le cnam

Algèbre linéaire et géométrie

Cours 13 Analyse vectorielle

• Tenseur complètement antisymétrique d'ordre trois

On se place dans un espace vectoriel euclidien orienté E_3. On se donne une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3). On définit le tenseur complètement antisymétrique d'ordre trois ε par les relations $\varepsilon_{ijk} = (e_i, e_j, e_k)$, produit mixte des vecteurs e_i, e_j et e_k.

• Propriétés élémentaires du tenseur complètement antisymétrique d'ordre trois

Si deux indices sont égaux, la valeur correspondante du tenseur complètement antisymétrique d'ordre trois est nulle. Par exemple, $\varepsilon_{iik} = 0$.

Si (i, j, k) est une permutation paire des trois nombres $(1, 2, 3)$, alors $\varepsilon_{ijk} = 1$. On a donc $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$.

Si (i, j, k) est une permutation impaire des trois nombres $(1, 2, 3)$, alors $\varepsilon_{ijk} = -1$. On a donc $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$.

Le tenseur complètement antisymétrique d'ordre trois est invariant par permutation circulaire : $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}$.

Le tenseur complètement antisymétrique d'ordre trois est changé en son opposé dans un échange de deux indices : $\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ijk}$, $\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ijk}$ et $\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{ijk}$,

• Contraction du tenseur complètement antisymétrique d'ordre trois

On adopte dans ce paragraphe et les suivants la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés. Si deux indices sont répétés du même côté du symbole d'égalité, on doit ajouter un symbole de sommation de 1 à 3 sur cet indice, même s'il n'a as été écrit. Par exemple la trace d'une matrice carrée $A = (a_{ij})$ s'écrit classiquement $\mathrm{tr}A = \sum_i a_{ii}$. Avec la convention d'Einstein, on a simplement $\mathrm{tr}A = a_{ii}$; le symbole de sommation est implicite car l'indice i est répété. Ainsi $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{i\ell m}$ signifie en fait $\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{i\ell m}$.

On utilise librement le symbole de Kronecker $\delta_{\alpha\beta}$ qui est égal à un si $\alpha = \beta$ et est égal à zéro si $\alpha \neq \beta$: $\delta_{\alpha\alpha} = 1$ et $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$.

On a la propriété remarquable suivante : $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{i\ell m} = \delta_{j\ell}\,\delta_{km} - \delta_{jm}\,\delta_{k\ell}$. Elle résume en une ligne $3^4 = 81$ relations différentes !

On a le même résultat par permutation circulaire des indices : $\varepsilon_{jki}\,\varepsilon_{\ell mi} = \delta_{j\ell}\,\delta_{km} - \delta_{jm}\,\delta_{k\ell}$ et $\varepsilon_{kij}\,\varepsilon_{mi\ell} = \delta_{j\ell}\,\delta_{km} - \delta_{jm}\,\delta_{k\ell}$.

• Double contraction du tenseur complètement antisymétrique d'ordre trois

On a, toujours avec la convention de sommaion implicite sur les indices répétés, $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ij\ell} = 2\,\delta_{k\ell}$.

François Dubois, mai 2022.

• Expression du produit mixte et du produit vectoriel

Nous nous plaçons toujours dans un espace vectoriel euclidien orienté E_3 et (e_1, e_2, e_3) désigne une base orthonormée directe de cet espace. On se donne trois vecteurs $u = u_i e_i$, $v = v_j e_j$ et $w = w_k e_k$.
Le produit mixte (u, v, w) est donné par l'expression $(u, v, w) = \varepsilon_{ijk} \, u_i v_j w_k$.
Le produit vectoriel $u \times v$ se décompose sous la forme $u \times v = (\varepsilon_{ijk} \, u_j v_k) \, e_i$. En d'autres termes, la i^{o} composante $(u \times v)_i$ du produit vectoriel $u \times v$ peut s'écrire sous la forme
$(u \times v)_i = \varepsilon_{ijk} \, u_j v_k$.

• Rotationnel

On se donne un champ de vecteurs φ : c'est une application différentiable de l'espace E_3 dans lui-même. Remarquons qu'un tel champ de vecteurs n'est pas un objet mathématique très simple : on doit en pratique se donner trois fonctions scalaires φ_1, φ_2 et φ_3 des trois variables x_1, x_2 et x_3. On a donc $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi_i(x_1, x_2, x_3) \, e_i$.
Le rotationnel $\mathrm{rot}\, \varphi$ du champ de vecteurs φ est lui aussi un champ de vecteurs, c'est à dire une application de l'espace E_3 dans lui-même. Ses composantes $(\mathrm{rot}\, \varphi)_i$ sont données par la relation $(\mathrm{rot}\, \varphi)_i = \varepsilon_{ijk} \, \partial_j \varphi_k$, avec $\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}$.
Si on explicite les trois composantes du rotationnel, on a
$\mathrm{rot}\, \varphi = (\partial_2 \varphi_3 - \partial_3 \varphi_2) \, e_1 + (\partial_3 \varphi_1 - \partial_1 \varphi_3) \, e_2 + (\partial_1 \varphi_2 - \partial_2 \varphi_1) \, e_3$.

• Gradient, rotationnel et divergence

On désigne par f un champ scalaire différentiable : $E_3 \ni x \longmapsto f(x) \in \mathbb{R}$. Alors le gradient ∇f de la fonction f est un champ de vecteurs $E_3 \ni x \longmapsto \nabla f(x) \in E_3$ et pour $x \in E_3$, on a
$\nabla f(x) = (\partial_k f)(x) \, e_k$.
On note φ un champ de vecteurs différentiable : $E_3 \ni x \longmapsto \varphi(x) \in E_3$. Le rotationnel $\mathrm{rot}\, \varphi$ de φ est un champ de vecteurs $E_3 \ni x \longmapsto (\mathrm{rot}\, \varphi)(x) \in E_3$ et pour $x \in E_3$, on a
$(\mathrm{rot}\, \varphi)(x) = \varepsilon_{ijk} \, (\partial_j \varphi_k)(x) \, e_i$.
On note ξ un champ de vecteurs différentiable : $E_3 \ni x \longmapsto \xi(x) \in E_3$. La divergence $\mathrm{div}\, \xi$ de ξ est un champ scalaire $E_3 \ni x \longmapsto (\mathrm{div}\, \xi)(x) \in \mathbb{R}$ et pour $x \in E_3$, on a
$(\mathrm{div}\, \xi)(x) = (\partial_j \xi_j)(x)$.

• Le rotationnel d'un gradient est identiquement nul

On se donne un champ scalaire f deux fois différentiable. Alors ∇f est un champ de vecteurs différentiable. On peut donc considérer le champ de vecteurs $\mathrm{rot}\,(\nabla f)$. Une conséquence du théorème de Schwarz d'échange de l'ordre des dérivées partielles est la nullité de ce champ de vecteurs : $\mathrm{rot}\,(\nabla f) \equiv 0$.

• La divergence d'un rotationnel est toujours nulle

On se donne maintenant un un champ de vecteurs φ deux fois différentiable. Le champ de vecteurs $\mathrm{rot}\, \varphi$ est donc différentiable et sa divergence $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \varphi)$ a un sens *a priori*. Ce champ scalaire est identiquement nul : $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \varphi) \equiv 0$. La cause ultime de cette propriété est toujours le théorème de Schwarz d'échange de l'ordre des dérivées partielles.

• Laplacien

En hommage à Pierre-Simon Laplace (1749–1827), mathématicien, astronome et physicien français, on appelle laplacien et on note Δ l'opérateur différentiel de degré deux défini pour un champ scalaire f deux fois différentiable par la relation $\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f)$. On a donc $(\Delta f)(x) = (\partial_j \partial_j f)(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$.
La laplacien s'applique aussi à un champ de vecteurs φ deux fois différentiable : on considère le laplacien des différentes composantes pour former un nouveau champ de vecteurs : $(\Delta\varphi)(x) = (\partial_j \partial_j \varphi_i)(x)\, e_i = (\Delta\varphi_1)(x)\, e_1 + (\Delta\varphi_2)(x)\, e_2 + (\Delta\varphi_3)(x)\, e_3$.

• Rotationnel d'un rotationnel

On se donne un champ de vecteurs φ deux fois différentiable. Alors la divergence de ce champ est un champ scalaire différentiable et l'expression $\nabla(\mathrm{div}\,\varphi)$ définit un champ de vecteurs. De façon analogue, le rotationnel du champ φ est un champ de vecteurs différentiable et le champ $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\varphi)$, rotationnel de $\mathrm{rot}\,\varphi$, est encore un champ de vecteurs si φ est deux fois différentiable. Enfin, nous venous de voir au paragraphe précédent que le laplacien de φ est lui-même un champ de vecteurs. La propriété de contraction du tenseur complètement anti-symétrique d'ordre trois permet de relier ces trois champs de vecteurs et on a la relation classique : $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\varphi) = \nabla(\mathrm{div}\,\varphi) - \Delta\varphi$. On peut aussi écrire une simple relation entre opérateurs : $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}) \equiv \nabla(\mathrm{div}) - \Delta$.

• Intégration par parties du flux d'un rotationnel

On se donne une surface Σ. Son bord $\Gamma = \partial\Sigma$ est une courbe fermée. Si on se donne une orientation le long de Γ, donc un vecteur unitaire tangent τ, on définit naturellement dans l'espace euclidien orienté une direction pour le vecteur normal n défini en tout point de la surface Σ. Si on change l'orientation le long de la courbe Γ, c'est à dire le signe de τ, on doit simplement changer le signe du vecteur normal n sur la surface Σ.
On considère maintenant un champ de vecteurs continûment différentiable φ défini de l'espace E_3 dans lui-même. Alors le flux $\int_\Sigma (\mathrm{rot}\,\varphi, n)\,\mathrm{d}\sigma$ du champ de rotationnel $\mathrm{rot}\,\varphi$ sur la surface Σ est égal à la circulation $\int_{\partial\Sigma} (\psi, \tau)\,\mathrm{d}s$ du champ de vecteurs φ le long du bord de la surface : $\int_\Sigma (\mathrm{rot}\,\varphi, n)\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\partial\Sigma} (\varphi, \tau)\,\mathrm{d}s$.
On peut vérifier que dans le cas particulier d'une surface plane, on retrouve les relations d'intégration par parties $\iint_\Sigma \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Sigma} f\, \nu_x\,\mathrm{d}s$ et $\iint_\Sigma \frac{\partial g}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Sigma} g\, \nu_y\,\mathrm{d}s$, où $\nu = (\nu_x, \nu_y, 0)$ est la normale extérieure à la frontière $\partial\Sigma$ dans le plan $x\mathrm{O}y$. Si on choisit pour vecteur tangent τ le long de la courbe $\partial\Sigma$ le vecteur du plan $x\mathrm{O}y$ issu de ν *via* une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$, c'est à dire $\tau_x = -\nu_y$, $\tau_y = \nu_x$ et $\tau_z = 0$. Alors le vecteur normal à la surface Σ compatible avec l'orientation de la courbe Γ est simplement le vecteur $n = \nu \times \tau$, identique au troisième vecteur de base $(0, 0, 1)^{\mathrm{t}}$. On considère maintenant le champ de vecteurs $\varphi = (g(x,y), f(x,y), 0))^{\mathrm{t}}$. Alors $\mathrm{rot}\,\varphi = (0, 0, \partial_x f - \partial_y g)^{\mathrm{t}}$ et on a le calcul suivant

$$\begin{aligned}\int_\Sigma (\mathrm{rot}\,\varphi, n)\,\mathrm{d}\sigma &= \int_\Sigma (\partial_x f - \partial_y g)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Sigma} (f\,\nu_x - g\,\nu_y)\,\mathrm{d}s = \int_{\partial\Sigma} (f\,\tau_y - g\,(-\tau_x))\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{\partial\Sigma} (g\,\tau_x + f\,\tau_y)\,\mathrm{d}s = \int_{\partial\Sigma} (\varphi, \tau)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

qui est un cas particulier de la relation vue ci-dessus.

Exercices

• Quelques calculs d'analyse vectorielle

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on se donne le point $X = (x, y, z)$ et le champ de vecteurs $\varphi(X) = X$.

a) Calculer l'expression du champ scalaire $\delta(X) = (\mathrm{div}\varphi)(X)$.

b) On se donne un vecteur fixe $\alpha \in \mathbb{R}^3$. Calculer $\mathrm{rot}(\alpha \times X)$.

c) On se donne un champ scalaire $f\colon\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ et un champ de vecteurs $\varphi\colon\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Calculer l'expression du champ scalaire $\mathrm{div}(f\,\varphi)$.

d) On se donne deux champs de vecteurs $u\colon\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $v\colon\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Calculer l'expression du champ scalaire $\mathrm{div}(u \times v)$.

• Calcul d'un rotationnel

On se donne une base orthonormée directe (e_x, e_y, e_z) de l'espace vectoriel euclidien orienté E_3. On pose $\varphi(x, y, z) = y\, e_x$.

a) Dessiner une représentation graphique du champ de vecteurs φ avec une flèche vectorielle proportionnelle au vecteur $\varphi(x, y, z)$ placée au pied du point (x, y, z) pour une famille de points le long de l'axe des ordonnées.

b) Calculer le champ de rotationnel $(\mathrm{rot}\,\varphi)(x, y, z)$ du champ de vecteurs φ.

• Une solution de l'équation de Laplace

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ formé des points $X = (x, y, z)$, on pose $r(X) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, qui définit un champ scalaire $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. On pose aussi $\mathrm{O} = (0, 0, 0)$.

a) Pour $X \neq \mathrm{O}$, calculer $\nabla(r)$.

b) Pour $X \neq \mathrm{O}$, calculer $\nabla(\frac{1}{r})$.

c) Pour $X \neq \mathrm{O}$, que vaut $\parallel \nabla(\frac{1}{r}) \parallel$, norme du champ de vecteurs précédent ?

d) Pour $X \neq \mathrm{O}$, calculer $\Delta(\frac{1}{r})$.

• Une autre solution de l'équation de Laplace

Dans le cas de deux dimensions d'espace, on pose $r(X) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et le logarithme naturel est noté log.

a) Calculer $\nabla(r)$ pour $r \neq 0$.

b) En déduire $\nabla(\frac{1}{r})$ si $r \neq 0$.

c) Si $r \neq 0$, que vaut $\Delta(\log r)$?

• Exemple d'intégration par parties du flux d'un rotationnel

On se donne la demi-sphère Σ centrée à l'origine, de rayon $R > 0$ et telle que $z \geq 0$.

a) Montrer que le bord Γ de cette demi-sphère est le cercle du plan $x\mathrm{O}y$ de centre l'origine et de rayon R.

b) Montrer que ce cercle Γ est paramétré par des coordonnées polaires planes : $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$ et admet un vecteur tangent τ de coordonnées $(-\sin\varphi,\ \cos\varphi)$.

On se donne le champ de vecteurs ψ défini sur $\mathbb{R}^3$ par ses coordonnées : $\psi(x, y, z) = (-y, x, 0)$.

c) Calculer la circulation $I = \int_\Gamma (\psi,\, \tau)\,\mathrm{d}s$ du champ de vecteurs ψ le long du cercle Γ.

d) Si on utilise les coordonnées sphériques $x = R\sin\theta\cos\varphi$, $y = R\sin\theta\sin\varphi$ et $z = R\cos\theta$ pour décrire les points de la demi-sphère Σ, quel est l'intervalle de variation de la latitude θ et de la longitude φ ?

e) Montrer qu'avec le choix d'orientation de la courbe Γ, la normale à Σ admet l'expression $n = (\sin\theta \, \cos\varphi, \, \sin\theta \, \sin\varphi, \, \cos\theta)$.
f) Exprimer l'élément de surface $\mathrm{d}\sigma$ sur la demi-sphère Σ en fonction du rayon R et des angles θ et φ.
g) Calculer le flux $J = \int_\Sigma (\mathrm{rot}\, \psi, \, n) \, \mathrm{d}\sigma$ du rotationnel du champ ψ introduit plus haut, sur la demi-sphère Σ.
h) Constater que $I = J$, c'est à dire la relation d'intégration par parties du flux d'un rotationnel : $\int_\Sigma (\mathrm{rot}\, \psi, \, n) \, \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial\Sigma} (\psi, \, \tau) \, \mathrm{d}s$ dans ce cas particulier. $[2\, \pi \, R^2]$