le cnam

Algèbre linéaire et géométrie

Cours 8 Longueur d'une courbe

- Courbes dans l'espace

Pour fixer les idées, toutes les courbes sont supposées être plongées dans l'espace $\mathbb{R}^3$ euclidien. On se donne deux réels $a < b$. En géométrie différentielle, une courbe est la donnée de trois fonctions $X(t), Y(t)\ Z(t)$ "assez régulières" définies de l'intervalle $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On a donc un point $M(t) \in \mathbb{R}^3$ mobile défini par $[a, b] \ni t \longmapsto M(t) = (X(t), Y(t), Z(t)) \in \mathbb{R}^3$.

- Exemples de courbes

Segment mal paramétré. On choisit simplement $[0, 1] \ni t \longmapsto X(t) = t^2 \in \mathbb{R}$.
Courbe fonctionnelle. On se donne une fonction assez régulière $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et on pose $X(t) = t, Y(t) = f(t)$. Cette courbe plane est simplement le graphe de la fonction $y = f(x)$.
Cercle. On se donne le rayon $R > 0$ du cercle et on le paramètre par son angle. On utilise alors de préférence la lettre θ pour ce paramètre : $X(\theta) = R \cos\theta$, $Y(\theta) = R \sin\theta$ pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
Courbe en coordonnées polaires. C'est analogue au cercle, mais maintenant le rayon R est une fonction régulière de la variable angulaire et on le note $\rho(\theta)$: $X(\theta) = \rho(\theta) \cos\theta$ et $Y(\theta) = \rho(\theta) \sin\theta$.
Hélice circulaire dans l'espace euclidien de dimension trois. On se donne un rayon $R > 0$ et un pas $a > 0$. Cette courbe de $\mathbb{R}^3$ est définie par les trois fonctions suivantes : $X(\theta) = R \cos\theta$, $Y(\theta) = R \sin\theta$ et $Z(\theta) = a\,\theta$.

- Vecteur vitesse

On suppose que le point $M(t)$ dépend de façon régulière du temps t. Typiquement, c'est une fonction dérivable de la variable t et la dérivée est elle-même une fonction continue. Le vecteur vitesse $V(t)$ est la dérivée du point $M(t)$ par raport au temps : $V(t) = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$. En termes des coordonnées cartésiennes, on a $V(t) = \big(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}\big)$.

- Repère mobile des coordonnées polaires planes

On se donne un angle θ. On introduit les deux vecteurs $e_r(\theta)$ et $e_\theta(\theta)$ du plan euclidien orienté par leurs coordonnées dans une base orthonormée directe fixe (e_1, e_2). On a
$e_r(\theta) = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$ et $e_\theta(\theta) = -\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2$. On construit de cette façon une base orthonormée directe du plan vectoriel euclidien. Elle varie en fonction de l'angle θ et on a les relations $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} e_r(\theta) = e_\theta(\theta)$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} e_\theta(\theta) = -e_r(\theta)$.
Un point $M(\theta)$ d'une courbe en coordonnées polaires satisfait à la relation
$\overrightarrow{OM}(\theta) = \rho(\theta)\, e_r(\theta)$. Le vecteur vitesse $V(\theta)$ s'obtient en dérivant par rapport à la variable θ ce produit formé du scalaire $\rho(\theta)$ et du vecteur $e_r(\theta)$. On a donc $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\, e_r(\theta) + \rho(\theta)\, e_\theta(\theta)$.
Le carré de la norme de ce vecteur se calcule alors simplement puisque la base $(e_r(\theta), e_\theta(\theta))$ est orthonormée : $\| \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta} \|^2 = \big(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\big)^2 + (\rho(\theta))^2$.

François Dubois, novembre 2019.

• Quelle formule pour la longueur d'une courbe ?

On se donne une courbe assez régulière $[a, b] \ni t \longmapsto M(t) \in \mathbb{R}^3$. On suppose $M(a) = A$ et $M(b) = B$. Comment définir la longueur L de la courbe AB ? On découpe l'intervalle $[a, b]$ en n morceaux d'égale longueur $h = \frac{b-a}{n}$ pour fixer les idées. On fabrique de ce fait tout un ensemble de points $M_j = M(a+jh)$ pour $j = 0, \ldots, n$. Avec en particulier $M_0 = A$ et $M_n = B$. On remplace la courbe AB par la réunion des segments $[M_j, M_{j+1}]$ pour j allant de 0 à $n-1$. On définit la longueur approchée L_n de la courbe en faisant simplement la somme des longueurs de ces divers segments : $L_n = \sum_{j=0}^{n-1} \| \overrightarrow{M_j M_{j+1}} \|$.

On fait ensuite tendre le nombre de segments vers l'infini. Donc le pas h tend vers zéro et on peut écrire la différentiabilité de la courbe sous la forme $M_{j+1} = M_j + h \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}(a+jh) + h\,\varepsilon_j(h)$, où $\varepsilon_j(h)$ est un vecteur qui tend vers zéro si h tend vers zéro. Donc $\overrightarrow{M_j M_{j+1}} = h \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}(a+jh) + h\,\varepsilon_j(h)$ et $\| \overrightarrow{M_j M_{j+1}} \| = h \, \| \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}(a+jh) \| + h\,\widetilde{\varepsilon}_j(h)$ avec une suite numérique $\widetilde{\varepsilon}_j(h)$ qui tend vers zéro si le nombre h tend vers zéro. On peut alors démontrer que la somme L_n converge donc vers l'intégrale $L = \int_a^b \| \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \| \, \mathrm{d}t$. C'est la longueur de la courbe AB entre les points A et B.

• Longueur de quelques courbes

Quand on applique la relation précédente aux exemples proposés plus haut, on retrouve bien les valeurs classiques.

Longueur du segment $[0, 1]$, même mal paramétré : $L = 1$.

Longueur d'une courbe de la forme $y = f(x)$: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, \mathrm{d}t$. Si on applique cette relation à la fonction affine $f(x) = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{b-a}(x-a)$ qui relie les points $A(a, \alpha)$ et $B(b, \beta)$, on retrouve bien la longueur du segment AB, c'est à dire $L = \sqrt{(b-a)^2 + (\beta-\alpha)^2}$.

Longueur d'un arc de cercle d'angle θ: $L = R\,\theta$.

Longueur d'une courbe en coordonnées polaires : $L = \int_a^b \sqrt{\rho(\theta)^2 + \big(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\big)^2} \, \mathrm{d}\theta$.

Longueur d'une hélice circulaire dans l'espace euclidien de dimension trois :

$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{R^2 + a^2} \, \mathrm{d}\theta = \sqrt{R^2 + a^2}\,(\beta - \alpha)$ avec $\alpha \leq \beta$.

• Théorème. La longueur d'une courbe ne dépend pas du paramétrage choisi

On se donne une courbe régulière, c'est à dire deux réels $a < b$ et une application régulière $[a, b] \ni t \longmapsto M(t) \in \mathbb{R}^3$. On change le paramétrage : on introduit deux réels $\alpha < \beta$ et une fonction strictement croissante dérivable $[\alpha, \beta] \ni \theta \longmapsto t = T(\theta) \in [a, b]$. Alors l'application composée $[\alpha, \beta] \ni \theta \longmapsto P(\theta) = M(T(\theta)) = (M_{\rm o}T)(\theta) \in \mathbb{R}^3$ définit un autre paramétrage du même ensemble de points. La longueur de la courbe est inchangée : on a

$L = \int_a^b \| \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \| \, \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \| \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta} \| \, \mathrm{d}\theta$.

• Abscisse curviligne

On fixe maintenant une valeur de t dans l'intervalle $[a, b]$. Alors la longueur de l'arc de courbe entre les points $A = M(a)$ et $M(t)$ est une fonction qui dépend du paramètre t. Si la courbe n'a que des points réguliers, c'est à dire si le vecteur vitesse $V(t) = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$ n'est jamais nul, l'application $[a, b] \ni t \longmapsto s(t) \in [0, L] \in \mathbb{R}^3$ définie par $s(t) = \int_a^t \| \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta} \| \, \mathrm{d}\theta$ est dérivable : $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \| \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \|$. Cette application est donc continue et strictement croissante de l'intervalle $[a, b]$ sur l'intervalle $[0, L]$. Elle réalise donc une bijection etre ces deux intervalles et nous notons

$[0, L] \ni s \longmapsto T(s) \in [a, b]$ la bijection réciproque. Pour tout $s \in [0, L]$, il existe un unique paramètre $t = T(s)$ de sorte que $\int_a^t \parallel \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta} \parallel \, \mathrm{d}\theta = s$.
Le paramètre $s \in [0, L]$ s'appelle abscisse curviligne. C'est l'abscisse mesurée le long de la courbe. Elle permet de définie un nouveau paramétrage $[0, L] \ni s \longmapsto P(s) = M(T(s)) \in \mathbb{R}^3$. On parle alors de paramétrage par la longueur de l'arc ou par l'abscisse curviligne.
Pour le segment $[0, 1]$, le paramétrage par l'abscisse curvigne est simplement linéaire :
$[0, 1] \ni s \longmapsto M(s) = s \in [0, 1]$.
Pour le cercle de rayon R, l'abscisse curviligne est proportionnelle à l'angle et $s = R\,\theta$.

- Vecteur tangent

On se donne une courbe régulière : tous ses points sont réguliers, c'est à dire que le vecteur vitesse ne s'annule jamais. On peut la paramétrer par son abscisse curviligne :
$[0, L] \ni s \longmapsto P(s) \in \mathbb{R}^3$. Alors le vecteur tangent $\tau(s)$ défini par $\tau(s) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}s}$ n'est jamais nul. De plus, il est de norme unité : $\parallel \tau(s) \parallel = 1$. Quand on parcourt une courbe avec l'abscisse curviligne comme paramètre, on se déplace à la vitesse unité ; le temps écoulé mesure exactement la longueur de l'arc de courbe, ce indépendamment de la façon dont la courbe se déforme dans l'espace euclidien.

- Paramétrage par l'abscisse curviligne

On écrit usuellemnt la relation $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \parallel \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \parallel$ en la multipliant formellement par $\mathrm{d}t^2$. Il vient donc $\mathrm{d}s^2 = \parallel \mathrm{d}M \parallel^2$, soit $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}X^2 + \mathrm{d}Y^2 + \mathrm{d}Z^2$ en revenant aux coordonnées cartésiennes.
Si on travaille en coordonnées polaires, on a $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\theta^2$.

- Complément : coordonnées sphériques en dimension trois

Si on se donne des nombres $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi < 2\pi$, on définit un point M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) à l'aide de ses coordonnées sphériques ou coordonnées polaires (ρ, θ, φ) : $x = \rho\,\sin\theta\,\cos\varphi$, $y = \rho\,\sin\theta\,\sin\varphi$ et $z = \rho\,\cos\theta$.
Réciproquement, si on se donne les coordonnées cartésiennes d'un point, alors
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ permet de calculer le “rayon vecteur” ρ. Si M est à l'origine, la latitude θ et la longitude φ restent indéterminés. Si $x = y = 0$ et $z > 0$, on a $\theta = 0$ et la longitude φ reste indéterminée. Si $x = y = 0$ et $z < 0$, on a $\theta = \pi$ et la longitude φ n'est toujours pas définie. Lorsque le point m de coordonnées $(x, y, 0)$ n'est pas à l'origine, la relation $\cos\theta = \frac{z}{\rho}$ définit un unique angle de latitude $\theta \in]0, \pi[$. Une fois ρ et θ calculés de sorte que $\rho > 0$ et $\sin\theta \neq 0$, les relations $\cos\varphi = \frac{x}{\rho\,\sin\theta}$ et $\sin\varphi = \frac{y}{\rho\,\sin\theta}$ définissent un unique angle de longitude φ dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.
On peut introduire un repère mobile comme pour les coordonnées polaires planes. Dans le repère orthonormé direct (e_1, e_2, e_3), on pose
$e_r(\theta, \varphi) = \sin\theta\,(\cos\varphi\, e_1 + \sin\varphi\, e_2) + \cos\theta\, e_3$. On a donc la relation $\overrightarrow{OM}(\theta) = \rho(\theta)\, e_r(\theta, \varphi)$.
On introduit aussi les deux vecteurs
$e_\theta(\theta, \varphi) = \cos\theta\,(\cos\varphi\, e_1 + \sin\varphi\, e_2) - \sin\theta\, e_3$ et $e_\varphi(\varphi) = -\sin\varphi\, e_1 + \cos\varphi\, e_2$. La base mobile $(e_r(\theta, \varphi), e_\theta(\theta, \varphi), e_\varphi(\varphi))$ constitue un repère orthonormé direct et on a les relations $e_r \times e_\theta = e_\varphi$, $e_\theta \times e_\varphi = e_r$ et $e_\varphi \times e_r = e_\theta$.

En différentiant la relation $(\theta,\, \varphi) \longmapsto e_r(\theta,\, \varphi)$, il vient $\mathrm{d}e_r = e_\theta\, \mathrm{d}\theta + e_\varphi\, \sin\theta\, \mathrm{d}\varphi$. Une courbe $t \longmapsto M(t)$ a donc un vecteur vitesse qui s'écrit en coordonnées sphériques
$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\, e_r + \rho\, \big(e_\theta\, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + e_\varphi\, \sin\theta\, \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \big)$. On prend le carré de la norme de ce vecteur et on la multiplie par $\mathrm{d}t^2$. On en déduit le carré de l'élément de longueur en coordonnées sphériques :
$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\, \mathrm{d}\theta^2 + \rho^2\, \sin^2\theta\, \mathrm{d}\varphi^2$.

Exercices

• Chaînette

On rappelle quelques éléments de trigonométrie hyperbolique : $\cosh x = \frac{1}{2}\,\big(\exp(x) + \exp(-x)\big)$ et $\sinh x = \frac{1}{2}\,\big(\exp(x) - \exp(-x)\big)$.

a) Montrer que pour tout nombre réel x, on a $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$.

b) Montrer que l'on a le calcul suivant des fonctions dérivées des cosinus et sinus hyperboliques : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cosh x = \sinh x$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sinh x = \cosh x$.

On se donne $a > 0$ et $X \geq 0$. On appelle chaînette la courbe d'équation cartésienne
$y = a\, \cosh\big(\frac{x}{a}\big)$ dans un repère orthonormé.

c) Calculer la longueur d'un arc de chaînette entre les points d'abscisses $x = 0$ et $x = X$.

• Longueur d'un arc de parabole

On utilise les sinus et cosinus hyperloliques introduits à l'exercice précédent.

a) Montrer que la fonction sinus hyperlolique est continue, strictement croissante, que $\sinh x$ tend vers $+\infty$ [respectivement $-\infty$] si x tend vers $+\infty$ [respectivement $-\infty$].

b) Déduire de la question précédente que la fonction sinus hyperlolique réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

On note argsh la fonction réciproque.

c) Quelle est la dérivée de la fonction argsh ?

d) Montrer que l'on a $\mathrm{argsh} x = \log\big(x + \sqrt{1+x^2}\big)$.

On pose $F(x) = \frac{1}{2}\,\big(\mathrm{argsh} x + x\sqrt{1+x^2}\big)$.

e) Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer la dérivée $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$.

On se donne $a > 0$ et la parabole d'équation $y = \frac{x^2}{2a}$ dans un repère orthonormé. On se donne aussi une abscisse $X \geq 0$.

f) Calculer la longueur d'un arc de cette parabole entre les points d'abscisses $x = 0$ et $x = X$. On pourra exprimer le résultat à l'aide de la fonction F introduite plus haut.