le cnam **Cours d'Analyse et Calcul Matriciel**

Devoir numéro 3

A rendre pour la séance 10, le 30 novembre 2016

- **1) Rayon de convergence et somme de séries**

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme des séries suivantes

a) $S_1 = \sum_{n \geq 0} \left(n^2 + n + 1\right) x^n$

b) $S_2 = \sum_{n \geq 0} \cosh(n)\, x^n$, où cosh désigne le cosinus hyperbolique : $\cosh\theta \equiv \dfrac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$.

- **2) Développement en série entière**

On se donne un nombre complexe α arbitraire et la fonction définie pour tout z différent de α par la relation $f(z) = \dfrac{1}{z-\alpha}$. On se donne pour tout l'exercice un nombre complexe z_0 différent de α.

a) Montrer qu'on peut développer la fonction f en série entière au voisinage de z_0, c'est à dire exprimer $f(z)$ sous la forme $f(z) = \sum a_n \, (z - z_0)^n$.

2) Quel est le rayon de convergence de la série entière introduite à la question précédente ?

- **3) Série de Fourier**

On considère la fonction f périodique de période 2π, paire et qui satisfait à la relation : $f(x) = x^2$ lorsque $x \in [0, \pi]$.

a) Dessiner le graphe de la fonction $y = f(x)$.

b) Montrer que la série de Fourier trigonométrique $S(f)$ de la fonction f peut s'écrire $S(f)(x) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(nx\right)$.

c) Étudier la convergence simple, uniforme et normale de cette série.

d) Calculer la valeur exacte de la somme $S = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

e) A l'aide de la relation de Bessel-Parseval, calculer la valeur de la somme $\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}$.

François Dubois et Chloé Mimeau, 16 novembre 2016.