

## Cours 2 Algèbre linéaire matricielle

- Dimension finie

Un espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{R}$  est dit de dimension finie s'il peut être engendré par un nombre fini de vecteurs. En d'autres termes, il existe une partie non vide  $A$  de  $E$  telle que le sous espace vectoriel  $\langle A \rangle$  engendré par  $A$  est exactement égal à  $E$  :

$\exists A \subset E, A \neq \emptyset, A$  finie telle que  $\langle A \rangle = E$ .

Si la propriété précédente est en défaut, on dit que l'espace  $E$  est de dimension infinie.

Par exemple pour  $E = \mathbb{R}^3$ , la famille  $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$  composée de quatre vecteurs est génératrice.

Pour  $N \in \mathbb{N}$  entier naturel et  $E = P_N$  espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $N$ , on pose  $p_j(t) = t^j$ . Alors la famille  $A = \{p_0, p_1, \dots, p_N\}$  des fonctions puissances est une famille génératrice et  $\langle A \rangle = P_N$ .

- Base d'un espace vectoriel de dimension finie

On se donne un espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{R}$  de dimension finie et une famille non vide  $A = (e_0, e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ . La famille  $A$  est une base de  $E$  si et seulement si elle est à la fois libre et génératrice.

Alors tout vecteur  $x \in E$  admet une décomposition unique  $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$  dans la base  $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ ; les nombres  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont appelés les coordonnées du vecteur  $x \in E$  relativement à la base  $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ .

- Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

**Théorème.** Deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même nombre d'éléments.

Si  $A = (e_0, e_1, \dots, e_n)$  et  $B = (f_0, f_1, \dots, f_m)$  sont deux bases du même espace vectoriel  $E$  de dimension finie, alors les entiers  $n$  et  $m$  sont égaux.

On appelle dimension et on note  $\dim E$  le nombre de vecteurs commun à toutes les bases de l'espace vectoriel  $E$ .

Par exemple, l'espace  $P_N$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $N$  admet une base qui comporte  $N + 1$  fonctions ; il est de dimension  $N + 1$ .

- Rang d'une application linéaire

On se donne un espace vectoriel de dimension finie  $E$ , un autre espace vectoriel  $F$  (qui peut être de dimension finie ou infinie) et une application linéaire  $u$  de  $E$  dans  $F$  :  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors

(i) L'image  $\text{Im } u$  de l'application  $u$  est de dimension finie dans l'espace  $F$ . On appelle rang de  $u$  et on note  $\text{rg } u$  la dimension de cet espace image :  $\text{rg } u = \dim \text{Im } u$ .

(ii) On a l'égalité suivante entre les dimensions :  $\dim \text{Ker } u + \dim \text{Im } u = \dim E$ .

Si par exemple  $E = F = P_N$  et  $u = D$  opérateur de dérivation :  $Dp(t) = \frac{dp}{dt}$ , on a  $\dim \text{Ker } D = 1$  et  $\dim \text{Im } D = N$ . La relation  $\dim \text{Ker } D + \dim \text{Im } D = \dim P_N$  est bien satisfaite.

- Critères de bijectivité

On se donne deux espaces vectoriels de dimension finie  $E$  et  $F$  et une application linéaire  $u$  de  $E$  dans  $F$  :  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . L'application  $u$  est bijective si et seulement si l'image par  $u$  de toute base de  $E$  est une base de  $F$ . On a  $(\forall y \in F, \exists ! x \in E, u(x) = y) \iff$  (pour toute base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $E$ , la famille  $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$  est une base de  $F$ ).

On se donne maintenant un espace vectoriel  $E$  de dimension finie et une application linéaire  $u$  de  $E$  dans  $E$  :  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On a les équivalences suivantes :

$u$  bijective  $\iff u$  injective  $\iff u$  surjective. En d'autres termes,  
 $u$  bijective  $\iff \text{Ker } u = \{0\} \iff \text{Im } u = E$ .

- Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases fixées

On se donne deux espaces vectoriels de dimension finie  $E$  et  $F$  sur  $\mathbb{R}$ . On suppose  $\dim E = p$  et  $\dim F = n$ . On se donne une base  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  de  $E$  et une base  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  de  $F$ . Enfin, on suppose fixée une application linéaire  $u$  de  $E$  dans  $F$ . Alors par définition, la matrice  $M_u$  de l'application  $u$  relativement aux bases  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  de  $E$  et  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  de  $F$  est la matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes telle que la  $j^{\circ}$  colonne de  $M_u$  est composée des coordonnées du vecteur  $u(e_j)$  dans la base  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ .

On appelle  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes. On a  $M_u \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ . L'élément de matrice  $(M_u)_{ij} \in \mathbb{R}$  à l'intersection de la  $i^{\circ}$  ligne et de la  $j^{\circ}$  colonne est défini par la relation  $u(e_j) = \sum_{i=1}^n (M_u)_{ij} f_i$ .

Les  $np$  coefficients de la matrice  $M_u$  suffisent à calculer l'image de tout vecteur  $x = \sum_{j=1}^p x_j e_j$  de  $E$ . En effet, grâce à la linéarité de l'application  $u$ , on a après quelques lignes de calcul,  $u(x) = \sum_{i=1}^n [\sum_{j=1}^p (M_u)_{ij} x_j] f_i$ . La  $i^{\circ}$  coordonnée  $y_i$  du vecteur  $u(x)$  se calcule à l'aide de la relation  $y_i = \sum_{j=1}^p (M_u)_{ij} x_j$ .

- Écriture matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire

Sans changer le contexte ni les notations du paragraphe précédent, on se donne un vecteur  $x \in E$  et on le décompose dans la base  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  :  $x = \sum_{j=1}^p x_j e_j$ . On regroupe les composantes  $x_1, x_2, \dots, x_p$  du vecteur  $x$  sous la forme d'une matrice colonne  $X \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{R})$  composée de  $p$

lignes :  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ . De même, les coordonnées  $y_1, y_2, \dots, y_n$  du vecteur

$y = u(x) = \sum_{i=1}^n y_i f_i$  dans la base  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  de  $F$  sont représentées par une matrice

$Y \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$  à  $n$  lignes et une colonne :  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ .

Alors les coordonnées  $y_i = \sum_{j=1}^p (M_u)_{ij} x_j$  s'expriment à l'aide du produit de la matrice  $M_u$  par le vecteur  $X$  :  $Y = M_u \cdot X$ . Les coordonnées du vecteur image s'obtiennent en multipliant la

matrice de l'opérateur par les coordonnées du vecteur dans l'espace de départ.

- **Produit de deux matrices**

On se donne trois espaces vectoriels  $E$ ,  $F$  et  $G$  sur  $\mathbb{R}$  de dimensions finies respectives  $p$ ,  $n$  et  $m$ :  $\dim E = p$ ,  $\dim F = n$ ,  $\dim G = m$ . On se donne des bases  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  de  $E$ ,  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  de  $F$  et  $(g_1, g_2, \dots, g_m)$  de  $G$ . On se donne également une application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  de  $E$  dans  $F$  et une application linéaire  $v \in \mathcal{L}(F, G)$  de  $F$  dans  $G$ . On dispose alors des matrices  $M_u \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$  et  $M_v \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$  de  $u$  et  $v$  respectivement. Par ailleurs, on peut composer les applications  $u$  et  $v$  et définir ainsi la composée  $v \circ u$  qui est une application de  $E$  dans  $G$ :  $(v \circ u)(x) = v(u(x))$ . On peut démontrer que cette composée est une application linéaire de  $E$  dans  $G$ :  $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$ . On note  $M_{v \circ u} \in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{R})$  sa matrice relativement aux bases  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  de  $E$  et  $(g_1, g_2, \dots, g_m)$  de  $G$ . On définit le produit  $M_v \cdot M_u \in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{R})$  de la matrice  $M_v \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$  par la matrice  $M_u \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$  à l'aide de la relation  $M_v \cdot M_u = M_{v \circ u}$ .

Si on détaille les éléments de matrice pour  $1 \leq k \leq m$  et  $1 \leq j \leq p$ , la relation  $M_v \cdot M_u = M_{v \circ u}$  s'écrit  $(M_v \cdot M_u)_{kj} = \sum_{i=1}^n (M_v)_{ki} (M_u)_{ij}$ .

- **Somme de deux matrices et produit par un scalaire**

Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes avec des éléments de matrice  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$  respectivement, la somme  $A + B$  est encore une matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes. Son élément générique s'écrit  $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ . Le produit du nombre  $\lambda \in \mathbb{R}$  par la matrice  $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$  est une matrice  $\lambda \cdot A$  à  $n$  lignes et  $p$  colonnes et on a  $(\lambda \cdot A)_{ij} = \lambda A_{ij}$ .

Muni de ces deux lois d'addition et de multiplication par un scalaire, l'espace  $(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R}), +, \cdot)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Il est de dimension  $np$  [exercice].

- **Matrices carrées**

On note simplement  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices obtenu lorsque le nombre de lignes  $n$  est égal au nombre de colonnes. Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice carrée.

- **Associativité du produit des matrices carrées**

Si  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sont trois matrices carrées d'ordre  $n$ , on a la relation d'associativité qui permet l'élimination des parenthèses dans les calculs :  $(AB)C = A(BC)$ .

Cette relation se généralise à un produit quelconque de trois matrices, du moment qu'il peut être défini. Elle exprime simplement l'associativité de la composition des applications :  $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$  [exercice].

- **Élément neutre pour la multiplication des matrices carrées**

On se donne un entier  $n \geq 1$  et un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ . On introduit l'opérateur identité  $\text{id}$  de l'espace  $E$  dans lui-même *via* la relation  $\text{id}(x) = x$  pour tout vecteur  $x \in E$ . Alors cette application est linéaire :  $\text{id} \in \mathcal{L}(E)$ .

Dans une base quelconque de  $E$ , on peut établir que l'application identité est représentée par la matrice  $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie de la façon suivante. On a  $(I_n)_{ii} = 1$  et  $(I_n)_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ . En introduisant le symbole de Kronecker  $\delta_{ij}$  qui vaut 1 si  $i = j$  et est nul si  $i \neq j$ , on a  $(I_n)_{ij} = \delta_{ij}$ . La matrice identité est un élément neutre pour la multiplication des matrices dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ :

$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$  pour toute matrice carrée  $A$  d'ordre  $n$ .

- Inverse d'une matrice carrée

On se donne un entier  $n \geq 1$ , un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  et on suppose fixée une base de cet espace. On se donne également un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  de  $E$ . Si  $u$  est bijective, il existe une application  $v$  de  $E$  dans  $E$  de sorte que  $u \circ v = v \circ u = \text{id}$ . Cette application, inverse de l'application  $u$ , est notée  $u^{-1}$ . Elle est également linéaire :  $u^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ .

On note  $M_u$  la matrice de  $u \in \mathcal{L}(E)$  bijectif. Alors la matrice  $M_v$  de l'opérateur inverse  $v$  vérifie par définition du produit de deux matrices  $M_v \cdot M_u = M_{v \circ u} = M_{\text{id}} = I_n$ . Et de même dans l'autre sens :  $M_u \cdot M_v = M_{u \circ v} = M_{\text{id}} = I_n$ . On en déduit que la matrice  $M_u$  est inversible et son inverse  $(M_u)^{-1}$  est la matrice de l'opérateur  $v = u^{-1}$  :  $(M_u)^{-1} = M_{u^{-1}}$ .

- Calcul de l'inverse d'une matrice carrée

Si on fait agir l'opérateur bijectif  $u \in \mathcal{L}(E)$  sur un vecteur  $x \in E$ , nous avons vu que l'image  $y = u(x)$  est donnée matriciellement par la relation  $Y = M_u \cdot X$ . Si on multiplie maintenant cette relation à gauche par  $(M_u)^{-1} = M_{u^{-1}}$ , on obtient  $X = (M_u)^{-1} Y$ . Supposons maintenant le vecteur colonne  $Y$  donné. Quand on calcule la solution  $X$  du système linéaire  $M_u \cdot X = Y$ , on peut expliciter le vecteur  $X$  comme une combinaison linéaire des coordonnées du vecteur connu  $Y$ . La matrice inverse  $(M_u)^{-1}$  s'identifie avec les coefficients de cette combinaison linéaire.

- Changement de base

On se donne un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  et une première base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $E$ . Tout vecteur  $x \in E$  se décompose dans cette base, ce qui permet de définir ses coordonnées  $x_i$  :  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ . On introduit maintenant une seconde base  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  de  $E$  ; elle est définie par les coordonnées  $p_{ij}$  de chaque vecteur  $\varepsilon_j$  dans la base précédente :  $\varepsilon_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i$ .

On remarque que la matrice carrée  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui vient d'être introduite par ses coefficients  $p_{ij}$  est inversible. En effet, l'application linéaire de  $E$  dans  $E$  qui à tout vecteur  $e_j$  de la première base associe le vecteur  $\varepsilon_j$  de la seconde base et de même numéro, est clairement inversible puisqu'elle transforme une base de  $E$  en une autre base de l'espace  $E$ . De plus, vu la définition même des coefficients  $p_{ij}$ , la matrice de cette application linéaire dans la base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est exactement égale à la matrice  $P$ .

La question naturelle est maintenant d'expliciter les coordonnées  $\tilde{X}$  d'un vecteur quelconque  $x \in E$  dans la base  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  si on connaît ses coordonnées  $X$  dans la base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  et la matrice de passage  $P$ . On cherche donc des nombres réels  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$  de sorte que  $x = \sum_{j=1}^n \tilde{x}_j \varepsilon_j$ .

On peut écrire de deux façons le vecteur  $x$  dans la base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  : d'une part en reportant l'expression de  $\varepsilon_j$  dans la base initiale, ce qui conduit à la relation  $x = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n p_{ij} \tilde{x}_j \right) e_i$  et d'autre part avec la définition des coordonnées  $x_i$  :  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ . On déduit de l'unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base que pour tout entier  $i$ , on a  $\sum_{j=1}^n p_{ij} \tilde{x}_j = x_i$  c'est à dire  $P \cdot \tilde{X} = X$ . Pour calculer les coordonnées d'un vecteur arbitraire dans la nouvelle base, on doit résoudre un système linéaire.

- Changement de matrice lorsqu'on change de base

On se donne toujours un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de dimension finie  $n$  et deux bases de l'espace  $E$   $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  et  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  comme ci-dessus. On appelle toujours  $P$  la matrice de passage entre ces deux bases. On se donne de plus une application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E)$  de  $E$  dans lui-même et on note  $M_u$  sa matrice relativement à la base initiale  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . Comment calculer la matrice  $\widetilde{M}_u$  de l'application  $u$  dans la nouvelle base ?

Il suffit de trouver la matrice  $\widetilde{M}_u$  qui permet d'expliciter les coordonnées  $\widetilde{Y}$  du vecteur image  $y = u(x)$  en fonction des coordonnées  $\widetilde{X}$  du vecteur  $x \in E$  dans la nouvelle base :  $\widetilde{Y} = \widetilde{M}_u \cdot \widetilde{X}$ . Or compte tenu de ce qui a été dit au paragraphe précédent, on a les relations  $P \cdot \widetilde{X} = X$  et  $P \cdot \widetilde{Y} = Y$  entre les deux systèmes de coordonnées pour les deux vecteurs  $x$  et  $y = u(x)$ . Dans le système initial de coordonnées, on a bien sûr la relation  $Y = M_u X$ . Il suffit donc d'écrire cette relation avec les coordonnées dans la nouvelle base :  $P \widetilde{Y} = M_u P \widetilde{X}$ , c'est à dire  $\widetilde{Y} = (P^{-1} M_u P) \widetilde{X}$ . Par identification avec la relation  $\widetilde{Y} = \widetilde{M}_u \cdot \widetilde{X}$ , on établit la relation  $\widetilde{M}_u = P^{-1} M_u P$  qui donne la matrice de l'application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E)$  dans la nouvelle base. On dit que les matrices  $M_u$  et  $\widetilde{M}_u$  sont conjuguées.

- Le produit des matrices n'est pas commutatif en général

On vérifie par exemple que si  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , on a  $AB \neq BA$ .

- Diviseurs de zéro

Le produit  $AB$  de deux matrices peut être nul alors qu'aucun des deux facteurs  $A$  et  $B$  n'est nul ! On dit que  $A$  et  $B$  sont des diviseurs de zéro ou que la matrice non nulle  $B$  est un diviseur de zéro de la matrice non nulle  $A$ .

Par exemple,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  est une matrice non nulle de l'espace  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  des matrices deux par deux. Mais son carré  $A.A$  est nul :  $A.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ .

- Inverse d'un produit

Si deux matrices  $A$  et  $B$  de l'ensemble  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sont inversibles, alors leur produit  $AB$  est encore inversible. Mais attention, l'inverse  $(AB)^{-1}$  du produit  $AB$  s'obtient en échangeant les facteurs :  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

- Transposition

Si  $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$  est une matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes, sa transposée  $A^t \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$  est une matrice à  $p$  lignes et  $n$  colonnes. On échange simplement les lignes et les colonnes de la matrice  $A$ .

Si  $A_{k\ell}$  est l'élément générique de la matrice  $A$  pour la ligne  $k$  et la colonne  $\ell$ , l'élément générique  $(A^t)_{ij}$  de la matrice  $A^t$  pour la ligne  $i$  et la colonne  $j$  est donné par la relation  $(A^t)_{ij} = A_{ji}$ .

Si on peut faire le produit de  $A$  par  $B$ , alors on peut faire le produit dans l'autre sens pour les matrices transposées et on a la relation suivante :  $(AB)^t = B^t A^t$ .

- Une présentation des nombres complexes avec des matrices deux par deux

On pose  $i \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . On remarque qu'on a alors  $i \cdot i = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , relation qu'on peut aussi écrire  $i^2 = -1$  en identifiant la matrice  $I_2$  et le nombre 1. L'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes  $z = a + ib$  peut s'écrire comme un sous-ensemble de l'ensemble des matrices deux par deux :  $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}$ .

## Exercices

- Ecriture de la matrice d'une application linéaire

On se donne six nombres réels  $a, b, c, d, e$ , et  $f$ . On définit une application  $u$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  par les relations  $u(\alpha, \beta) = (a\alpha + b\beta, c\alpha + d\beta, e\alpha + f\beta)$  pour tout couple de réels  $(\alpha, \beta)$ .

- a) Montrer que l'application  $u$  est linéaire :  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ .

On se donne la "base canonique"  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  avec les relations  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$  et de façon analogue la "base canonique"  $(f_1, f_2, f_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  :  $f_1 = (1, 0, 0)$ ,  $f_2 = (0, 1, 0)$ ,  $f_3 = (0, 0, 1)$ . On note  $M_u$  la matrice de  $u$  relativement à ces deux bases.

- b) Remplacer les points d'interrogation par leur valeur :  $M_u \in \mathcal{M}_{?,?}(\mathbb{R})$ .

- c) Déterminer complètement la matrice  $M_u$  en fonction des six nombres  $a, b, c, d, e$ , et  $f$ .

- Calcul de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre trois

On pose  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$  un second membre donné.

- a) Calculer les composantes  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  de la solution du système linéaire  $A \cdot X = Y$ .

- b) En déduire les neuf coefficients de la matrice  $A^{-1}$ .

- c) On pose  $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ . Reprendre les deux questions précédentes en remplaçant la matrice  $A$  par la matrice  $B$ .

- Changement de base

On se donne  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

- a) Montrer que l'inverse  $P^{-1}$  de la matrice  $P$  peut s'écrire  $P^{-1} = \frac{1}{2}P$ .

- b) Calculer les produits  $P^{-1}A$  et  $AP$ .

- c) En déduire, en effectuant le calcul de deux façons, que l'on a :  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

- Inversion des matrices deux par deux

On se donne  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . On pose  $\delta = ad - bc$ .

- Montrer que si  $\delta \neq 0$ , on peut résoudre tout système linéaire de la forme  $AX = Y$ , où  $Y$  est une matrice à deux lignes et une colonne arbitraire donnée.
- Si  $\delta \neq 0$ , calculer la matrice inverse  $A^{-1}$ .
- Montrer que si  $\delta = 0$ , il existe une matrice  $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $AB = BA = 0$ .
- Si  $A \neq 0$  est une matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $ad - bc = 0$ , montrer qu'elle admet au moins un diviseur de zéro qu'on explicitera.