le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Paris, 2009 - 2016

Cours 02

Fonctions numériques d'une variable réelle

François Dubois

le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 2
Fonctions numériques d'une variable réelle *

- Intégrale
- Fonctions continues
- Nombres rationnels
- Fonctions dérivables
- Formule de Taylor
- Compléments

* François Dubois, 2009, édition septembre 2015, 35 pages.

Ch 4 Fonctions numériques d'une variable réelle

• Intégrale

On se donne $a<b$ deux nombres réels. On désigne par I l'intervalle $[a,b]$. On introduit la fonction numérique f qui est une application définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

(1) $\quad [a,b] \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$.

Dans un premier temps, nous supposons f positive, c'est à dire $f(x) \geq 0$, $\forall x \in I$.

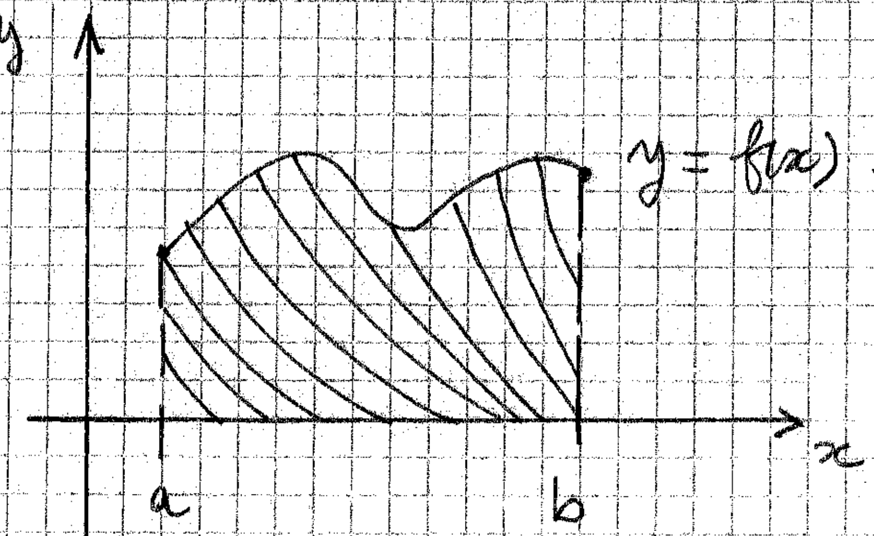


figure 1. L'intégrale est l'aire sous la courbe si f est positive.

* L'intégrale $\int_I f(x)\,dx$ représente l'aire sous la courbe entre les abscisses a et b, ainsi qu'illustré à la figure 1. Nous avons donc la propriété "évidente"

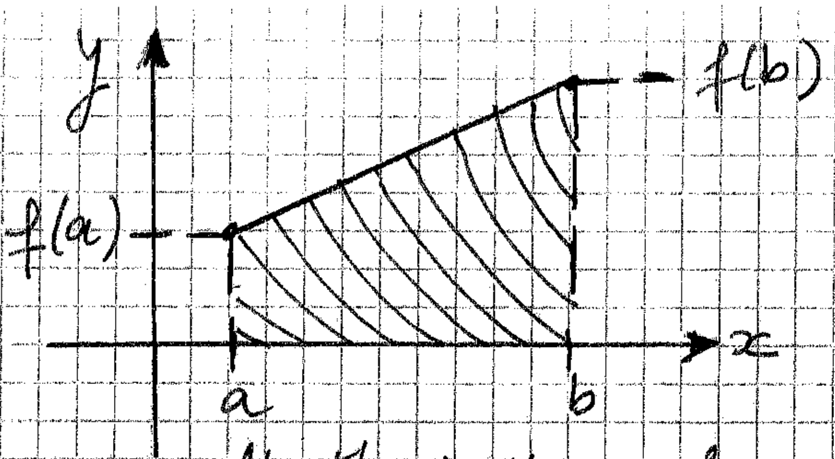
(2) $\quad f \geq 0 \implies \int_I f(x)\,dx \geq 0$

où $f \geq 0$ signifie que $f(x)$ est toujours positif ou nul, quel que soit x dans I.

Deux questions se posent naturellement : l'intégrale $\int_I f(x)\,dx$ est-elle définie, i.e. le symbole $\int_I f\,dx$ représente-t-il un nombre réel ou est-ce simplement un symbole abstrait ? D'autre part, une fois acquis la "réalité" de $\int_I f(x)\,dx$, il importe de savoir la calculer, soit de façon analytique, sujet qui sera traité ici, soit de façon numérique, sujet qui ne sera qu'entrevu ici. Nous renvoyons aux divers cours d'analyse numérique pour ce dernier point.

* Nous allons construire l'intégrale petit à petit, en s'appuyant sur la théorie de Riemann. Le premier cas "évident" est celui où f vaut identiquement 1. Alors l'aire sous la courbe est celle d'un rectangle de côtés 1 et $b-a$. On a donc

(3) $$\int_{[a,b]} dx = b-a .$$



<u>Figure 2</u> L'intégrale d'une fonction affine sur $[a,b]$ est donnée par la méthode des trapèzes

Dans le cas où $f(\cdot)$ est une fonction affine $[a,b] \to \mathbb{R}$, la surface sous la courbe est un trapèze et l'on a donc

$$\int_I (f \text{ affine})\,dx = \frac{1}{2}(\text{hauteur}) \times (\text{grande base plus petite base})$$

soit de façon algébrique

$$(4) \quad \int_{[a,b]} \left[f(a) + \frac{x-a}{b-a}\big(f(b)-f(a)\big) \right] dx = \frac{1}{2}(b-a)\big(f(a)+f(b)\big).$$

- Afin d'intégrer des fonctions plus générales la propriété d'<u>additivité par rapport au domaine</u> est naturelle. Elle est donnée par la <u>relation de Chasles</u>. Si $a<c<b$ sont trois nombres réels, on a

$$(5) \quad \int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_{[a,c]} f(x)\,dx + \int_{[c,b]} f(x)\,dx.$$

Il est aussi naturel de supposer que pour λ réel positif, on a :

(6) $$\int_{[a,b]} (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_{[a,b]} f(x)\,dx, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

on étend bien sûr cette identité à tout $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui ne permet plus d'interpréter l'intégrale comme l'aire entre la courbe et l'axe des x, ainsi que nous l'avons fait implicitement jusqu'ici.

- Nous pouvons maintenant intégrer f "en escalier", c'est à dire constante sur des intervalles. Soit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_j < x_{j+1} < \ldots x_{N-1} < x_N = b$ une subdivision de l'intervalle $[a,b]$ et f fonction en escalier $[a,b] \to \mathbb{R}$, c'est à dire telle qu'il existe $\xi_{j+1/2} \in \mathbb{R}$ $(j = 0, \ldots, N-1)$ de sorte que

(7) $$f(x) = \xi_{j+1/2}, \quad x_j < x < x_{j+1}, \ j = 0, \ldots, N-1$$

A l'aide de la relation de Chasles et de la linéarité (partielle !) (6), on peut sans difficulté établir :

(8) $$\int_I f\,dx = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_{j+1/2} \left(x_{j+1} - x_j \right).$$

- Nous pouvons établir l'inégalité importante

Prop. La valeur absolue de l'intégrale est inférieure ou égale à l'intégrale de la valeur absolue

(9) $$\left|\int_I f(x)\,dx\right| \leq \int_I |f(x)|\,dx,$$

$I=[a,b]$, $a<b$ deux réels, f en escalier $[a,b] \to \mathbb{R}$

- La <u>preuve</u> de cette proposition est une simple application de l'inégalité triangulaire :

$$\left|\int_I f\,dx\right| = \left|\sum_{j=0}^{N-1} \xi_{j+1/2}\,(x_{j+1}-x_j)\right|$$

$$\leq \sum_{j=0}^{N-1} |\xi_{j+1/2}|\,|x_{j+1}-x_j|$$

$$\leq \sum_{j=0}^{N-1} |\xi_{j+1/2}|\,(x_{j+1}-x_j) \quad \text{car } x_j < x_{j+1}$$

$$= \int_I |f(x)|\,dx$$

en appliquant la relation (8) à la fonction $|f|$ qui vaut $|\xi_{j+1/2}|$ sur l'intervalle $[a,b]$.
La relation (9) est établie. □

* Nous introduisons maintenant la définition classique (mais non primordiale !) :

(10) $$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int_{[a,b]} f(x)\,dx, & a<b \\ -\displaystyle\int_{[b,a]} f(x)\,dx, & a>b \end{cases}$$

sachant que $\int_a^a f\,dx = 0$. Alors c'est un excellent exercice de vérifier que les relations (3), (4), (5), (6), (8) se généralisent. Par contre, les relations les plus fondamentales qui sont des inégalités, à savoir (2) et (9) ne s'étendent pas pour $a \geq b$ et supposent $I = [a,b]$ avec $a<b$ deux réels.

• Nous savons intégrer f en escalier ou f en escalier par intervalles. Nous avons la propriété facile de linéarité (facile à prouver à partir des relations (6) et (8)) :

(11) $$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$$

Nous allons étendre la définition de l'intégrale en supposant simplement f bornée sur l'intervalle $[a,b]$.

(12) $$\exists M \geq 0,\ \forall x \in [a,b],\ |f(x)| \leq M.$$

Alors $-M \leq f(x) \leq M$ pour tout x. Il existe au moins une fonction en escalier φ_-

(respectivement φ_+) qui minore (respectivement majore) la fonction $f(\cdot)$ sur $[a,b]$:

$$(13) \qquad \varphi_-(x) \leq f(x) \leq \varphi_+(x), \quad \varphi_\pm \text{ en escalier}$$

il suffit par exemple de choisir φ_- constante égale à $-M$ et φ_+ constante égale à $+M$. Compte tenu de la linéarité de l'intégrale (relations (11) et (6)) et de la positivité (relation (2)), une éventuelle intégrale de f sur I doit vérifier

$$(14) \quad \begin{cases} \int_I \varphi_-(x)\,dx \leq \int_I f(x)\,dx \leq \int_I \varphi_+(x)\,dx, \\ \varphi_\pm \text{ en escalier satisfaisant à (13)} \end{cases}$$

* Dans l'expression (14) $\int_I \varphi_-(x)\,dx$ et $\int_I \varphi_+(x)\,dx$ sont des nombres réels connus alors que $\int_I f(x)\,dx$ n'a pas encore de sens a priori. Cet (éventuel !) nombre réel est simplement compris entre les deux bornes précédentes. L'idée maintenant est d'introduire <u>toutes</u> les fonctions $\varphi_\pm$ en escalier qui satisfont à (13). On pose

$$(15) \quad \begin{cases} \mathcal{E}_-(f) = \{\varphi_- \text{ en escalier } [a,b] \to \mathbb{R}, \\ \qquad\qquad \varphi_-(x) \leq f(x), \quad \forall x \in [a,b]\} \end{cases}$$

$$(16) \quad \mathcal{E}_+(f) = \{\varphi_+ \text{ en escalier } [a,b] \to \mathbb{R}, \; \varphi_+(x) \geq f(x), \; \forall x \in [a,b]\}$$

Rappelons qu'une fonction en escalier est a priori discontinue, mais que l'intégrale d'une telle fonction est facile à calculer à l'aide de la relation (8).

* Considérons l'ensemble de réels

$$(17) \quad A_-(f) = \{ \int_I \varphi_- dx, \; \varphi_- \in \mathcal{E}_-(f)\}.$$

Il est non vide car pour $\varphi_-(x) \equiv -M$, on a $-M(b-a) \in A_-(f)$. Il est majoré car compte tenu de (14), on a $\int_I \varphi_- dx \leq M(b-a)$ pour tout $\varphi_- \in \mathcal{E}_-(f)$, puisque avec $\varphi_+(x) \equiv +M$, cette dernière inégalité se réduit simplement à (14). L'ensemble $A_-(f)$ est non vide, majoré, cette partie de $\mathbb{R}$ admet donc une borne supérieure. Nous la notons ${}_*\int_I f(x)\, dx$:

$$(18) \quad \text{Sup } A_-(f) \equiv {}_*\int_I f(x)\, dx.$$

De même, l'ensemble de nombres réels

$$(19) \quad A_+(f) = \{ \int_I \varphi_+(x)\, dx, \; \varphi_+ \in \mathcal{E}_+(f)\}$$

est non vide ($\varphi_+ \equiv +M \in \mathcal{E}_+(f)$) et minoré car $-M(b-a) \leq \int_I \varphi_+(x)\,dx$, $\forall \varphi_+ \in \mathcal{E}_+(f)$. Donc cette partie de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure. Nous la notons ${}^*\int_I f(x)\,dx$.

(20) $$\operatorname{Inf} A_+(f) = {}^*\int_I f(x)\,dx .$$

* De l'inégalité

(21) $$\int_I \varphi_-(x)\,dx \leq \int_I \varphi_+(x)\,dx, \begin{cases} \forall \varphi_- \in \mathcal{E}_-(f) \\ \forall \varphi_+ \in \mathcal{E}_+(f) \end{cases}$$

nous déduisons que $\int_I \varphi_+(x)\,dx$ est, pour φ_+ fixé dans $\mathcal{E}_+(f)$, _un_ majorant de $A_-(f)$. Il est donc plus grand que le plus petit majorant, à savoir la borne supérieure de $A_-(f)$, soit ${}_*\int_I f\,dx$ compte tenu de la relation (18). Nous avons donc

(22) $${}_*\int_I f(x)\,dx \leq \int_I \varphi_+(x)\,dx, \quad \forall \varphi_+ \in \mathcal{E}_+(f)$$

Nous poursuivons ce raisonnement en constatant que la relation (22) exprime que ${}_*\int_I f\,dx$ est _un_ minorant de $A_+(f)$. Il est donc plus petit que le plus grand minorant, c'est à dire la borne inférieure de $A_+(f)$, ou ${}^*\int_I f\,dx$. Nous avons donc

(23) $${}_*\int_I f(x)\,dx \leq {}^*\int_I f(x)\,dx, \quad f \text{ bornée } [a,b] \to \mathbb{R}$$

* Les intégrales inférieure $_*\int_I f\,dx$ et supérieure $^*\int_I f\,dx$ d'une fonction f bornée sur $[a,b]$ sont bien définies pour toute fonction bornée (qui satisfait à (12)). Si l'inégalité (23) est stricte, c'est à dire si $_*\int_I f(x)\,dx < {}^*\int_I f(x)\,dx$, on dit que la fonction f n'est pas intégrable sur l'intervalle $[a,b]$ au sens de Riemann. Dans le cas contraire, si $_*\int_I f\,dx = {}^*\int_I f\,dx$, on dit que f est intégrable sur l'intervalle $I=[a,b]$. On note $\int_I f(x)\,dx$ la valeur commune de ces deux nombres :

$$(24)\quad \begin{cases} \int_I f(x)\,dx = {}_*\int_I f(x)\,dx = {}^*\int_I f(x)\,dx \\ f \text{ bornée et intégrable } [a,b] \equiv I \to \mathbb{R} \end{cases}$$

• Une condition suffisante pour que f soit intégrable sur $[a,b]$ est que la différence des deux termes de (21) soit arbitrairement petite :

$$(25)\quad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi_+ \in \mathcal{E}_+(f),\ \exists \varphi_- \in \mathcal{E}_-(f), \\ 0 \leq \int_I \left(\varphi_+(x) - \varphi_-(x)\right) \leq \varepsilon \end{cases}$$

La preuve est laissée au lecteur. C'est un bon exercice sur les bornes inférieure et supérieure.

Nous allons montrer que f continue sur $[a,b]$ est intégrable sur cet intervalle.

- Fonctions continues

On se donne deux réels $a < b$, et $x_0 \in [a,b]$.

(def) Fonction continue en x_0

On dit que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in [a,b]$ si et seulement si

(26) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in [a,b], |y - x_0| < \eta \Rightarrow |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$

(def) Fonction continue sur $[a,b]$

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue pour tout $x_0 \in [a,b]$ (y compris pour $x_0 = a$ et $x_0 = b$), on dit que f est continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$ et on note

(27) $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$, f continue $[a,b] \to \mathbb{R}$

- Une conséquence importante de la compacité de l'intervalle $[a,b]$ est que f atteint ses bornes. Nous ne développons pas ici les questions de topologie générale ; nous renvoyons à l'ouvrage de Choquet [Cours d'Analyse, Tome 2, Topologie, Masson et Compagnie, Paris, 1969]

Le théorème qui suit est donc admis. Il pourrait être prouvé sans difficulté particulière (voir le livre de Choquet !) mais au détriment du temps passé à étudier les fonctions, objet premier de ce cours d'Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Th Compacité.

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$. Alors l'ensemble $f([a,b])$ est borné et la fonction f atteint sa borne inférieure et sa borne supérieure.

$$(28) \quad \begin{cases} \exists x_- \in [a,b],\ \exists x_+ \in [a,b], \\ \forall x \in [a,b],\ f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+) \end{cases}$$

- La figure 3 illustre ce résultat.

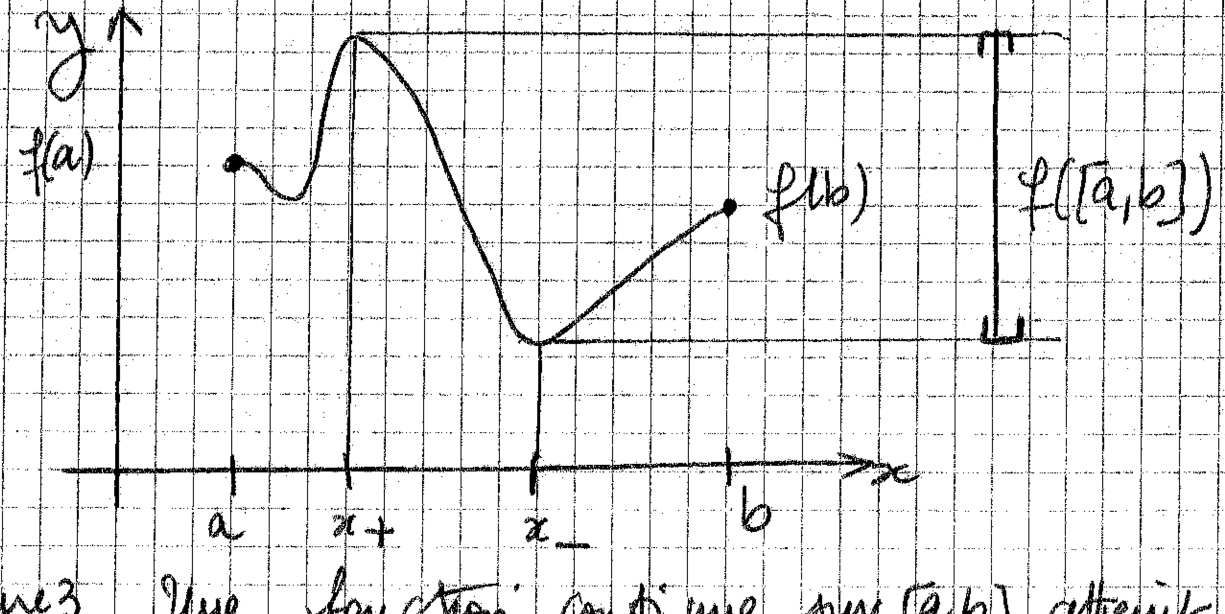


Figure 3. Une fonction continue sur [a,b] atteint sa borne inférieure et sa borne supérieure.

- Une autre propriété dite de topologie générale est que l'intervalle $[a,b]$ est "connexe", c'est à dire "d'un seul tenant", ou "sans trou", dans ce cas particulier d'une partie de $\mathbb{R}$.

Une propriété importante est que toute partie connexe de $\mathbb{R}$ est un intervalle (éventuellement ouvert à l'un ou l'autre des deux bouts, avec des bornes éventuellement égales à $-\infty$ ou $+\infty$).

Une propriété générale est que l'image d'un connexe par une fonction continue est un connexe. Dans le cas des fonctions numériques de variables réelles, ce résultat porte le nom de "théorème des valeurs intermédiaires". Il est dû à Bolzano (1817)

Th des valeurs intermédiaires

Soit $a < b$ deux réels et $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ de sorte que

(29) $\quad f(a)\, f(b) < 0$

Alors il existe $\xi \in]a,b[$, $f(\xi) = 0$.

* On peut envisager de résoudre une équation de la forme $f(x) = 0$ si f est continue et satisfait à (29). Mais rien n'est dit sur l'unicité de la solution (Figure 4).

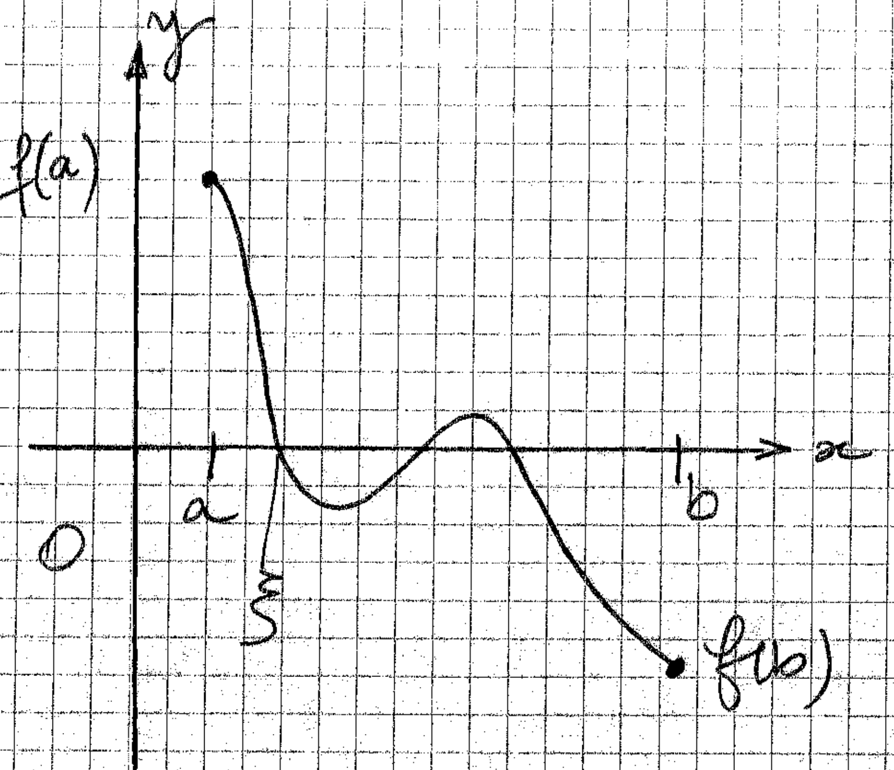


Figure 4. Théorème des valeurs intermédiaires

- La preuve de ce résultat utilise les propriétés fondamentales des réels et la définition (26) d'une fonction continue. On suppose $f(a) < 0$ pour fixer les idées (ce qui n'est pas le cas de l'exemple illustré Figure 4).
  Soit $E = \{ y \in [a,b],\ f(y) < 0 \}$.
  Alors E est une partie de $\mathbb{R}$ ($a \in E$), non vide, majorée par $b \notin E$. Soit $\xi = \sup E$.

* On a d'une part $f(\xi) \leq 0$. En effet, la fonction f étant continue, on peut "passer à la limite" dans l'inégalité $f(y) < 0$ lorsqu'on passe à la borne supérieure.
Démontrons ce résultat. Si $f(\xi) > 0$,

on écrit la continuité de f en $x_0 = \xi$:
si $x \in]\xi-\eta, \xi+\eta[\subset [a,b]$, $|f(x) - f(\xi)| < \frac{1}{2} f(\xi)$
pour un certain $\eta > 0$ avec ε fixé à $\frac{1}{2} f(\xi) > 0$
alors $-\frac{1}{2} f(\xi) \leq f(x) - f(\xi) \leq \frac{1}{2} f(\xi)$, donc
$f(x) \geq f(\xi) - \frac{1}{2} f(\xi) = \frac{1}{2} f(\xi) > 0$ si $x \in]\xi-\eta, \xi+\eta[$. On en déduit que ξ n'est pas le plus petit majorant de E puisque $\xi - \frac{\eta}{2}$ est encore un majorant de E et qu'il est strictement inférieur à ξ. D'où la contradiction et $f(\xi) \leq 0$

* On a d'autre part $f(\xi) \geq 0$. En effet si $f(\xi) < 0$, on écrit la continuité de f au point ξ et on peut trouver $\eta > 0$ de sorte que pour $x \in]\xi-\eta, \xi+\eta[$, $|f(x) - f(\xi)| < -\frac{f(\xi)}{2}$
Alors $\frac{1}{2} f(\xi) \leq f(x) - f(\xi) \leq -\frac{1}{2} f(\xi)$ dans cet intervalle et $f(x) \leq \frac{1}{2} f(\xi)$ si $x \in]\xi-\eta, \xi+\eta[$. On en déduit que $x = \xi + \frac{1}{2}\eta$ appartient à E, ce qui montre la contradiction car il est $>$ à ξ qui est supposé être un majorant de E.

* On a à la fois $f(\xi) \geq 0$ et $f(\xi) \leq 0$, ce qui établit le théorème. $\square$

(Th) des valeurs intermédiaires (2^e énoncé)

L'image par une fonction continue d'un intervalle de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'ensemble $f(I) \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. Soit $\alpha \in [f(a), f(b)]$ pour $a, b \in I$. Alors $\exists c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \alpha$.
Une fonction continue atteint "toutes" les valeurs entre les bornes. Voir à nouveau la figure 4 !

- La preuve de ce résultat se ramène au cas précédent. Pour $\alpha \in [f(a), f(b)]$ fixé avec $a, b \in I$, on peut échanger les rôles de a et b pour supposer $a < b$ (le cas $a = b$ est évident). On pose alors $\varphi(x) = f(x) - \alpha$ pour $x \in [a,b]$. Si $f(a) = f(b)$, alors $\alpha = f(a)$ et le problème est résolu. Si $f(a) < f(b)$ (pour fixer les idées ; le cas $f(a) > f(b)$ se traite de façon analogue et est laissé au lecteur) et α tel que $f(a) < \alpha < f(b)$, on a $\varphi(a) < 0$ et $\varphi(b) > 0$. On est donc ramené au cas du théorème précédent avec la fonction (continue !) φ. Il en résulte qu'il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $\varphi(\xi) = 0$. Donc $f(\xi) = \alpha$

et $c = \xi$ répond au problème. Le théorème est démontré. $\square$

- Un autre résultat qui est conséquence de la compacité de l'intervalle $[a,b]$ est l'uniforme continuité de $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$.

(def) Soit $a<b$ deux réels. On dit que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $[a,b]$ si et seulement si

(30) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in [a,b], |y-x| < \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$

Le réel $\eta > 0$ introduit dans (30) ne dépend pas de x_0, point de continuité de f. Cette notion est donc a priori plus forte que la simple hypothèse "f est continue en tout point", i.e. $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$. En fait il n'en est rien.

(th) uniforme continuité

Soit $a<b$ deux réels et $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ alors f est uniformément continue sur $[a,b]$; la relation (30) est vraie.

- Nous admettons ce résultat de topologie générale et renvoyons le lecteur "fana" au livre de Choquet

Prop *Encadrement d'une fonction continue par des fonctions en escalier.*

Soit $a<b$ deux réels et $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$. Alors $\forall \varepsilon>0$, $\exists \varphi_+ \in \mathcal{E}_+(f)$, $\exists \varphi_- \in \mathcal{E}_-(f)$ (donc l'inégalité (13) a lieu) telles que

(31) $|\varphi_+(x) - \varphi_-(x)| \leq \varepsilon$, $\forall x \in [a,b]$.

- La preuve de cette proposition est une conséquence simple du théorème qui précède. On se donne $\varepsilon>0$ et on fixe η de façon à satisfaire à la continuité uniforme (30). On fixe alors $N \in \mathbb{N}$ de sorte que $\frac{b-a}{N} < \eta$ et on pose $x_j = a + j\frac{b-a}{N}$ pour $0 \leq j \leq N$. On a donc pour $x, y \in [x_j, x_{j+1}]$, $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon/2$. On fixe $y = \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1})$ dans le (petit) intervalle $[x_j, x_{j+1}]$. Alors l'inégalité précédente peut s'écrire

$$f(\tfrac{1}{2}(x_j+x_{j+1})) - \varepsilon/2 \leq f(x) \leq f(\tfrac{1}{2}(x_j+x_{j+1})) + \varepsilon/2$$

pour tout $x \in [x_j, x_{j+1}]$. Pour $x \in]x_j, x_{j+1}[$, on pose $\varphi_-(x) = f(\frac{1}{2}(x_j + x_{j+1})) - \varepsilon/2$ et $\varphi_+(x) = f(\frac{1}{2}(x_j + x_{j+1})) + \varepsilon/2$ de sorte que $\varphi_- \in \mathcal{E}_-(f)$ et $\varphi_+ \in \mathcal{E}_+(f)$. L'inégalité (31) est alors claire et la proposition est démontrée. $\square$

(1h) On peut intégrer au sens de Riemann une fonction continue.

Soit $a<b$ deux réels, $I=[a,b]$, $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ alors le nombre $\int_I f(x)dx$ est bien défini.

- La preuve de ce résultat résulte de la condition suffisante (25) d'intégrabilité. Pour $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$, la proposition précédente (et en particulier la relation (31)) montre qu'on peut trouver φ_- et φ_+ en escalier, $\varphi_- \leq f \leq \varphi_+$ dans l'intervalle et $|\varphi_+ - \varphi_-| \leq \varepsilon/b-a$ dans l'intervalle $[a,b]$. On intègre (cf(2)) cette inégalité entre fonctions positives. On en déduit $\int_I (\varphi_+ - \varphi_-)\,dx \leq \int_I \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon$, ce qui montre (25) et établit le résultat. $\square$

- Fonctions dérivables.

Les fonctions dérivables sont de nature plus compliquée que les fonctions intégrables ou les fonctions continues. Mais elles sont parfois enseignées avant. Aucun commentaire ici sur d'éventuelles difficultés pédagogiques liées au maintien d'habitudes tenaces...

(def) Soit $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ et $x_0\in[a,b]$. On dit que f est dérivable en x_0 si il existe $l\in\mathbb{R}$ de sorte que

$$(32)\qquad \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right)=l$$

Comme l'objet "limite" au membre de gauche de (32) n'a pas été explicitement manipulé dans le cadre de ce cours, nous revenons à la définition

$$(33)\quad \begin{cases} \forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0,\ \forall x\in[a,b],\ x\neq x_0, \\ |x-x_0|<\eta \Rightarrow \left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-l\right|<\varepsilon . \end{cases}$$

Le "nombre dérivé" l est aussi noté $f'(x_0)$ ou $\dfrac{df}{dx}(x_0)$.

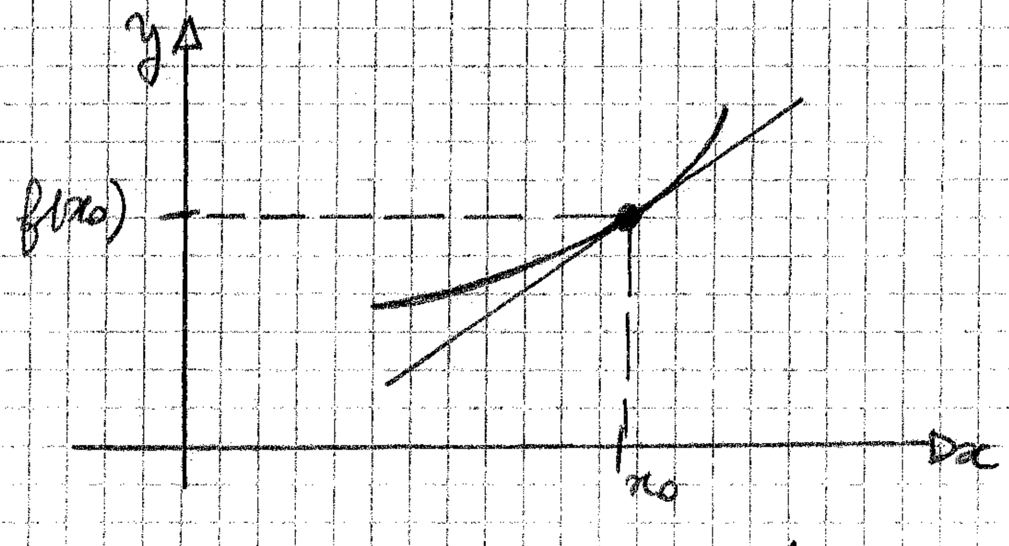


Figure 5. Tangente au graphe de représentation d'une fonction dérivable en x_0.

Les fonctions dérivables sont en général bien connues du lecteur, qui a déjà suivi son cours de propédeutique ou de mathématiques dites "supérieures", voir "spéciales". Nous rappelons les résultats les plus classiques.

(Th) Lemme de Rolle

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$, f dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Alors il existe $\xi \in]a,b[$, $f'(\xi) = 0$.

($a < b$ sont deux nombres réels).

- On part du fait que f est continue sur l'intervalle compact $[a,b]$. Si f est constante, $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$, et la propriété est claire. Si f n'est pas constante, elle prend par exemple des valeurs > 0 pour fixer les idées. Alors $\exists \xi \in [a,b]$, $f(\xi) = \sup\{f(x), x \in [a,b]\}$, et $f(\xi) \geq f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. $f(\xi) > 0$ car $f(\cdot)$ prend des valeurs > 0. Donc $\xi \neq a$ et $\xi \neq b$ puisque $f(a) = f(b) = 0$.

* Si $y < \xi$, $f(y) \leq f(\xi)$ et $\lim\limits_{\substack{y \to \xi \\ y < \xi}} \dfrac{f(\xi) - f(y)}{\xi - y} \geq 0$

donc $f'(\xi) \geq 0$. De même, pour $z > \xi$, $f(z) \leq f(\xi)$ donc

$\lim\limits_{\substack{z \to \xi \\ z > \xi}} \dfrac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi} \leq 0$ et $f'(\xi) \leq 0$.

Donc $f'(\xi) = 0$; d'où le résultat. □

Th des accroissements finis.

Soit $a<b$ deux réels, $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$, f dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $\xi \in]a,b[$ de sorte que

$$(34) \qquad f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad \xi \in]a,b[$$

- La preuve consiste à appliquer le lemme de Rolle à φ définie sur $[a,b]$ par

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

On constate sans difficulté que φ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. De plus, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Donc il existe $\xi \in]a,b[$ de sorte que $\varphi'(\xi) = 0$ qui vérifie donc la relation (34). Le résultat est établi. $\square$

Th Une fonction dérivable est continue

Soit $a<b$ deux réels et f dérivable au point $x_0 \in [a,b]$.

Alors f est continue au point x_0.

- La preuve est claire et facile. Elle est laissée au lecteur. $\square$

Th Si la dérivée est nulle, la fonction est constante

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en tout point de l'intervalle I et telle que $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$. Alors f est constante : $\exists C \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $f(x) = C$.

- La preuve de ce théorème est une conséquence du théorème des accroissements finis. Supposons f non constante sur I. Il existe donc $a < b$ de sorte que $a, b \in I$ et $f(a) \neq f(b)$. Comme I est un intervalle, c'est une partie connexe (et convexe !) de $\mathbb{R}$ et $[a,b] \subset I$. Alors f étant dérivable en tout point de $[a,b]$, elle y est continue et elle est également dérivable sur $]a,b[$. La conclusion du théorème des valeurs intermédiaires explicite $\xi \in]a,b[$ de sorte que $f'(\xi) = (f(b) - f(a))/(b-a)$ qui est un nombre réel non nul puisque $f(a) \neq f(b)$. Ceci contredit l'hypothèse et la conclusion est donc acquise. ☐

(Th) fondamental de l'Analyse.

Soit $a<b$ deux réels, $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$.
Pour $x \in [a,b]$, on pose

(35) $\quad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Alors la fonction F est dérivable sur $[a,b]$ et on a $F'(x) = f(x)$:

(36) $\quad \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x), \quad x \in [a,b]$

- Pour démontrer la propriété, on se donne $x \in [a,b[$ et $h>0$ de sorte que $a \leq x < x+h < b$. Les autres cas se traitent de façon analogue.

Vu la relation de Chasles, on a

$$\frac{1}{h}\left[F(x+h) - F(x)\right] - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt$$

Si on se donne $\varepsilon > 0$, soit $\eta > 0$ issu de la continuité de la fonction f au point x. Pour $0<h<\eta$, on a grâce à l'inégalité (9):

$(h>0)$

$$\left|\frac{1}{h}\left[F(x+h) - F(x)\right] - f(x)\right| \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,dt$$

$$\leq \varepsilon \frac{h}{h} = \varepsilon,$$

ce qui prouve le résultat. $\square$

Prop **Calcul des primitives.**

Soit $a<b$ deux réels, f continue sur $[a,b]$, $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ "primitive" de f, c'est à dire dérivable et telle que $F'(x)=f(x)$ pour tout $x\in[a,b]$. Alors on a

$$(37)\qquad \int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a) \equiv [F(t)]_a^b$$

- La preuve consiste à introduire la fonction

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + F(a) - F(x)$$

qui est bien définie pour $x\in[a,b]$. D'après le théorème fondamental et l'hypothèse faite sur F, on a $\varphi'(x)=0$. Donc $\varphi(x)=$ constante sur l'intervalle $[a,b]$, constante qui est nulle car $\varphi(a)=0$ clairement. La relation (37) exprime simplement que $\varphi(b)=0$, ce qui montre la propriété. □

- Les relations (36) et (37) donnent des méthodes "analytiques" pour calculer les intégrales. On a les exemples fondamentaux

$$\int_0^x t^\alpha\,dt = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} \quad \text{avec } \alpha>-1$$

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \log x, \quad \int_0^x e^t\,dt = e^x - 1, \text{ etc.}$$

(Prop) Dérivée d'un produit (Règle de Leibniz).

Soit u, v dérivables au point x_0. Alors la fonction "produit" uv ($(uv)(x) = u(x)\,v(x)\ \forall x$) est dérivable au point x_0 et

(38) $$\frac{d}{dx}(uv)(x_0) = \frac{du}{dx}(x_0)\,v(x_0) + u(x_0)\,\frac{dv}{dx}(x_0)$$

- La preuve est très élémentaire. C'est un exercice facile pour le lecteur.

(def) Différentiabilité.

Soit f définie "au voisinage" de x_0, c'est à dire dans un intervalle de la forme $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ avec $\alpha > 0$ fixé. On dit que f est différentiable en ce point si il existe $df(x_0) \in \mathbb{R}$ et $h \mapsto \varepsilon(h)$ défini au voisinage de 0, telle que $\varepsilon(0) = 0$ et ε continue en $h = 0$ de sorte que

(39) $$f(x_0+h) = f(x_0) + df(x_0).h + h\,\varepsilon(h).$$

(Th) Dérivabilité équivaut à différentiabilité

(pour les fonctions numériques de variable réelle!)

On a de plus

(40) $$df(x_0) = f'(x_0)$$

- La preuve de ce résultat est facile mais importante. Si f est différentiable en x_0, il est clair au vu de (39) que $\frac{1}{h}(f(x_0+h) - f(x_0))$ tend vers $df(x_0)$ si h tend vers 0, donc (40) est établi et f est dérivable au point x_0. Réciproquement, si f est dérivable en x_0, on pose

$$\varepsilon(h) = \frac{1}{h}\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right) - f'(x_0)$$

si $h \neq 0$ et $\varepsilon(0) = 0$. Alors la relation (39) est toujours vraie et $\varepsilon(h)$ tend vers zéro si h tend vers zéro puisque f est dérivable au point x_0. □

- La règle de dérivée d'un produit peut aussi s'écrire avec les différentielles (en omettant le point x_0) sous la forme

(41) $$d(uv) = (du)\,v + u\,(dv)$$

c'est la "règle de Leibniz", relation algébrique essentielle pour le calcul différentiel à cause du théorème qui suit.

(IV) Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur l'intervalle $[a,b]$. On a la relation

(42) $\int_a^b (u'v)(t)\,dt = (uv)(b) - (uv)(a) - \int_a^b (uv')(t)\,dt$

- La preuve de ce résultat est une conséquence immédiate de la règle de Leibnitz et de la relation (37) relative aux primitives. On remarque que la fonction $[a,b] \ni t \mapsto u(t)v(t) \in \mathbb{R}$ est une primitive de la fonction $[a,b] \ni t \mapsto \frac{d}{dt}(uv) \in \mathbb{R}$. Alors la relation (37) s'écrit ici

$$\int_a^b \frac{d}{dt}(uv)\,dt = \left[u(t)v(t)\right]_a^b$$

qui est identique à (42) vu la règle de Leibnitz (38). Le théorème est démontré. □

Prop Dérivation d'une fonction composée

Soit φ défini au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ de sorte que $\varphi(x_0) = y_0$. Soit ψ défini au voisinage de y_0 ($y_0 \in \mathbb{R}$). On suppose φ dérivable en x_0 et ψ dérivable en y_0. Alors la composée $\psi \circ \varphi$, défini au voisinage de x_0 par la relation $(\psi \circ \varphi)(x) = \psi[\varphi(x)]$ est dérivable au point x_0 et on a

(43) $(\psi \circ \varphi)'(x_0) = \psi'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0)$

- On peut aussi écrire la relation (43) sous la forme $(\psi\circ\varphi)'(x_0) = \psi'(y_0)\,\varphi'(x_0)$ et à partir de la relation

$$dy = \varphi(x)\,dx$$

écrire (formellement !) $\dfrac{d(\psi\circ\varphi)}{dx} = \dfrac{d\psi}{dy}\,\dfrac{dy}{dx}$; ce qui n'est jamais qu'une forme plus "pratique" de la relation (43). La preuve la plus simple de la relation (43) consiste à démontrer que la fonction $\psi\circ\varphi$ est différentiable au point x_0. C'est un exercice laissé au lecteur. □

Prop Corollaires (exercices !)

(44) $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x_0) = -\dfrac{1}{(f(x_0))^2}\,f'(x_0)$

(45) $(f^{-1})'(x_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$

où f^{-1} est la réciproque de la fonction (supposée bijective f).

ex $\dfrac{d}{dx} f(\alpha x) = \alpha f'(\alpha x)$

$\dfrac{d}{dt} f((1-t)a+tb) = f'((1-t)a+tb)\,(b-a)$

$\dfrac{d}{dx}(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1<x<+1$

$\dfrac{d}{dx}(\arctan x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

• Formule de Taylor

Nous nous intéressons à la formule de Taylor "avec reste intégral", négligeant de ce fait les autres (Young et Lagrange) qui ont des hypothèses un peu plus faibles. Dans ce paragraphe, les fonctions considérées sont continûment dérivables ainsi que leurs dérivées jusqu'à un certain ordre.

(def) Classes de fonctions

Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a<b$ deux réels. On note $\mathcal{C}^m([a,b])$ l'ensemble des fonctions f dérivables dont la dérivée est continue, ainsi que les dérivées successives $f'' = (f')'$, $f^{(3)}, \dots, f^{(k)}$ jusqu'à $f^{(m)}$.

* Dans la suite de ce paragraphe, les fonctions sont typiquement dans $\mathcal{C}^{n+1}([a,b])$. On commence par étudier $\varphi \in \mathcal{C}^{n+1}([0,1])$:

$\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)\,dt$, qu'on intègre par parties :

$$\varphi(1) = \varphi(0) + [(t-1)\varphi']_0^1 - \int_0^1 (t-1)\,\varphi''\,dt$$

$$= \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\,\varphi''(t)\,dt$$

qui est déjà une relation bien intéressante. On continue ce processus:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) - \frac{1}{2}\Big[(1-t)^2\varphi''(t)\Big]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^2\varphi^{(3)}dt$$

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^2\varphi^{(3)}dt$$

On en sait maintenant assez pour poser une hypothèse de récurrence:

$$(46)\quad \begin{cases} \varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + \cdots + \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0) + \cdots \\ \qquad + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0) + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \varphi^{(n+1)}(t)\,dt \end{cases}$$

* Si la relation (46) est correcte à l'ordre $(n-1)$, nous montrons que nous pouvons l'établir à l'ordre n; on a

$$\int_0^1 (1-t)^{n-1}\varphi^{(n)}(t)\,dt = (-1)\int_0^1 \Big[\frac{1}{n}(1-t)^n\Big]'\varphi^{(n)}dt$$

$$= -\frac{1}{n}\Big[(1-t)^n\varphi^{(n)}(t)\Big]_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 (1-t)^n\varphi^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{n}\varphi^{(n)}(0) + \frac{1}{n}\int_0^1 (1-t)^n\varphi^{(n+1)}(t)\,dt$$

et on vient de prouver le résultat suivant

Prop Un cas particulier de la formule de Taylor

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^{n+1}([0,1])$ $(n \in \mathbb{N})$

alors la relation (46) est vraie.

(42) Formule de Taylor avec reste intégral.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a<b$ deux nombres réels et $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$. La formule de Taylor avec reste intégral relie $f(a)$ à $f(b)$:

$$(47)\left\{\begin{aligned} f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(b-a)^n \\ &\quad + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}((1-t)a+tb)\,(b-a)^{n+1}\,dt. \end{aligned}\right.$$

- La preuve de ce résultat général consiste à se ramener au cas particulier où $a=0$ et $b=1$ prouvé plus haut (relation (46)). On pose pour $t \in [0,1]$: $\varphi(t) = f(a+t(b-a))$.

Alors $\varphi(0) = f(a)$, $\varphi'(t) = f'((1-t)a+tb).(b-a)$ et $\varphi'(0) = f'(a).(b-a)$. De proche en proche,

$$\varphi^{(k)}(t) = f^{(k)}((1-t)a+tb).(b-a)^k$$

et $\varphi^{(k)}(0) = f^{(k)}(a)(b-a)^k$. Alors la relation (46) écrite avec la fonction φ introduite ici est exactement la relation (47), ce qui prouve le théorème.

$\square$

- **Compléments**

Prop Formule de la moyenne.

Soit $a<b$ deux réels, f continue sur $[a,b]$ et $g \geqslant 0$ sur $[a,b]$. On a alors :

(48) $\exists c \in [a,b]$, $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$

- La preuve commence par envisager le cas où g est nulle sur $[a,b]$ alors les deux membres de la relation (48) sont nuls et cette relation est vraie. Sinon, $\int_a^b g(t)\,dt > 0$ et on tire de l'hypothèse de continuité de f que l'image de l'intervalle $[a,b]$ est un intervalle, que nous notons $[m, M]$ pour fixer les idées : $f([a,b]) = [m,M]$. On en déduit

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \qquad \forall x \in [a,b]$$

et on multiplie ces inégalités par $g(x) \geqslant 0$. Il vient

$$m\,g(x) \leqslant f(x)\,g(x) \leqslant M\,g(x), \quad \forall x \in [a,b]$$

relation qu'on intègre car $a<b$; puis on divise par $\int_a^b g(t)\,dt$, strictement positif. On en déduit

$$m \leqslant \frac{1}{\int_a^b g(t)dt}\int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M.$$

Le résultat est alors conséquence du théorème des valeurs intermédiaires :

(49) $\forall \alpha \in [m, M], \exists c \in [a,b], f(c) = \alpha$

si $f([a,b]) = [m, M]$. D'où la propriété. $\square$

(14) Changement de variable

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable et $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ monotone, bijective et dérivable sur $[\alpha, \beta]$:

$$\forall x \in [a,b], \exists! \theta \in [\alpha, \beta], \varphi(\theta) = x.$$

On a alors

(50) $$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_{[\alpha,\beta]} f(\varphi(\theta)) \, |\varphi'(\theta)| \, d\theta.$$

Cet énoncé se généralise aux dimensions supérieures.

- La preuve consiste à supposer la fonction φ croissante de $[\alpha,\beta]$ sur $[a,b]$. Nous supposons aussi $a < b$ pour fixer les idées, le cas $a > b$ se déduisant sans difficulté. Grâce au théorème fondamental et à la règle de dérivation d'une fonction composée, on a

$$\frac{d}{dt}\left[\int_a^{\varphi(t)} f(\xi)\,d\xi\right] = f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

Donc la fonction $t \mapsto \int_a^{\varphi(t)} f(\xi)\,d\xi$ est une primitive de la fonction $t \mapsto f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$.

alors $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \left[\int_a^{\varphi(\beta)} f(\xi)\,d\xi - \int_a^{\varphi(\alpha)} f(\xi)\,d\xi\right]$

$$= \int_a^b f(\xi)\,d\xi$$

et la relation (50) est démontrée dans ce cas.

* Si φ est décroissante de $[\alpha,\beta]$ sur $[a,b]$, on a $\alpha > \beta$ si on suppose toujours $a<b$ pour fixer les idées. On a donc $\varphi'(t) \leq 0$ sur $[\alpha,\beta]$.

On a :

$$\int_{[\alpha,\beta]} f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt = \int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt$$

$$= \int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\,(-\varphi'(t))\,dt$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

et le raisonnement fait au paragraphe précédent peut être reproduit sans modification pour aboutir à la relation (50). Le théorème est établi. $\square$

Dubois
15 novembre 2009.

Correction de quelques coquilles, suite à la lecture par Claude Durand, auditeur au CNAM en 2010-2011.

Dubois 5 juin 2011.