le cnam

Algèbre linéaire et géométrie

Cours 6 Systèmes différentiels linéaires

- Un résultat fondamental

On se donne $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in \mathbb{R}$. On cherche une fonction $t \longmapsto u(t)$ définie pour $t \in [0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui satisfait aux deux conditions de système dynamique :
(i) évolution pour $t > 0$: $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \lambda\, u(t) = 0$
(ii) condition initiale : $u(0) = u_0$.
Alors la fonction $v(t) = u(t)\exp(\lambda\, t)$ a une dérivée nulle donc est constante dans l'intervalle où la fonction u peut être définie : $v(t) = v(0)$. De plus, la valeur $v(0)$ est donnée par la condition initiale ; donc $v(0) = u_0$. On en déduit que nécessairement, pour tout $t \geq 0$, $u(t) = \exp(-\lambda\, t)\, u_0$. Réciproquement, on vérifie que la fonction $u(t) = \exp(-\lambda\, t)\, u_0$ satisfait effectivement la condition de dévolution $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \lambda\, u(t) = 0$ et la condition initiale $u(0) = u_0$. Le système dynamique a donc une solution unique donné par la fonction exponentielle.

- Structure algébrique

L'ensemble des solutions $u(t)$ de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \lambda\, u(t) = 0$ est un espace vectoriel de dimension 1.

- Equation différentielle avec second membre

On se donne maintenant une fonction continue f de $[0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On modifie la dynamique et on cherche une fonction inconnue u telle que
(i) évolution pour $t > 0$: $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \lambda\, u(t) = f(t)$
(ii) condition initiale : $u(0) = u_0$.
Si on dispose d'une solution particulière $u_p(t)$ de l'équation $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \lambda\, u(t) = f(t)$, on peut chercher la fonction $u(t)$ solution de l'équation d'évolution $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \lambda\, u(t) = f(t)$ et de la condition initiale $u(0) = u_0$ sous la forme $u(t) = u_p(t) + w(t)$. Alors la fonction w est solution d'un problème homogène : $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + \lambda\, w(t) = 0$ pour $t > 0$ et $w(0) = u_0 - u_p(0)$.
La question est donc de trouver une solution particulière.

- Méthode de variation de la constante

On cherche une solution de l'équation $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \lambda\, u(t) = f(t)$ en faisant varier la constante u_0 dans l'expression $u(t) = \exp(-\lambda\, t)\, u_0$. On cherche donc $u(t)$ sous la forme $u(t) = \exp(-\lambda\, t)\, \varphi(t)$, où φ est une fonction inconnue du temps. Quand on injecte cet *a priori* dans l'équation $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \lambda\, u(t) = f(t)$, on obtient la relation $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \exp(\lambda\, t)\, f(t)$. Il suffit donc d'une simple quadrature pour calculer une solution particulière. Par exemple avec $\varphi(0) = 0$, il vient
$\varphi(t) = \int_0^t \exp(\lambda\, \theta)\, f(\theta)\, \mathrm{d}\theta$ et $u_p(t) = \int_0^t \exp(-\lambda\, (t-\theta))\, f(\theta)\, \mathrm{d}\theta$.
On peut finalement exprimer l'unique solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \lambda\, u(t) = f(t)$ jointe à la condition initiale $u(0) = u_0$ grâce à la formule de Duhamel :
$u(t) = \exp(-\lambda\, t)\, u_0 + \int_0^t \exp(-\lambda\, (t-\theta))\, f(\theta)\, \mathrm{d}\theta$.

François Dubois, mars 2022.

• "Recettes de cuisine" pour trouver une solution particulière
Dans de nombreux cas, la méthode de variation de la constante donne des calculs un peu longs qu'on peut éviter avec les règles semi-empiriques qui suivent.
Si f est un polynôme, on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de même degré. Par exemple, une solution particulière de l'équation $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u(t)=t$ vaut simplement $u_p(t)=t-1$.
Si f est une combinaison de fonctions circulaires sinus et cosinus, on cherche une solution particulière sous la forme d'une combinaison de sinus et cosinus analogues. Par exemple, on cherche une solution particulière de l'équation $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u(t)=\sin t$ sous la forme
$u(t)=\alpha\,\sin t+\beta\,\cos t$. Alors $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\beta\,\sin t+\alpha\,\cos t$ et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u(t)=(\alpha-\beta)\,\sin t+(\alpha+\beta)\,\cos t$.
On doit résoudre un système linéaire de deux équations et d'inconnues α et β. Il vient finalement $u_p(t)=\frac{1}{2}\,\sin t-\frac{1}{2}\,\cos t$.
Si f est une fonction exponentielle, on cherche une solution particulière sous la forme d'une exponentielle. On cherche par exemple particulière de l'équation $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u(t)=\exp(t)$, on pose $u(t)=\alpha\,\exp(t)$. Alors $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u(t)=2\,\alpha\,\exp(t)$ et par identification, $u_p(t)=\frac{1}{2}\,\exp(t)$.

• Quand le second membre est solution de l'équation homogène
Cherchons par exemple une solution particulière de l'équation $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u(t)=\exp(-t)$. Le choix conseillé $u(t)=\alpha\,\exp(-t)$ n'aboutit pas car cette fonction est solution de l'équation homogène ! Il suffit alors de multiplier la solution précédente par la fonction linéaire $t\longmapsto t$, c'est à dire $u(t)=\alpha\,t\,\exp(-t)$. On trouve alors sans difficulté $u_p(t)=t\,\exp(-t)$.

• Système différentiel linéaire
On se place maintenant dans l'espace $\mathbb{R}^n$. On se donne une matrice carrée $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'ordre n, un vecteur $X_0\in\mathbb{R}^n$ et on cherche un vecteur inconnu $X(t)$ qui est une fonction de $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de sorte que
(i) évolution pour $t>0$: $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}+A\,X(t)=0$
(ii) condition initiale : $X(0)=X_0$.
Dans le cas où la matrice A est diagonalisable, ce problème se ramène au cas scalaire étudié juste au dessus. Rappelons qu'on est certain qu'une matrice réelle est diagonalisable dans les deux cas suivants : si son polynôme caractéristique n'a que des racines réelles simples ou bien si elle est symétrique. Elle peut être également diagonalisable dans le cas de valeurs propres réelles multiples, mais pas toujours !
En effet, on introduit une matrice de passage P et une matrice diagonale $\Lambda=\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\,\dots,\,\lambda_n)$ de sorte que $P^{-1}A\,P=\Lambda$. Alors $A=P\,\Lambda\,P^{-1}$ et l'équation dynamique peut s'écrire sous la forme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(P^{-1}X\big)+\Lambda\big(P^{-1}X(t)\big)=0$. Si on pose $Y=P^{-1}X=(y_1,\,\dots,\,y_n)^{\mathrm{t}}$, le système différentiel précédent est formé de n équations différentielles découplées : pour $1\leq j\leq n$, on a $\frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}t}+\lambda_j\,y_j(t)=0$. Jointe à la condition initiale $y_j(0)=(P^{-1}X_0)_j$, j$^{\mathrm{o}}$ composante du vecteur $P^{-1}X_0$, ce système dynamique est exactement, aux notations près, celui traité dans le premier paragraphe de cette leçon. On en déduit $y_j(t)=\exp(-\lambda_j\,t)\,(P^{-1}X_0)_j$ pour tout indice j entre 1 et n.
Finalement, la solution du système différentiel homogène peut s'expliciter :
$X(t)=P\,\mathrm{diag}\,\big(\exp(-\lambda_1\,t),\,\dots,\,\exp(-\lambda_n\,t)\big)\;P^{-1}X_0$.

- Un résultat général

On se donne un entier $n \geq 1$ et une matrice réelle carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors l'ensemble de toutes les solutions du système différentiel $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + AX(t) = 0$ est un espace vectoriel réel de dimension n exactement.

Notons que ce résultat est vrai quelle que soit la matrice A, qu'elle soit diagonalisable ou pas.

Par exemple, considérons le cas $n = 2$ et la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. On peut se convaincre facilement que deux solutions linéairement indépendantes du système $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + AX(t) = 0$ peuvent s'écrire $X_1(t) = (\sin t, \cos t)^{\mathrm{t}}$ et $X_2(t) = (-\cos t, \sin t)^{\mathrm{t}}$. En effet, $\frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}t} = (\cos t, -\sin t)^{\mathrm{t}}$ et $AX_1(t) = (-\cos t, \sin t)^{\mathrm{t}}$ donc $\frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}t} + AX_1(t) = 0$. De même, $\frac{\mathrm{d}X_2}{\mathrm{d}t} = (\sin t, \cos t)^{\mathrm{t}}$ et $AX_2(t) = (-\sin t, -\cos t)^{\mathrm{t}}$ dont on déduit $\frac{\mathrm{d}X_2}{\mathrm{d}t} + AX_2(t) = 0$.

- Extension aux matrices diagonalisables sur le corps des nombres complexes

Comme nous venons de le voir pour un exemple avec $n = 2$, tout ce qui vient d'être proposé pour les systèmes différentiels linéaires à coefficients réels s'étend au corps des nombres complexes. Si la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable sur le corps des complexes, la solution $X(t) \in \mathbb{C}^n$ du système différentiel $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + AX(t) = 0$ pour t nombre réel strictement positif, joint à la condition initiale $X(0) = X_0$ pour une donnée initiale $X_0 \in \mathbb{C}^n$ peut être encore explicité par la relation $X(t) = P \operatorname{diag}\big(\exp(-\lambda_1 t), \ldots, \exp(-\lambda_n t)\big)\, P^{-1} X_0$.

Par exemple, considérons le cas $n = 2$ et la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Nous avons vu que cette matrice n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Mais elle a deux valeurs propres distinctes sur $\mathbb{C}$. Elle est donc diagonalisable en passant aux nombres complexes. Pour trouver les deux familles de solutions du système différentiel $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + AX(t) = 0$, on diagonalise la matrice A sur le corps des nombres complexes. On a, après un calcul qui est un exercice laissé au lecteur, $A = P\Lambda P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$. Dans le changement de variables $X = PY$, on a $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} + \Lambda Y(t) = 0$, donc $Y_1(t) = \exp(-it)Y_1(0)$ et $Y_2(t) = \exp(it)Y_2(0)$ en extrayant l'information des deux composantes $Y_1(t)$ et $Y_2(t)$ du vecteur $Y(t)$. Si on considère une première condition initiale $X(0) = (0, 1)^{\mathrm{t}}$, il vient $Y(0) = P^{-1}X(0) = \frac{1}{2}(1, 1)^{\mathrm{t}}$ et $Y(t) = \frac{1}{2}(\exp(-it), \exp(it))^{\mathrm{t}}$ donc $X(t) = PY(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \exp(-it) \\ \exp(it) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ et on vient de retrouver la solution $X_1(t)$ introduite plus haut. De manière analogue, avec la condition initiale $X(0) = (-1, 0)^{\mathrm{t}}$, on a $Y(0) = P^{-1}X(0) = \frac{1}{2}(i, -i)^{\mathrm{t}}$ et $Y(t) = \frac{1}{2}(i\exp(-it), -i\exp(it))^{\mathrm{t}}$. On en déduit $X(t) = PY(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i\exp(-it) \\ -i\exp(it) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ et on aboutit exactement à la solution X_2 proposée plus haut. □

Si on veut maintenant résoudre le système différentiel $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + AX(t) = 0$ avec $X(0) = (1, 0)^{\mathrm{t}}$ pour fixer les idées, on peut utiliser la méthode de diagonalisation avec des nombres complexes vue juste au dessus. Mais il est en général préférable de chercher une solution sous la forme d'une combinaison de fonctions de base réelles de l'espace vectoriel de dimension deux du système $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + A\,X(t) = 0$. Ainsi, avec $X_1(t) = (\sin t, \cos t)^{\mathrm{t}}$ et $X_2(t) = (-\cos t, \sin t)^{\mathrm{t}}$ introduites plus haut, on pose $X(t) = \alpha X_1(t) + \beta X_2(t)$. La condition initiale force alors la valeur des paramètres : $\alpha = 0$ et $\beta = -1$ et on en déduit $X(t) = (\cos t, -\sin t)^{\mathrm{t}} = -X_2(t)$.

- Système différentiel linéaire avec un terme source

Pour résoudre un système différentiel avec terme source $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + A\,X(t) = F(t)$, la méthode de variation des constantes peut s'étendre comme suit. On introduit une base $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ de l'espace des solutions de l'équation homogène : $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + A\,X(t) = 0$. Puis on cherche des fonctions $\varphi_1(t), \ldots \varphi_n(t)$ de sorte que $X(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t)\, X_j(t)$. Si on développe le vecteur $F(t)$ dans la base $X_1(t), \ldots, X_n(t)$, on dispose de fonctions $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ de sorte que
$F(t) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t)\, X_j(t)$. Pour chaque indice j, on obtient alors l'équation d'ordre un
$\frac{\mathrm{d}\varphi_j}{\mathrm{d}t} = f_j(t)$ qui se résout par la simple évaluation d'une intégrale.
Dans ce cas, la formule de Duhamel peut s'étendre mais l'exposer en détail dépasse le champ possible d'investigation de ce chapitre.
Les "recettes de cuisine" pour trouver une solution particulière s'adaptent sans difficulté. Si f est un polynôme, on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de même degré. Si f est une combinaison de fonctions circulaires sinus et cosinus, on cherche une solution particulière sous la forme d'une combinaison de sinus et cosinus analogues. Si f est une fonction exponentielle, on cherche une solution particulière sous la forme d'une exponentielle.
Si en particulier la source $F(t)$ est dirigée selon un vecteur propre r_j de la matrice A avec une variation temporelle pilotée par la valeur propre associée, c'est à dire $F(t) = \exp(-\lambda_j t)\, r_j$ avec $A\,r_j = \lambda_j\, r_j$, il suffit de chercher une solution particulière de la forme
$X(t) = t\, \exp(-\lambda_j t)\, r_j = t\, F(t)$.

- Equation différentielle d'ordre supérieur

Si on revient à l'exemple d'un système de dimension deux déjà envisagé ici : $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - y(t) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + x(t) = 0$, on remarque qu'on a $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + x(t) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + y(t) = 0$. La connaissance des solutions de cette équation différentielle du second ordre permet d'aider à la résolution du système du premier ordre.
Réciproquement, une équation différentielle linéaire d'ordre $n \geq 1$ est équivalente à un système différentiel linéaire d'ordre un en dimension n.
Considérons par exemple l'équation d'évolution d'un système masse-ressort
$m\, \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + c\, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + k\, x(t) = f(t)$ ou d'un circuit électrique de la forme "RLC" :
$RC\, \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + RC\, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = V(t)$. On peut l'écrire dans les deux cas $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \beta\, x(t) = g(t)$.
En posant $y = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, cette équation prend la forme d'un système différentiel du premier ordre $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + A\,X(t) = F(t)$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ et $F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$. On parle d'un oscillateur harmonique amorti dans ce cas.
Le lecteur intéressé par les multiples aspects des approches harmoniques pourra consulter avec profit l'ouvrage d'Yves Rocard *Dynamique générale des vibrations*, Masson et Compagnie, Paris, 1943.

- Cas où la matrice A n'est pas diagonalisable

Dans le cadre de ce cours, nous n'envisageons que quelques exemples de matrices non diagonalisables. Par exemple, la forme de Jordan pour un système posé à deux dimensions : $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Le système homogène associé s'écrit donc $\frac{dx}{dt} + \lambda\, x(t) + y(t) = 0$ et $\frac{dy}{dt} + \lambda\, y(t) = 0$. On lui adjoint une condition initiale : $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$. On en déduit simplement que $y(t) = \exp(-\lambda\, t)\, y_0$ et $\frac{dx}{dt} + \lambda\, x(t) = -\exp(-\lambda\, t)\, y_0$. On a donc pour cette dernière équation différentielle un terme source proportionnel à la solution de l'équation homogène. Après un calcul laissé au lecteur, il vient $x(t) = \exp(-\lambda\, t)\, x_0 - t \exp(-\lambda\, t)\, y_0$.
Nous retenons que si la matrice A n'est pas diagonalisable, on se ramène au cas où le second membre est proportionnel à la solution de l'équation homogène.

- Calcul de la puissance n^{o} d'une matrice

On se borne ici au cas où la matrice A est diagonalisable : $A = P \Lambda P^{-1}$ avec une matrice Λ diagonale. Alors $A^n = P\, \Lambda^n\, P^{-1}$.

- Application aux suites récurrentes linéaires

Il s'agit de l'analogue d'une équation différentielle, mais avec un temps discret. Cherchons par exemple une formule générale pour la suite u_n définie par récurrence $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ avec la condition initiale $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. Les premiers termes s'écrivent donc $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$. Cette suite a été introduite par Leonardo Fibonacci (1175–1250).
On peut introduire un vecteur $V_n = (u_n, u_{n+1})^{\mathrm{t}}$. La relation précédente s'écrit sous forme vectorielle : $V_{n+1} = A\, V_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. C'est une suite géométrique de raison égale à la matrice A ! La relation cherchée s'écrit donc $V_n = A^n\, V_0$ et tout le travail consiste alors à calculer la puissance n^{o} de la matrice A.

Exercices

- Oscillateur harmonique avec terme source

On s'intéresse à la solution $t \longmapsto x(t)$ de l'équation différentielle $\frac{d^2x}{dt^2} + x(t) = \sin t$, avec la condition initiale composée des deux équations $x(0) = 0$ et $\frac{dx}{dt}(0) = 0$.

a) Ecrire ce problème sous la forme d'un système de deux équations différentielles couplées d'ordre un de la forme $\frac{dX}{dt} + A\, X(t) = F(t)$. On précisera la matrice A et le second membre $F(t)$.

b) Quelle est la condition initiale $X(0) = X_0$ associée à l'écriture proposée à la question précédente ?

c) Montrer que le système homogème $\frac{d^2x}{dt^2} + x(t) = 0$ admet comme base de solutions les fonctions vectorielles $X_1(t) = (\cos t, -\sin t)^{\mathrm{t}}$ et $X_2(t) = (\sin t, \cos t)^{\mathrm{t}}$.

On cherche une solution particulière $X(t)$ sous la forme $X(t) = \alpha(t)\, X_1(t) + \beta(t)\, X_2(t)$.

d) Montrer qu'alors $\frac{d\alpha}{dt} = -\sin^2 t$ et $\frac{d\beta}{dt} = \sin^2 t \cos t$.

e) En déduire une solution particulière du système différentiel avec second membre.

f) Montrer finalement que la solution du système dynamique introduit aux questions a) et b) prend la forme $X(t) = \left(\frac{1}{2}\,(\sin t - t \cos t),\, \frac{1}{2}\, t \sin t\right)^{\mathrm{t}}$.

- Une équation différentielle linéaire du second ordre

On reprend l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + x(t) = f(t)$.

a) Montrer que si $f(t) = 0$ pour tout t, l'espace vectoriel des solutions, de dimension deux, est engendré par les fonctions $t \longmapsto \sin t$ et $t \longmapsto \cos t$.

b) Donner toutes les solutions de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + x(t) = 1$.

c) Même question pour l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + x(t) = t$.

d) Donner toutes les solutions de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + x(t) = t^2$.

e) Même question pour l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + x(t) = \sin t$.

$[x(t) = -\frac{t}{2}\cos t + \alpha\cos t + \beta\sin t]$.

f) Donner toutes les solutions de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + x(t) = \cos t$.

g) Même question pour l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + x(t) = \exp t$.

h) Donner toutes les solutions de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + x(t) = \frac{1}{\cos t}$.

- Un système différentiel linéaire d'ordre deux

On se donne deux nombres réels p et q. On cherche à exprimer la solution générale du système différentiel $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = A\,X(t)$ avec la condition initiale $X(0) = (p,\, q)^{\mathrm{t}}$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Quelles sont les valeurs propres de A ?

b) Trouver une matrice de passage P inversible et une matrice Λ diagonale de sorte que $A = P\Lambda P^{-1}$.

c) Calculer la matrice inverse P^{-1}.

d) Montrer qu'avec le changement de vecteur inconnu $Y(t) = P^{-1}X(t)$, le problème posé peut s'écrire $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = \Lambda Y(t)$ avec la condition initiale $Y(0) = Y_0$, où Y_0 est un vecteur que l'on précisera.

e) Calculer en fonction de p, q et de fonctions élémentaires classiques la solution $Y(t)$ du problème posé à la question précédente.

f) Calculer la solution X(t) du problème initial : $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = A\,X(t)$ avec $X(0) = (p,\, q)^{\mathrm{t}}$.

g) Reprendre toutes les questions précédentes mais avec cette fois le système d'ordre trois de matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et la condition initiale $X(0) = (p,\, q,\, r)^{\mathrm{t}}$.

- Un système différentiel linéaire d'ordre trois (d'après Isabelle Gil)

On se donne la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Quel est le noyau de la matrice A ?

b) Quel est le rang de la matrice A ?

c) Vérifier que le vecteur $v_1 = (1,\, 1,\, -1)^{\mathrm{t}}$ est le vecteur du noyau de A dont la seconde composante est égale à un.

d) Quels sont les vecteurs $v \in \mathbb{R}^3$ tels que $A\,v = v_1$?

e) On note v_2 le vecteur trouvé à la question précédente dont la seconde composante est égale à 1. Quelle est la valeur du vecteur v_2 ?

f) Quels sont les vecteurs $v \in \mathbb{R}^3$ tels que $A\,v = v_2$?
e) On note v_3 le vecteur trouvé à la question précédente dont la seconde composante est égale à 1. Quelle est la valeur du vecteur v_3 ?
f) Vérifier que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
g) Comment se transforme la matrice A si on représente l'opérateur $\mathbb{R}^3 \ni v \longmapsto A\,v \in \mathbb{R}^3$ dans la base (v_1, v_2, v_3) ?
h) Quelles sont les valeurs propres de A ?
i) Que vaut A^3 ?
j) Pouvait-on prévoir le résultat ?
k) On se donne $X_0 \in \mathbb{R}^3$. Résoudre le système différentiel $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + A\,X(t) = 0$ avec la condition initiale $X(0) = X_0$.

• Une suite récurrente linéaire (d'après Isabelle Gil)

On se donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.
a) Déterminer les valeurs propres de cette matrice.
b) La matrice A est-elle diagonalisable ?
c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A.
d) Calculer A^n pour tout entier naturel n.
e) Donner une formule générale pour les solutions u_n et v_n des relations récurrentes linéaires suivantes : $u_{n+1} = 5\,u_n + 6\,v_n$, $v_{n+1} = u_n + 6\,v_n$ avec la condition initiale $u_0 = v_0 = 1$.