φ_T le produit de convolution de la porte par elle-même : $\varphi_T = P_T * P_T$.

a) Montrer que $\varphi_T(0) = T$.

b) Montrer que $\varphi_T(t) = 0$ si $t \geq T$.

c) De façon analogue, montrer que $\varphi_T(t) = 0$ si $t \leq -T$.

d) On se donne un réel t tel que $0 \leq t \leq T$. Calculer $\varphi_T(t)$.

e) On se donne un réel t tel que $-T \leq t \leq 0$. Calculer $\varphi_T(t)$.

f) Rappeler l'expression $\widehat{P_T}$ de la transformée de Fourier de la fonction P_T.

g) En déduire (sans calcul !) la transformée de Fourier $\widehat{\varphi_T}$ de la fonction $\varphi_T(t)$.

h) Exprimer le théorême d'inversion de Fourier pour la fonction $\varphi_T(t)$.

i) Calculer (sans utiliser de primitive !) l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{\sin\theta}{\theta}\Big)^2\, \mathrm{d}\theta$.

François Dubois, 30 novembre 2016.