Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Paris, 2009 - 2016

Cours 09
Introduction à l'intégrale de Lebesgue

François Dubois

le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 9
Introduction à l'intégrale de Lebesgue *

- Motivation
- Ensembles mesurables
- Limite supérieure et limite inférieure
- Fonctions étagées
- Mesure positive
- Intégration des fonctions positives
- Fonctions sommables
- Epilogue

* François Dubois, 2009, édition septembre 2015, 23 pages.

AM I

ch (7) $\boxed{\text{Introduction à l'intégrale de Lebesgue}}$

• Motivation

L'intégrale de Riemann repose sur la notion de fonction en escalier. Si $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_j < x_{j+1} < \cdots < x_N = b$ est une subdivision de l'intervalle borné $[a,b]$, on note χ_j la fonction caractéristique de l'intervalle $]x_j, x_{j+1}[$ ($\chi_j(x) = 1$ si $x \in]x_j, x_{j+1}[$, $\chi_j(x) = 0$ sinon). Une fonction en escalier f relative à cette subdivision peut s'écrire sous la forme

$$(1) \qquad f = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j \chi_j$$

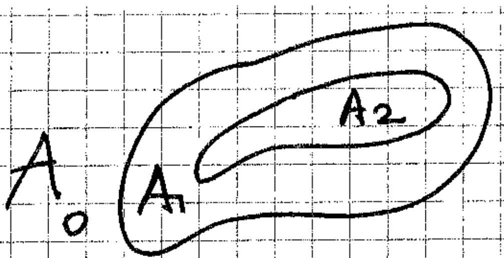
où $\alpha_j \in \mathbb{R}$ pour $j \in \{0, \dots, N-1\}$. Nous avons vu qu'alors l'intégrale de f a une expression très simple

$$(2) \qquad \int_{\mathbb{R}} f dx = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j (x_{j+1} - x_j)$$

avec la convention que l'intégrale de la fonction nulle sur un intervalle non borné est nulle.

Dans l'expression (2), la différence $(x_{j+1} - x_j)$ est la longueur (ou la "mesure") de l'intervalle

$]x_j, x_{j+1}[$.



Exemple de fonction étagée prenant trois valeurs.

* Cette notion de fonction en escalier se généralise via la notion de <u>fonction étagée</u>. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty[$ (pour fixer les idées) de sorte que l'ensemble image

$$(3) \qquad f(\mathbb{R}^2) = \{ f(y),\ y \in \mathbb{R}^2 \} \text{ est } \underline{\text{fini}}.$$

On note alors $\alpha_0 = 0, \alpha_1, \dots, \alpha_N$ les valeurs prises par la fonction f : $f(\mathbb{R}^2) = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ et A_j l'ensemble antécédant :

$$(4) \qquad A_j = \{ x \in \mathbb{R}^2,\ f(x) = \alpha_j \},\quad 0 \leq j \leq N$$

Si de façon générale, χ_A est la fonction caractéristique de l'ensemble A ($A \subset \mathbb{R}^2$ ici), c'est à dire

$$(5) \qquad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

on peut écrire la fonction étagée introduite ci-dessus sous la forme

$$(6) \qquad f = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \chi_{A_j}, \quad \alpha_0 = 0.$$

On note $\text{mes}(A_j) = \mu(A_j) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{A_j}\, dx$ la surface de l'ensemble $A_j \subset \mathbb{R}^2$. Alors l'intégrale de la fonction étagée f introduite à la relation (6) peut s'écrire simplement :

$$(7) \quad \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, dx = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \, \mu(A_j),$$

avec ici encore la convention que ~~une~~ l'intégrale d'une fonction nulle sur un ensemble A_0 non borné est nulle.

* Introduisons une fonction étagée très simple :

$$(8) \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas intégrable au sens de Riemann. Elle a une intégrale au sens de Lebesgue pourvu qu'on sache définir le nombre "mesure" $\mu([0,1] \cap \mathbb{Q})$. D'où une suite de questions naturelles (auxquelles nous allons répondre dans cette leçon) :

(i) Que sont les ensembles mesurables ?

(ii) Qu'est-ce qu'une mesure ?

(iii) Quel est le lien avec ce qui est connu ?

Nous savons que si $a<b$ sont deux réels, l'intégrale $\int_{[a,b]} f(t)\, dt$ est bien définie

pour f en escalier sur $[a,b]$ et $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$.

- **Ensembles mesurables**

Nous rappelons dans ce paragraphe et les suivants quelques éléments fondamentaux de la théorie de la mesure, qui fonde aussi le calcul des probabilités dans le formalisme développé par Kolmogoroff. Les preuves peuvent être trouvées chez W. Rudin [Analyse réelle et complexe, Mc Graw Hill, Masson, Paris, 1975].

* Soit X un ensemble quelconque ; nous notons $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de ses parties :

(9) $\mathcal{P}(X) = \{\phi, \{x\}, \dots, \{x,y\}, \dots, X\}$.

Si X est un ensemble fini comportant n éléments ($\# X = n$), alors on peut voir de façon élémentaire que $\mathcal{P}(X)$ est fini et comprend 2^n éléments ($\# \mathcal{P}(X) = 2^n$). Si X est infini, $\mathcal{P}(X)$ est également infini, et "plus grand".

(def) **Tribu de parties d'un ensemble X**

Soit X un ensemble, $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de ses parties. Une tribu $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ ayant les trois propriétés suivantes

* (t1) $X \in \mathcal{T}$
* (t2) Si $A \in \mathcal{T}$, le complémentaire A^c de A dans X appartient encore à $\mathcal{T}$.

(10) $A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T}$

* (t3) Si $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une famille dénombrable de $\mathcal{T}$ ($A_j \in \mathcal{T}, \forall j \in \mathbb{N}$), alors la réunion $A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ appartient encore à $\mathcal{T}$

(11) $\left(\forall j \in \mathbb{N}, A_j \in \mathcal{T}\right) \Rightarrow \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{T}\right)$

On dit qu'une tribu est <u>stable</u> par complémentation et réunion dénombrable.

* En théorie de la mesure, la tribu $\mathcal{T}$ est la famille des sous-ensembles de X <u>mesurables</u>.

On a la relation suivante, conséquence de (10) et (11) :

(12) $\left(\forall j \in \mathbb{N}, A_j \in \mathcal{T}\right) \Rightarrow \left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{T}\right)$

En effet, $\bigcap_j A_j = \left(\bigcup_j A_j^c\right)^c$; l'intersection est la conjuguée de la réunion via la complémentation et la relation (12) est claire. $\square$

(def) <u>Fonction mesurable</u> à valeurs réelles.

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est $\mathcal{T}$-mesurable (ou mesurable pour la tribu $\mathcal{T}$) si et seulement si, quels que soient les réels $a<b$, l'ensemble

(13) $f^{-1}(]a,b[) = \{x \in X, f(x) \in]a,b[\}$

est un ensemble mesurable : $f^{-1}(]a,b[) \in \mathcal{T}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a<b$.

Si on choisit $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, toute fonction numérique est mesurable. C'est (presque!) toujours le cas pour les applications qui intéressent un ingénieur.

(Prop) Composée d'une application mesurable et d'une application continue.

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ <u>mesurable</u> pour la tribu $\mathcal{T}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application <u>continue</u>. Alors la composée $g \circ f$ est mesurable.

(Th et def) <u>Tribu engendrée</u> par une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(X)$.

Soit $\mathcal{F}$ une famille de parties de l'ensemble X ($\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$). Il existe une "plus petite tribu" (pour l'intersection) $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{P}(X)$ de sorte que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^*$. On l'appelle "tribu engendrée" par $\mathcal{F}$.

(ex) <u>Tribu borélienne</u> dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$.

Pour $X = \mathbb{R}$, on pose $\mathcal{F} = \{]a,b[\,,\ a, b$ réels, $a<b \}$ l'ensemble des intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$. Alors la tribu $\mathcal{B} = \mathcal{F}^*$ engendrée par $\mathcal{F}$ s'appelle tribu Borélienne en hommage à Emile Borel (1871-1956).

Pour $X = \mathbb{R}^2$, on pose $\mathcal{F} = \{]a,b[\times]c,d[\,,\ a,b,c,d$ réels, $a<b$ et $c<d \}$ l'ensemble des rectangles du plan. La tribu engendrée $\mathcal{B}$ s'appelle encore la tribu borélienne (mais dans $\mathbb{R}^2$ cette fois).

- La notion de fonction mesurable s'étend sans difficulté à $f : X \to [-\infty, +\infty] \equiv \overline{\mathbb{R}}$, où l'on autorise f à prendre les valeurs $-\infty$ et $+\infty$. Si f est mesurable, les fonctions $f^+ \equiv \max(0,f)$, $f^- \equiv -\min(0,f)$ sont encore mesurables. Si les fonctions f_j sont mesurables, alors $g \equiv \sup\limits_j f_j$ est mesurable et il en est de même de $h \equiv \inf\limits_j f_j$. Avant d'aller plus loin, nous prenons le temps de définir la limite supérieure et la limite inférieure d'une suite de réels.

• Limite supérieure et limite inférieure

Dans ce qui suit, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de réels ou une suite à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$. Les propriétés valables pour les suites bornées s'étendent sans difficulté aux suites à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Nous les laissons en exercice au lecteur "fana".

* Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la suite $\alpha_n = \sup\limits_{k\geq n} a_k$ est bien définie ; elle est minorée et elle est <u>décroissante</u> :

$$(14) \quad \sup_{k\geq n+1} (a_k) \leq \sup_{k\geq n} (a_k)$$

En effet, $\sup\limits_{k\geq n+1} a_k \leq \sup\left(a_n, \sup\limits_{k\geq n+1} a_k\right)$

$$\leq \sup_{k\geq n} (a_k) = \alpha_n$$

soit $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$. La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>converge</u> donc vers une limite appelée limite supérieure de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

$$(15) \quad \limsup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left[\sup_{k\geq n} (a_k)\right]$$

* De façon analogue, la suite $\beta_n = \inf_{k \geq n} a_k$ est bien définie ; elle est croissante (exercice !) et converge vers une limite, appelée limite inférieure de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

$$(16) \quad \liminf_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq n} (a_k)\right).$$

- On a bien sur $\liminf_n a_n \leq \limsup_n a_n$ et toute suite extraite $a_{\varphi(n)}$ qui converge vers une limite l satisfait nécessairement à $\liminf_n a_n \leq l \leq \limsup_n a_n$.

Prop Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ une suite bornée. Alors

$$(17) \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} (-a_n) = -\inf_{n\in\mathbb{N}} (a_n).$$

- La <u>preuve</u> se déroule en deux étapes. On a d'abord $a_n \geq \inf_k a_k$ qui est un minorant de la suite a. Donc
$$-a_n \leq -\inf_k a_k \quad \text{et} \quad -\inf_k a_k \text{ est donc}$$
un majorant de la suite $(-a_k)$, lequel est donc plus grand que le plus petit majorant ; on en déduit que $\sup_n(-a_n) \leq -\inf_k (a_k)$.

* Par ailleurs, $-a_n \leq \sup_k(-a_k)$ donc $a_n \geq -\sup_k(-a_k)$, ce qui montre que $-\sup_k(-a_k)$ est un minorant de la suite a ; il est nécessairement plus petit que le plus grand minorant et $\inf_n a_n \geq -\sup_k(-a_k)$ ce qui montre que $\sup_k(-a_k) \geq -\inf_n a_n$.

La relation (17) résulte alors des deux points précédents. $\square$

Prop Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels alors

$$(18) \quad \liminf_{k\in\mathbb{N}}(-a_k) = -\limsup_{k\in\mathbb{N}}(a_k)$$

- La preuve consiste à appliquer deux fois de suite la proposition précédente. On a

$$\begin{aligned}
\liminf_k(-a_k) &= \sup_n\left[\inf_{k\geq n}(-a_k)\right] \\
&= \sup_n\left[-\sup_{k\geq n}(a_k)\right] \\
&= -\inf_n\left(\sup_{k\geq n}(a_k)\right) \\
&= -\limsup_k(a_k).
\end{aligned}$$

$\square$

Prop $a_n \leq b_n$ deux suites bornées de réels alors $\liminf_n a_n \leq \liminf_n b_n$ et

$\limsup_k a_k \leq \limsup_k b_k$.

- La preuve résulte de façon immédiate des définitions (15) et (16). $\square$

Nous pouvons reprendre les propriétés laissées en suspens page 7.

Prop $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurables pour la tribu $\mathcal{T}$. alors $\limsup_n f_n$ et $\liminf_n f_n$ sont des fonctions $\mathcal{T}$-mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}$.

- <u>Fonctions étagées</u>.

déf soit $f : X \to [0, \infty[$ une fonction mesurable positive pour la tribu $\mathcal{T}$. On dit que f est <u>étagée</u> si l'ensemble $f(X)$ est <u>fini</u>. On peut alors écrire f sous la forme (6), avec A_j et α_j explicités à la relation (4) et la fonction caractéristique χ_A d'un sous ensemble mesurable A introduite en (5).

(Th) d'approximation

Soit $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable pour la tribu $\mathcal{C}$. Il existe une suite croissante s_j de fonctions mesurables étagées :

(19) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_j \leq s_{j+1} \leq \cdots$

majorées par f :

(20) $s_j \leq f \ , \ \forall j \in \mathbb{N}$

qui converge simplement vers f :

(21) : $\forall x \in X, \ s_j(x) \to f(x)$ si $j \to +\infty$.

- Mesure positive.

(def) Soit $(X, \mathcal{C})$ un ensemble mesurable. Une mesure μ est une application $\mathcal{C} \to [0, +\infty]$ ($\mu(A)$ a un sens quel que soit $A \in \mathcal{C}$; c'est un nombre ≥ 0 ou $+\infty$) qui satisfait à la propriété d'additivité dénombrable :

$$(22) \begin{cases} \text{Si } (A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C} \text{ est formée de parties deux à} \\ \text{deux disjointes, } \mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j) \end{cases}$$

* On remarque que la somme au membre de droite de (22) est ou bien égale à $+\infty$ ou bien est un nombre réel $< +\infty$ et la série associée $\sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j)$ est alors <u>convergente</u> : $\sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j) < \infty$ (ce qui justifie a posteriori la notation déjà introduite dans les chapitres précédents).

<u>Exemples</u>.

(i) $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, μ mesure de <u>comptage</u> qui "charge" uniformément les entiers :

$$(23) \qquad \mu(\{j\}) = 1, \quad j \in \mathbb{N}.$$

(ii) $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Il suffit de définir la mesure sur la famille qui engendre $\mathcal{T}$, à savoir les intervalles $]a,b[$ ($a<b$ deux réels) :

$$(24) \qquad \mu(]a,b[) = b-a, \quad (a<b \text{ réels}).$$

(iii) $X = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{T} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, tribu engendrée par les rectangles $]a,b[\times]c,d[$ ($a<b$, $c<d$ quatre nombres réels). On a

$$(25) \qquad \mu(]a,b[\times]c,d[) = (b-a)(d-c) \quad (a<b, c<d)$$

Les deux derniers exemples sont caractéristiques de la <u>mesure de Lebesgue</u> sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement.

Prop Propriétés élémentaires

On a, pour μ mesure sur l'ensemble mesurable $(X, \mathcal{C})$

(25) $\mu(\phi) = 0$

(26) $(A_j \cap A_k = \phi \text{ si } j \neq k) \Rightarrow$
$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)$

(27) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

(28) $A, B \in \mathcal{C}$. $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

(29) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_j \subset A_{j+1} \subset \cdots$ suite croissante de $\mathcal{C}$. Alors si $A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$, $\mu(A_n) \to \mu(A)$ si $n \to \infty$.

(30) A_1 tq $\mu(A_1) \neq \infty$, $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_j \supset A_{j+1} \cdots$ une suite décroissante dans $\mathcal{C}$. On pose $A = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j$. Alors $\mu(A_n) \to \mu(A)$, $n \to \infty$.

o arithmétique dans $[0, +\infty]$.

Rappelons les règles de calcul utilisées en théorie de la mesure quand on ajoint $+\infty$ aux réels ≥ 0. Pour l'addition

(31) $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$, $a \in [0, +\infty]$.

Et pour la multiplication,

$$(32) \quad a\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot a = \begin{cases} +\infty & \text{si } a \in]0,+\infty] \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

On peut montrer que ces deux lois sont associatives et commutatives et que la multiplication est distributive relativement à l'addition.

• Intégration des fonctions positives.

Soit $(X,\mathcal{T})$ un ensemble mesurable et μ une mesure positive sur $(X,\mathcal{T})$. Soit $f : X \to [0,\infty[$ mesurable étagée : $f(X) = \{\alpha_0, \dots, \alpha_N\}$.
On pose $A_j = f^{-1}(\{\alpha_j\}) = \{x \in X,\ f(x) = \alpha_j\}$.
On pose

$$(33) \quad \int_X f \, d\mu = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \ \mu(A_j)$$

avec la convention (32) que $0\cdot(+\infty) = 0$ de façon à ce que l'intégrale de la fonction nulle soit <u>bien définie</u> si X est tel que $\mu(X) = +\infty$.

(déf) Soit $f : X \to [0,\infty]$ mesurable pour la tribu $\mathcal{T}$. Soit s_j une suite de fonctions mesurables étagées qui converge simplement en croissant vers f. On introduit

$$(34) \quad \mathcal{E}_-(f) = \{s \text{ étagée},\ s \leq f\}$$

On pose par définition

(35) $$\int_X f \, d\mu = \sup_{s \in \mathcal{E}_-(f)} \left(\int_X s \, d\mu \right)$$

- On remarque que cette définition est beaucoup plus souple que la définition de Riemann (voir le chapitre 4) qui demande aussi des fonctions en escalier majorantes. Mais ici, nous avons dû introduire un outil plus lourd avec les ensembles mesurables et les mesures.

(R) Si $\mu(X) = 1$, on dit que μ est une <u>mesure de probabilité</u> sur l'ensemble mesuré $(X, \mathcal{T})$.

(α) $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu =$ mesure de comptage. $f : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ peut s'écrire $f(j) = u_j$ avec $u_j \geqslant 0$ (égal éventuellement à $+\infty$). La fonction s_n définie par

$$\begin{cases} s_n(j) = u_j & \text{si } j \leqslant n \text{ et } u_j \leqslant n \\ s_n(j) = n & \text{si } j \leqslant n \text{ et } u_j \geqslant n \\ s_n(j) = 0 & \text{si } j \geqslant n+1 \end{cases}$$

est étagée, $\leqslant f$ et converge en croissant vers la fonction f. On a $\int_{\mathbb{N}} s_n \, d\mu = \sum_{j=0}^{n} \inf(u_j, n)$ qui converge vers $\sum_0^\infty u_j \equiv \int_{\mathbb{N}} f \, d\mu$. L'intégrale de Lebesgue permet aussi de traiter les <u>séries</u>

Prop Propriétés fondamentales de l'intégrale

Soit $(X, \mathcal{C}, \mu)$ un ensemble mesuré et $f : X \to [0, \infty]$ une fonction mesurable positive. On a les propriétés suivantes :

(36) $0 \leq f \leq g \Rightarrow \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$

(37) $A \subset B \subset X,\ f \geq 0 \Rightarrow \int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu$

(38) $(f \geq 0,\ c \in [0, +\infty[$ ou $c = +\infty) \Rightarrow$
$$\int_A (cf) \, d\mu = c \int_A f \, d\mu.$$

(39) $(f \geq 0,\ A \in \mathcal{C}) \Rightarrow \int_A f \, d\mu = \int_X (f \chi_A) \, d\mu$

(40) Si $\forall x \in A,\ f(x) = 0$, alors $\int_A f \, d\mu = 0$ (même si $\mu(A) = +\infty$).

(41) Si $\mu(A) = 0$, $\int_A f \, d\mu = 0$ (même si $f(x) \equiv +\infty$ sur A)

(42) $f, g \geq 0 \Rightarrow \int_A (f+g) \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_A g \, d\mu$.

Th de convergence monotone (H. Lebesgue)

Soit $(X, \mathcal{C}, \mu)$ un ensemble mesuré, $0 \leq f_1(x) \leq \cdots \leq f_j(x) \leq f_{j+1}(x) \leq \cdots$ des fonctions mesurables. On suppose que $\forall x \in X,\ f_n(x) \to f(x)$ si $n \to \infty$. Alors f est mesurable et $\int_X f_n \, d\mu$ converge vers $\int_X f \, d\mu$

Th de convergence monotone [2e énoncé]

Soit $f_j : X \to [0, +\infty]$ une suite de fonctions $\mathcal{B}$. mesurables. On pose $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)$. Alors f est mesurable et

(43) $$\int_X f(x)\, d\mu = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\int_X f_j \, d\mu \right).$$

- Avec Lebesgue (1875 - 1941), nous retenons la règle d'interversion de $\int$ et Σ pour des fonctions mesurables positives :

(44) $$\int_X \left(\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x) \right) d\mu = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\int_X f_j \, d\mu \right).$$

La preuve consiste à vérifier que la propriété est vraie pour une somme finie (i.e. généraliser la propriété (42)) puis à appliquer le théorème de convergence monotone (dans sa première forme) à $g_n = \sum_{j=0}^{n} f_j$.

Prop Soit $a_{ij} \geq 0$ une "série double" $(i, j \in \mathbb{N})$. alors

(45) $$\sum_i \left(\sum_j a_{ij} \right) = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} \right).$$

- La preuve consiste à appliquer le théorème de convergence monotone (relation (44)) à

$f_j : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ définie par $f_j(i) = a_{ij}$, l'ensemble $\mathbb{N}$ de tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ étant muni de la mesure de comptage introduite à la relation (23)

(HR) Lemme de Fatou

Soit $f_n : X \to [0, +\infty]$ une suite de fonctions mesurables et positives. Alors on a

$$(45)_{bis} \quad \int_X (\liminf_n f_n)\, d\mu \leqslant \liminf_n \left(\int_X f_n\, d\mu\right)$$

- La preuve consiste à revenir à la définition (16) de la limite inférieure. On pose $g_n(x) = \inf_{k \geqslant n} f_k(x)$. Alors la fonction g_n croît (convergence simple) vers $\liminf_n f_n$. De $g_n(x) \leqslant f_n(x)$ $(\forall x \in X)$ on tire grâce à la relation (36) : $\int_X g_n\, d\mu \leqslant \int_X f_n\, d\mu$ et en passant à la limite inférieure pour ces deux suites [cf la proposition page 11], $\liminf_n \int_X g_n\, d\mu \leqslant$ $\leqslant \liminf_n \int_X f_n\, d\mu$.

* Or g_n croît vers $\liminf_n f_n$. Donc $\int_X g_n\, d\mu$ converge (th de convergence monotone) vers $\int_X (\liminf_n f_n)\, d\mu$. L'inégalité (46) est donc établie. $\square$

- Fonctions sommables.

On désigne par $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un ensemble mesurable muni d'une mesure positive μ.

(def) $\mathcal{L}^1(\mu) = \{ f$ mesurable $X \to \mathbb{R}$, $\int_X |f|\, d\mu < \infty \}$

Si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, on dit que f est <u>intégrable</u> au sens de Lebesgue, ou est "sommable".

- L'extension à $f : X \to \mathbb{C}$ est immédiate. Elle n'est pas développée ici.
- Si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, alors $f^+ = \sup(0, f)$ et $f^- = -\min(0, f)$ sont positives et mesurables ; on a

$$(46) \quad 0 \leq f^+ \leq |f|, \quad 0 \leq f^- \leq |f|$$

$$(47) \quad f \equiv f^+ - f^- \; ; \; |f| \equiv f^+ + f^-$$

(def) <u>Intégrale</u> d'une fonction sommable.

Si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, alors $\int_X f^+ d\mu$ et $\int_X f^- d\mu$ sont des <u>nombres</u> réels compte tenu de (46) et de l'hypothèse $0 \leq \int_X |f|\, d\mu \neq +\infty$.

On pose (compte tenu de (47)) :

$$(48) \quad \int_X f\, d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu .$$

La relation (48) définit bien un <u>nombre réel</u>.

(Prop) Soit $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
alors $(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et

$$(49) \quad \int_X (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu$$

(Th) Majoration fondamentale

Si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, on a

$$(50) \quad \left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f|\, d\mu.$$

(Th) de convergence dominée de Lebesgue.

Soit $f_n : X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions qui est supposée converger simplement vers f :
$\forall x \in X$, $f_n(x) \to f(x)$ si $n \to \infty$. On suppose qu'il existe $g \geq 0$ intégrable ($\int_X g\, d\mu < \infty$) de sorte que

$$(51) \quad |f_n(x)| \leq g(x), \quad \forall x \in X.$$

Alors $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\lim\limits_{n \to \infty} \int_X |f - f_n|\, d\mu = 0$,

$$(52) \quad \lim_{n \to \infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f d\mu.$$

- La preuve consiste à appliquer le lemme de Fatou à $\varphi_n \equiv 2g - |f - f_n| \geq 0$ car $|f| \leq g$ à la limite ; on en déduit

$$\int_X \liminf_n \varphi_n \, d\mu = \int_X 2g \, d\mu$$
$$\leqslant \liminf_n \int_X \varphi_n \, d\mu$$
$$= 2\int_X g \, d\mu + \liminf_n \left(-\int_X |f-f_n| \, d\mu\right)$$
$$= 2\int_X g \, d\mu - \limsup_n \left(\int_X |f-f_n| \, d\mu\right)$$

cf (18)

on retranche le nombre $2\int_X g d\mu$ de part et d'autre de cette inégalité et on en déduit $\limsup_n \int_X |f-f_n| \, d\mu \leqslant 0$.

- Donc $\sup_{k \geqslant n} \int_X |f-f_k| \, d\mu$ tend vers 0 si $n \to \infty$, ce qui exprime que $\int_X |f-f_k| \, d\mu \to 0$ si $k \to \infty$.
  On déduit alors de la relation (50) :
  $$\left|\int_X (f-f_n) \, d\mu\right| \leqslant \int_X |f-f_n| \, d\mu \quad \text{qui tend vers } 0.$$
  Donc $\int_X (f-f_n) \, d\mu$ tend vers 0 si $n \to \infty$, ce qui exprime la relation (52). $\square$

- <u>Epilogue</u>

Si $\{x\}$ est un singleton, sa mesure de Lebesgue est nulle. Il suffit d'appliquer la relation (30) à $A_j = \left]x - \frac{1}{j}, x + \frac{1}{j}\right[$; on a $\bigcap_j A_j = \{x\}$ et

$$\mu(\{x\}) = \lim_j \mu(A_j) = \lim_j \frac{2}{j} = 0.$$

Soit φ la caractéristique des rationnels :
$\varphi(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, on peut l'écrire comme une union (disjointe!) de la forme

$$(53) \qquad \mathbb{Q} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \xi_j .$$

De la relation $\mu(\{\xi_j\}) = 0$ et de la réunion disjointe (53), on déduit de la relation (22) :

$$(54) \qquad \mu(\mathbb{Q}) = 0 .$$

On a alors clairement

$$(55) \qquad \int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}} \, d\mu = 0$$

où $d\mu$ est la mesure de Lebesgue. Nous avons su intégrer la fonction caractéristique des nombres rationnels.

Dubois
7 décembre 2009.

Correction de coquilles suite à la lecture de ces notes effectuée par Claude Durand, auditeur au CNAM en 2010-2011.

Dubois 5 juin 2011.