le cnam

Algèbre linéaire et géométrie

Cours 2 Algèbre linéaire matricielle

• Dimension finie

Un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est dit de dimension finie s'il peut être engendré par un nombre fini de vecteurs. En d'autres termes, il existe une partie non vide A de E telle que le sous espace vectoriel $< A >$ engendré par A est exactement égal à E :

$\exists A \subset E$, $A \neq \emptyset$, A finie telle que $< A >= E$.

Si la propriété précédente est en défaut, on dit que l'espace E est de dimension infinie.

Par exemple pour $E = \mathbb{R}^3$, la famille $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ composée de quatre vecteurs est génératrice.

Pour $N \in \mathbb{N}$ entier naturel et $E = P_N$ espace des polynômes de degré inférieur ou égal à N, on pose $p_j(t) = t^j$. Alors la famille $A = \{p_0, p_1, \ldots, p_N\}$ des fonctions puissances est une famille génératrice et $< A >= P_N$.

• Base d'un espace vectoriel de dimension finie

On se donne un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et une famille non vide $A = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. La famille A est une base de E si et seulement si elle est à la fois libre et génératrice.

Alors tout vecteur $x \in E$ admet une décomposition unique $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$; les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont appelés les coordonnées du vecteur $x \in E$ relativement à la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

• Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Théorème. Deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même nombre d'éléments. Si $A = (e_1, \ldots, e_n)$ et $B = (f_1, \ldots, f_m)$ sont deux bases du même espace vectoriel E de dimension finie, alors les entiers n et m sont égaux.

On appelle dimension et on note $\dim E$ le nombre de vecteurs commun à toutes les bases de l'espace vectoriel E.

Par exemple, l'espace P_N des polynômes de degré inférieur ou égal à N admet une base qui comporte $N+1$ fonctions ; il est de dimension $N+1$.

• Rang d'une application linéaire

On se donne un espace vectoriel de dimension finie E, un autre espace vectoriel F (qui peut îre de dimension finie ou infinie) et une application linéaire u de E dans F : $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors

(i) L'image $\mathrm{Im}\, u$ de l'application u est de dimension finie dans l'espace F. On appelle rang de u et on note $\mathrm{rg}\, u$ la dimension de cet espace image : $\mathrm{rg}\, u = \dim \mathrm{Im}\, u$.

(ii) On a l'égalité suivante entre les dimensions : $\dim \mathrm{Ker}\, u + \dim \mathrm{Im}\, u = \dim E$.

François Dubois, février 2022.

Si par exemple $E = F = P_N$ et $u = D$ opérateur de dérivation : $Dp(t) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$, on a $\dim \mathrm{Ker} D = 1$ et $\dim \mathrm{Im} D = N$. La relation $\dim \mathrm{Ker} D + \dim \mathrm{Im} D = \dim P_N$ est bien satisfaite.

• Critères de bijectivité

On se donne deux espaces vectoriels de dimension finie E et F et une application linéaire u de E dans F : $u \in \mathscr{L}(E, F)$. L'application u est bijective si et seulement si l'image par u de toute base de E est une base de F. On a $\big(\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ u(x) = y\big) \iff \big($pour toute base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E, la famille $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base de $F\big)$.

On se donne maintenant un espace vectoriel E de dimension finie et une application linéaire u de E dans E : $u \in \mathscr{L}(E)$. On a les équivalences suivantes :

u bijective $\iff$ u injective $\iff$ u surjective. En d'autres termes,

u bijective $\iff$ $\mathrm{Ker}\, u = \{0\}$ $\iff$ $\mathrm{Im}\, u = E$.

• Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases fixées

On se donne deux espaces vectoriels de dimension finie E et F sur $\mathbb{R}$. On suppose $\dim E = p$ et $\dim F = n$. On se donne une base $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de E et une base $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ de F. Enfin, on suppose fixée une application linéaire u de E dans F. Alors par définition, la matrice M_u de l'application u relativement aux bases $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de E et $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ de F est la matrice à n lignes et p colonnes telle que la j^{o} colonne de M_u est composée des coordonnées du vecteur $u(e_j)$ dans la base $(f_1, f_2, \dots, f_n)$.

On appelle $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes. On a $M_u \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$. L'élément de matrice $(M_u)_{ij} \in \mathbb{R}$ à l'intersection de la i^{o} ligne et de la j^{o} colonne est défini par la relation $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} (M_u)_{ij}\, f_i$.

Les $n\,p$ coefficients de la matrice M_u suffisent à calculer l'image de tout vecteur $x = \sum_{j=1}^{p} x_j\, e_j$ de E. En effet, grâce à la linéarité de l'application u, on a après quelques lignes de calcul, $u(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{p} (M_u)_{ij}\, x_j\right] f_i$. La i^{o} coordonnée y_i du vecteur $u(x)$ se calcule à l'aide de la relation $y_i = \sum_{j=1}^{p} (M_u)_{ij}\, x_j$.

• Écriture matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire

Sans changer le contexte ni les notations du paragraphe précédent, on se donne un vecteur $x \in E$ et on le décompose dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_p)$: $x = \sum_{j=1}^{p} x_j\, e_j$. On regroupe les composantes $x_1, x_2, \dots, x_p$ du vecteur x sous la forme d'une matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{p\,1}(\mathbb{R})$ composée de p lignes : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$. De même, les coordonnées $y_1, y_2, \dots, y_n$ du vecteur $y = u(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i\, f_i$ dans la base $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ de F sont représentées par une matrice $Y \in \mathscr{M}_{n\,1}(\mathbb{R})$ à n lignes et une colonne : $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Alors les coordonées $y_i = \sum_{j=1}^{n} (M_u)_{ij}\, x_j$ s'expriment à l'aide du produit de la matrice M_u par le vecteur X : $Y = M_u \cdot X$. Les coordonnées du vecteur image s'obtiennent en multipliant la matrice de l'opérateur par les coordonnées du vecteur dans l'espace de départ.

- Produit de deux matrices

On se donne trois espaces vectoriels E, F et G sur $\mathbb{R}$ de dimensions finies respectives p, n et m: $\dim E = p$, $\dim F = n$, $\dim G = m$. On se donne des bases $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de E, $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ de F et $(g_1, g_2, \dots, g_m)$ de G. On se donne également une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ de E dans F et une application linéaire $v \in \mathscr{L}(F,G)$ de F dans G. On dispose alors des matrices $M_u \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ et $M_v \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{R})$ de u et v respectivement. Par ailleurs, on peut composer les applications u et v et définir ainsi la composée $v_{\mathrm{o}}u$ qui est une application de E dans G: $\big(v_{\mathrm{o}}u\big)(x) = v\big(u(x)\big)$. On peut démontrer que cette composée est une application linéaire de E dans G: $v_{\mathrm{o}}u \in \mathscr{L}(E,G)$. On note $M_{v_{\mathrm{o}}u} \in \mathscr{M}_{mp}(\mathbb{R})$ sa matrice relativement aux bases $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de E et $(g_1, g_2, \dots, g_m)$ de G. On définit la produit $M_v.M_u \in \mathscr{M}_{mp}(\mathbb{R})$ de la matrice $M_v \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{R})$ par la matrice $M_u \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ à l'aide de la relation $M_v.M_u = M_{v_{\mathrm{o}}u}$

Si on détaille les éléments de matrice pour $1 \leq k \leq m$ et $1 \leq j \leq p$, la relation $M_v.M_u = M_{v_{\mathrm{o}}u}$ s'écrit $(M_v.M_u)_{kj} = \sum_{i=1}^{n} (M_v)_{ki} \, (M_u)_{ij}$.

- Somme de deux matrices et produit par un scalaire

Si A et B sont deux matrices à n lignes et p colonnes avec des éléments de matrice A_{ij} et B_{ij} respectivement, la somme $A+B$ est encore une matrice à n lignes et p colonnes. Son élément générique s'écrit $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$. Le produit du nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ par la matrice $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ est une matrice $\lambda.A$ à n lignes et p colonnes et on a $(\lambda.A)_{ij} = \lambda \, A_{ij}$.

Muni de ces deux lois d'addition et de multilication par un scalaire, l'espace $(\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Il est de dimention $n\,p$ [exercice].

- Matrices carrées

On note simplement $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices obtenu lorsque le nombre de lignes n est égal au nombre de colonnes. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice carrée.

- Associativité du produit des matrices carrées

Si A, B, C sont trois matrices carrées d'ordre n, on a la relation d'associativité qui permet l'élimination des parenthèses dans les calculs : $(A\,B)\,C = A\,(B\,C)$.

Cette relation se généralise à un produit quelconque de trois matrices, du moment qu'il peut être défini. Elle exprime simplement l'associativité de la composition des applications : $(u_{\mathrm{o}}v)_{\mathrm{o}}w = u_{\mathrm{o}}(v_{\mathrm{o}}w)$ [exercice].

- Élément neutre pour la multiplication des matrices carrées

On se donne un entier $n \geq 1$ et un espace vectoriel E de dimension n. On introduit l'opérateur identité id de l'espace E dans lui-même *via* la relation $\mathrm{id}(x) = x$ pour tout vecteur $x \in E$. Alors cette application est linéaire : $\mathrm{id} \in \mathscr{L}(E)$.

Dans une base quelconque de E, on peut établir que l'application identité est représentée par la matrice $\mathrm{I}_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie de la façon suivante. On a $(\mathrm{I}_n)_{ii} = 1$ et $(\mathrm{I}_n)_{ij} = 0$ si $i \neq j$. En introduisant le symbole de Kronecker δ_{ij} qui vaut 1 si $i = j$ et est nul si $i \neq j$, on a $(\mathrm{I}_n)_{ij} = \delta_{ij}$.

La matrice identité est un élément neutre pour la multiplication des matrices dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$A.I_n = I_n.A = A$ pour toute matrice carrée A d'ordre n.

• Inverse d'une matrice carrée

On se donne un entier $n \geq 1$, un espace vectoriel E de dimension n et on suppose fixée une base de cet espace. On se donne également un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ de E. Si u est bijective, il existe une application v de E dans E de sorte que $u_{\rm o} v = v_{\rm o} u = {\rm id}$. Cette application, inverse de l'application u, est notée u^{-1}. Elle est également linéaire : $u^{-1} \in \mathscr{L}(E)$.
On note M_u la matrice de $u \in \mathscr{L}(E)$ bijectif. Alors la matrice M_v de l'opérateur inverse v vérifie par définition du produit de deux matrices $M_v . M_u = M_{v_{\rm o} u} = M_{\rm id} = {\rm I}_n$. Et de même dans l'autre sens : $M_u . M_v = M_{u_{\rm o} v} = M_{\rm id} = {\rm I}_n$. On en déduit que la matrice M_u est inversible et son inverse $(M_u)^{-1}$ est la matrice de l'opérateur $v = u^{-1}$: $(M_u)^{-1} = M_{u^{-1}}$.

• Calcul de l'inverse d'une matrice carrée

Si on fait agit l'opérateur bijectif $u \in \mathscr{L}(E)$ sur un vecteur $x \in E$, nous avons vu que l'image $y = u(x)$ est donnée matriciellement par la relation $Y = M_u . X$. Si on multiplie maintenant cette relation à gauche par $(M_u)^{-1} = M_{u^{-1}}$, on obtient $X = (M_u)^{-1} Y$. Supposons maintenant le vecteur colonne Y donné. Quand on calcule la solution X du système linéaire $M_u . X = Y$, on peut expliciter le vecteur X comme une combinaison linéaire des coordonnées du vecteur connu Y. La matrice inverse $(M_u)^{-1}$ s'identifie avec les coefficients de cette combinaison linéaire.

• Changement de base

On se donne un espace vectoriel E de dimension n et une première base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E. Tout vecteur $x \in E$ se décompose dans cette base, ce qui permet de définir ses coordonnées x_i : $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. On introduit maintenant une seconde base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ de E ; elle est définie par les coordonnées p_{ij} de chaque vecteur ε_j dans la base précéente : $\varepsilon_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i$.
On remarque que la matrice carrée $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui vient d'être introduite par ses coefficients p_{ij} est inversible. En effet, l'application linéaire de E dans E qui à tout vecteur e_j de la première base associe le vecteur ε_j de la seconde base et de même numéro, est clairement inversible puisqu'elle transforme une base de E en une autre base de l'espace E. De plus, vu la définition même des coefficients p_{ij}, la matrice de cette application linéaire dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est exactement égale à la matrice P.
La question naturelle est maintenant d'expliciter les coordonnées $\widetilde{X}$ d'un vecteur quelconque $x \in E$ dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ si on connaît ses coordonnées X dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et la matrice de passage P. On cherche donc des nombres réels $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n$ de sorte que $x = \sum_{j=1}^n \widetilde{x}_j \varepsilon_j$.
On peut écrire de deux façons le vecteur x dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$: d'une part en reportant l'expression de ε_j dans la base initiale, ce qui conduit à la relation $x = \sum_{i=1}^n \big(\sum_{j=1}^n p_{ij} \widetilde{x}_j \big) e_i$ et d'autre part avec la définition des coordonnées x_i : $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. On déduit de l'unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base que pour tout entier i, on a $\sum_{j=1}^n p_{ij} \widetilde{x}_j = x_i$ c'est à dire $P . \widetilde{X} = X$. Pour calculer les coordonnées d'un vecteur arbitraire dans la nouvelle base, on doit résoudre un système linéaire.

- Changement de matrice lorsqu'on change de base

On se donne toujours un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n et deux bases de l'espace E $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ comme ci-dessus. On appelle toujours P la matrice de passage entre ces deux bases. On se donne de plus une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E)$ de E dans lui-même et on note M_u sa matrice relativement à la base initiale $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Comment calculer la matrice $\widetilde{M_u}$ de l'application u dans la nouvelle base ?
Il suffit de trouver la matrice $\widetilde{M_u}$ qui permet d'expliciter les coordonnées $\widetilde{Y}$ du vecteur image $y = u(x)$ en fonction des coordonnées $\widetilde{X}$ du vecteur $x \in E$ dans la nouvelle base : $\widetilde{Y} = \widetilde{M_u}.\widetilde{X}$. Or compte tenu de ce qui a été dit au paragraphe précédent, on a les relations $P.\widetilde{X} = X$ et $P.\widetilde{Y} = Y$ entre les deux systèmes de coordonnées pour les deux vecteurs x et $y = u(x)$. Dans le système initial de coordonnées, on a bien sûr la relation $Y = M_u X$. Il suffit donc d'écrire cette relation avec les coordonnées dans la nouvelle base : $P\widetilde{Y} = M_u P\widetilde{X}$, c'est à dire $\widetilde{Y} = (P^{-1}M_u P)\widetilde{X}$. Par identification avec la relation $\widetilde{Y} = \widetilde{M_u}.\widetilde{X}$, on établit la relation $\widetilde{M_u} = P^{-1}M_u P$ qui donne la matrice de l'application linéaire $u \in \mathscr{L}(E)$ dans la nouvelle base. On dit que les matrices M_u et $\widetilde{M_u}$ sont conjuguées.

- Le produit des matrices n'est pas commutatif en général

On vérifie par exemple que si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, on a $AB \neq BA$.

- Diviseurs de zéro

Le produit AB de deux matrices peut être nul alors qu'aucun des deux facteurs A et B n'est nul ! On dit que A et B sont des diviseurs de zéro ou que la matrice non nulle B est un diviseur de zéro de la matrice non nulle A.
Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice non nulle de l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices deux par deux. Mais son carré $A.A$ est nul : $A.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

- Inverse d'un produit

Si deux matrices A et B de l'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont inversibles, alors leur produit AB est encore inversible. Mais attention, l'inverse $(AB)^{-1}$ du produit AB s'obtient en échangeant les facteurs : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

- Transposition

Si $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ est une matrice à n lignes et p colonnes, sa transposée $A^{\mathrm{t}} \in \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{R})$ est une matrice à p lignes et n colonnes. On échange simplement les lignes et les colonnes de la matrice A.
Si $A_{k\ell}$ est l'élément générique de la matrice A pour la ligne k et la colonne ℓ, l'élément générique $(A^{\mathrm{t}})_{ij}$ de la matrice A^{t} pour la ligne i et la colonne j est donné par la relation $(A^{\mathrm{t}})_{ij} = A_{ji}$.
Si on peut faire le produit de A par B, alors on peut faire le produit dans l'autre sens pour les matrices transposées et on a la relation suivante : $(AB)^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}$.

- Une présentation des nombres complexes avec des matrices deux par deux

On pose $i \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque qu'on a alors $i.i = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, relation qu'on peut aussi écrire $i^2 = -1$ en identifiant la matrice I_2 et le nombre 1. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes $z = a + i\,b$ peut s'écrire comme un sous-ensemble de l'ensemble des matrices deux par deux : $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercices

- Produit de matrices et produit de composition

On définit comme à la leçon précédente les applications u de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et v de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ par les relations $u(x, y, z) = (x + y\,, x + z)$ et $v(x, y) = (x - y\,, x + y\,, x - 2y)$. On se donne les bases canoniques $\big((1, 0), (0, 1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$ et $\big((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\big)$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer la matrice M_u de l'application linéaire u relativement à ces bases.

b) Même question pour la matrice M_v de l'application linéaire v.

c) La composée $u_{\rm o}v$ existe-t-elle ?

d) Déterminer la matrice $M_{u_{\rm o}v}$ de l'application $u_{\rm o}v$ relativement aux bases canoniques.

e) Vérifier qu'on a bien la relation $M_{u_{\rm o}v} = M_u\,.\,M_v$.

f) La composée $v_{\rm o}u$ est-elle bien définie ?

g) Déterminer la matrice $M_{v_{\rm o}u}$ de l'application $v_{\rm o}u$.

h) La relation $M_{v_{\rm o}u} = M_v\,.\,M_u$ est-elle satisfaite ?

- Changement de base

On se donne la base canonique $(e_1\,, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et l'application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ relativement à cette base.

On se donne aussi la famille de vecteurs $\varepsilon_1 = e_1 + e_2$, $\varepsilon_2 = e_1 - e_2$

a) Démontrer que la famille $(\varepsilon_1\,, \varepsilon_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer les images $u(\varepsilon_1)$ et $u(\varepsilon_2)$ des vecteurs de la nouvelle base par l'application linéaire u.

c) Quelles sont les composantes des vecteurs $u(\varepsilon_1)$ et $u(\varepsilon_2)$ dans la base $(\varepsilon_1\,, \varepsilon_2)$?

d) Quelle est la matrice B de l'application linéaire u relativement à la base $(\varepsilon_1\,, \varepsilon_2)$?

e) Retrouver ce résultat avec la relation de changement de matrice lorsqu'on change de base.

- Écriture de la matrice d'une application linéaire

On se donne six nombres réels $a, b, c, d, e,$ et f. On définit une application u de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ par les relations $u(\alpha, \beta) = (a\,\alpha + b\,\beta, c\,\alpha + d\,\beta, e\,\alpha + f\,\beta)$ pour tout couple de réels (α, β).

a) Montrer que l'application u est linéaire : $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

On se donne la "base canonique" (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ avec les relations $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ et de façon analogue la "base canonique"(f_1, f_2, f_3) de $\mathbb{R}^3$: $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 0)$, $f_3 = (0, 0, 1)$. On note M_u la matrice de u relativement à ces deux bases.

b) Remplacer les points d'interrogation par leur valeur : $M_u \in \mathscr{M}_{??}(\mathbb{R})$.

c) Déterminer complètement la matrice M_u en fonction des six nombres $a, b, c, d, e,$ et f.

- Calcul de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre trois

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ un second membre donné.

a) Calculer les composantes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de la solution du système linéaire $A.X = Y$.

b) En déduire les neuf coefficients de la matrice A^{-1}.

c) On pose $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Reprendre les deux questions précédentes en remplaçant la matrice A par la matrice B.

- Changement de base

On se donne $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que l'inverse P^{-1} de la matrice P peut sécrire $P^{-1} = \frac{1}{2}P$.

b) Calculer les produits $P^{-1}A$ et AP.

c) En déduire, en effectuant le calcul de deux façons, que l'on a : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- Inversion des matrices deux par deux

On se donne $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $\delta = ad - bc$.

a) Montrer que si $\delta \neq 0$, on peut résoudre tout système linéaire de la forme $AX = Y$, où Y est une matrice à deux lignes et une colonne arbitraire donnée.

b) Si $\delta \neq 0$, calculer la matrice inverse A^{-1}.

c) Montrer que si $\delta = 0$, il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = 0$.

d) Si $A \neq 0$ est une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $ad - bc = 0$, montrer qu'elle admet au moins un diviseur de zéro qu'on explicitera.