le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Paris, 2009 - 2016

Cours 14
Transformation de Fourier

François Dubois

le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 14
Transformation de Fourier *

- Cas d'une fonction intégrable
- Inversion de Fourier
- Dérivée de la transformée de Fourier
- Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$
- Loi forte des grands nombres.

* François Dubois, 2010, édition septembre 2015, 23 pages.

ch 14

Transformation de Fourier

• Cas d'une fonction intégrable

On se donne f intégrable sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, qu'on note $f \in L^1(\mathbb{R})$ et qui signifie

(1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt < \infty$;

l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt$ représente effectivement un nombre réel et n'est donc pas égale à $+\infty$. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on pose

(2) $\displaystyle\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-it\xi}\, dt \, , \quad \xi \in \mathbb{R}$

et cette relation définit effectivement pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ un nombre complexe $\hat{f}(\xi)$ puisque la relation (1) a lieu ($f \in L^1(\mathbb{R})$).

ex 1 Transformée de Fourier de la "porte" χ_T.

Rappelons que la fonction "porte" χ_T (représentée Figure 1) est définie par

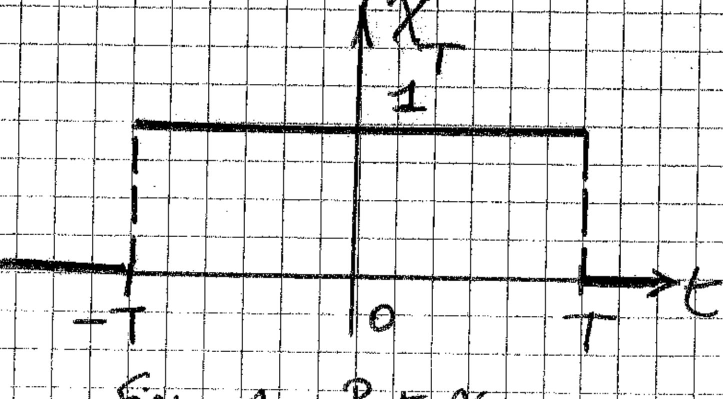


Figure 1. Porte χ_T

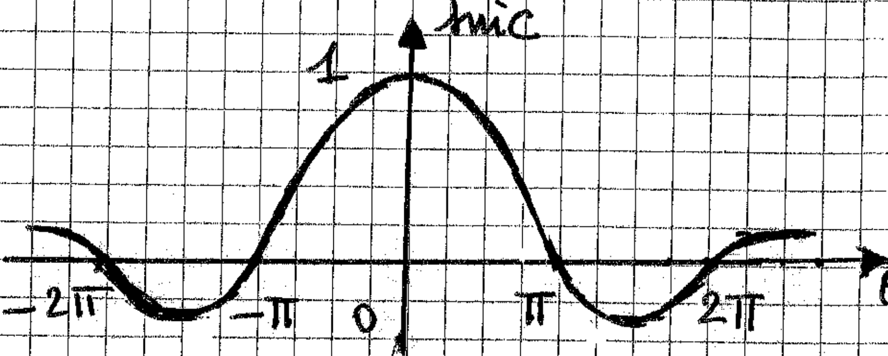
(3) $\chi_T(t) = \begin{cases} 1 \, , & |t| < T \\ 0 \, , & |t| > T . \end{cases}$

Le calcul de $\widehat{x_T}$ à l'aide de la relation (2) n'offre pas de difficulté ; ainsi pour $\xi \neq 0$, on a

$$\widehat{x_T}(\xi) = \int_{-T}^{T} e^{-i\xi t}\,dt = \frac{1}{-i\xi}\left(e^{-i\xi T} - e^{i\xi T}\right)$$

$$= \frac{2}{\xi}\sin \xi T = 2T\,\mathrm{sinc}(\xi T)$$

en introduisant le sinus cardinal défini par



(4) $\mathrm{sinc}\,\theta = \dfrac{\sin\theta}{\theta}, \ \theta\in\mathbb{R}$

Figure 2. Sinus cardinal

ainsi qu'illustré à la figure 2. On a alors

(5) $\widehat{x_T}(\xi) = 2T\,\mathrm{sinc}(\xi T), \ \xi \in \mathbb{R}$.

* On remarque que $\widehat{x_T}$ est bornée, continue (même si $x_T(\cdot)$ ne l'est pas !) et $\widehat{x_T}(\xi)$ tend vers 0 si $|\xi|$ tend vers $+\infty$.

(Prop) Quelques relations élémentaires

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ fixée. On a les relations :

(6) si $g_1(t) = f(t)e^{i\alpha t}$, alors $\widehat{g_1}(\xi) = \widehat{f}(\xi-\alpha), \ \alpha\in\mathbb{R}$

(7) si $g_2(t) = f(t-\alpha)$, alors $\widehat{g_2}(\xi) = e^{-i\alpha\xi}\widehat{f}(\xi)$

(8) si $g_3(t) = \overline{f(-t)}$, alors $\widehat{g_3}(\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}$

(9) si $g_4(t) = f\left(\frac{t}{\lambda}\right)$ et $\lambda>0$, alors $\widehat{g_4}(\xi) = \lambda\widehat{f}(\lambda\xi)$.

- La preuve ne demande que quelques calculs élémentaires de changements de variable dans une intégrale simple et le fait que $\overline{\exp(i\theta)} = \exp(-i\theta)$ si $\theta \in \mathbb{R}$. Elle est laissée en exercice au lecteur.

Prop <u>La transformée de Fourier est bornée.</u>

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$ et

(10) $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

- La preuve consiste à remarquer que le module de l'intégrale $\hat{f}(\xi)$ donnée à la relation (2) est majoré par l'intégrale du module, c'est à dire $\|f\|_1$ donné à la relation (1). Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on a donc

(11) $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1 , \quad \xi \in \mathbb{R}$.

Cette relation montre qu'il existe $C \geq 0$ de sorte que $|\hat{f}(\xi)| \leq C$ pp($\xi \in \mathbb{R}$) puisque la relation (11) est même vraie partout !

Comme $\|\hat{f}\|_\infty$ est l'infimum des $C \geq 0$ de sorte que $|\hat{f}(\xi)| \leq C$ pp($\xi \in \mathbb{R}$), ce plus grand minorant est plus petit que $\|f\|_1$ qui vérifie la relation (11). On en déduit la relation (10), ce qui établit la propriété. □

Prop Transformée de Fourier d'un produit de convolution

Si $f, g \in L^1$, alors $f * g \in L^1$ (déjà vu dans un chapitre précédent!) et on a

$$(12) \quad \widehat{f*g} = \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

La transformée de Fourier transforme un produit de convolution en un produit ordinaire

- La preuve consiste à écrire le théorème de Fubini pour la fonction de deux variables $\varphi(x,y)$ définie par $\varphi(x,y) = f(y)\, g(x-y) \exp(-i\xi x)$ avec $\xi \in \mathbb{R}$ fixé. On vérifie d'abord que $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^2)$ à l'aide du théorème de Tonelli : l'intégrale $\iint dx dy |\varphi(x,y)|$ est finie si et seulement si l'intégrale $\int dx \left[\int dy\, |\varphi(x,y)|\right]$ est finie ou si l'intégrale $\int dy \left[\int dx\, |\varphi(x,y)|\right]$ est finie. Or nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} dx\, |\varphi(x,y)| = \int_{\mathbb{R}} dy\, |f(y)| \left[\int_{\mathbb{R}} dx\, |g(x-y)|\right]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dy\, |f(y)| \left[\int_{\mathbb{R}} dz\, |g(z)|\right] \quad \text{avec } z = x-y$$

$$= \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$ qui est un nombre ≥ 0 puisque $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$.

* On a alors

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(x-y)\, dy\right] e^{-i\xi x}\, dx$$

$$= \int dx\,dy\ \varphi(x,y)$$

et on peut calculer cette intégrale dans l'ordre que l'on veut compte tenu du théorème de Fubini. On a alors

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} dy\, f(y) \left[\int_{\mathbb{R}} dx\ g(x-y)\, e^{-i\xi x} \right]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dy\, f(y) \left[\int_{\mathbb{R}} dz\ g(z)\, e^{-i\xi(z+y)} \right]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dy\, f(y)\, e^{-i\xi y} \cdot \hat{g}(\xi) \qquad \text{avec } z = x-y$$

$$= \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$$

ce qui établit la relation (12) et montre la propriété. $\square$

Th **Continuité de la transformée de Fourier.**

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto \hat{f}(\xi) \in \mathbb{C}$ définie à la relation (2) est une application continue :

(13) $\quad \hat{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

• La preuve est une simple utilisation du théorème de convergence dominée (cf chap 8) dans sa variante "continuité d'une intégrale".

Nous avons en effet $x \mapsto f(x) e^{-i\xi x}$ intégrable pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \mapsto f(x) e^{-i\xi x}$ continue presque partout ($x \in \mathbb{R}$), il existe $g \geqslant 0$ intégrable ($\int_{\mathbb{R}} g\, dx < \infty$) de sorte que

$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |f(x) \exp(-i\xi x)| \leqslant g$;

c'est la fonction $|f|$ elle même puisque $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Donc $\hat{f}$ est une fonction continue de la variable $\xi \in \mathbb{R}$. $\blacksquare$

(ex 2) Transformée de Fourier d'une exponentielle décroissante

Soit $Y(t)$ la fonction de Heaviside définie par

$$(14) \quad Y(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

et φ la fonction

$$(15) \quad \varphi(t) = Y(t) e^{-t} = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Alors

$$(16) \quad \hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{1 + i\xi}$$

- Calcul facile.

(ex 3) TF d'une "double" exponentielle décroissante

on pose

$$(17) \quad \psi(t) = e^{-|t|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

alors

(18) $\hat{\varphi}(\xi) = \dfrac{2}{1+\xi^2}$

comme le montre le calcul suivant :

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{0} e^{t} e^{-i\xi t}\, dt + \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-i\xi t}\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\theta} e^{i\theta\xi}\, d\theta + \frac{1}{1+i\xi} \qquad (\text{cf}(16))$$

$$= \frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi}$$

car la première intégrale s'obtient en changeant ξ en $-\xi$ dans l'expression de $\hat{\varphi}(\xi)$. La relation (18) s'en déduit immédiatement.

ex4 Transformée de Fourier de la Gaussienne

on pose

(19) $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R}$

avec un choix de normalisation tel que

(20) $\int_{\mathbb{R}} g(t)\, dt = 1$.

on a

(21) $\hat{g}(\xi) = \sqrt{2\pi}\, g(\xi) = e^{-\xi^2/2}, \quad \xi \in \mathbb{R}$.

- La <u>preuve</u> de cette propriété très particulière de la Gaussienne qui est, à une constante près, <u>égale</u> à sa transformée de Fourier constitue un calcul classique

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\, e^{-i\xi t}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2} - i\xi t}\, dt$$

or $-\frac{t^2}{2} - i\xi t = -\frac{1}{2}(t+i\xi)^2 - \frac{\xi^2}{2}$.

on en déduit

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t+i\xi)^2}\, dt$$

et on peut (avec des arguments élémentaires d'analyse complexe qui ne sont pas détaillés ici) poser $\theta = t + i\xi$ dans l'intégrale qui reste à calculer :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t+i\xi)^2}\, dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-\theta^2/2}\, d\theta = \sqrt{2\pi}$$

compte tenu de la relation (20). Par suite $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2} \cdot \sqrt{2\pi}$ et la relation (21) est établie. $\square$

• On remarque que dans les quatre exemples proposés plus haut (cf (5), (16), (18) et (21)), la transformée de Fourier tend vers 0 si $\xi \to \pm\infty$. En fait le résultat est général :

Th Limite nulle de la transformée de Fourier si l'argument tend vers l'infini.

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}(\xi)$ tend vers 0 si ξ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$:

(22) $\quad \hat{f}(\xi) \to 0$ si $|\xi| \to \infty \quad ; \quad f \in L^1(\mathbb{R})$.

• La <u>preuve</u> utilise un résultat <u>très fin</u> d'analyse que nous nous contentons d'énoncer : si τ tend vers 0 l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |f(t-\tau) - f(t)|\,dt$ tend vers 0 dès que $f \in L^1(\mathbb{R})$:

(23) $\quad \lim\limits_{\tau \to 0} \int_{\mathbb{R}} |f(t) - f(t-\tau)|\,dt = 0, \quad f \in L^1(\mathbb{R})$.

• On part de la définition (2) de la transformée de Fourier, aménagée avec la célèbre relation $\exp(-i\pi) = -1$. Il vient

$$\hat{f}(\xi) = -\int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-i\xi t}\, e^{-i\pi}\, dt$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-i\xi\left(t + \frac{\pi}{\xi}\right)}\, dt \qquad \text{si } \xi \neq 0$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} f\left(\theta - \frac{\pi}{\xi}\right) e^{-i\xi\theta}\, d\theta \qquad \text{avec } \theta = t + \frac{\pi}{\xi}$$

Donc $2\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \left[f(t) - f\left(t-\frac{\pi}{\xi}\right)\right] e^{-i\xi t}\, dt$

et

(24) $2|\hat{f}(\xi)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \left|f(t) - f\left(t-\frac{\pi}{\xi}\right)\right| dt$.

* Si $\xi \to \pm\infty$, $\tau = \frac{\pi}{\xi}$ tend vers 0 et la relation (23) montre que $|\hat{f}(\xi)|$ tend vers zéro. La relation (22) est établie et le théorème est démontré. $\square$

- Inversion de Fourier.

Un résultat remarquable, très utile pour les calculs appliqués, mais de démonstration délicate (nous ne la ferons pas ici et renvoyons par exemple au livre de Rudin "Analyse réelle et complexe") est le théorème d'inversion.

(Th) d'inversion de Fourier

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on pose $g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi t}\, d\xi$. Alors $g(t) = f(t)$ presque partout de $t \in \mathbb{R}$. En d'autres termes,

(25) $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi t}\, d\xi$, pp($t \in \mathbb{R}$).

• A défaut de démonstration, tentons de vérifier la relation (25) pour les quatre exemples vus plus haut. Pour la porte x_T (cf (3)), nous avons $\widehat{x_T}$ proportionnel au sinus cardinal de ξT (cf (5)). Mais on sait que

(26) $$\int_{\mathbb{R}} |\operatorname{sinc}\theta|\, d\theta = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin\theta}{\theta}\right| d\theta = +\infty$$

(c'est un excellent exercice de minoration de l'intégrale $\int_{-A}^{A} \left|\frac{\sin\theta}{\theta}\right| d\theta$ par un terme ad hoc de la série harmonique), donc $\widehat{x_T} \notin L^1(\mathbb{R})$ et le théorème précédent ne s'applique a priori pas.
Il en est de même pour l'exponentielle tronquée φ (relations (15) et (16)), dont la partie imaginaire de $\widehat{\varphi}(\xi)$ n'est pas intégrable pour $\xi \to \pm\infty$. Avec l'exemple suivant (double exponentielle décroissante, relations (17) et (18)), on a bien $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R})$. La formule d'inversion de Fourier prend alors la forme

(27) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\xi^2}\, e^{i\xi t}\, d\xi = \pi\, e^{-|t|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La relation (27) est très intéressante mais sa démonstration effective demande par exemple quelques éléments d'analyse complexe comme la formule des résidus. Nous observons toutefois que pour $t=0$, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\xi^2}\, d\xi = \left[\text{Arctg}\, \xi\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi ,$$

ce qui est bien cohérent avec la relation (27).

Enfin, la relation (21) relative à la transformée de Fourier de la Gaussienne permet le calcul qui suit :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi)\, e^{i\xi t}\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\xi t}\, d\xi$$

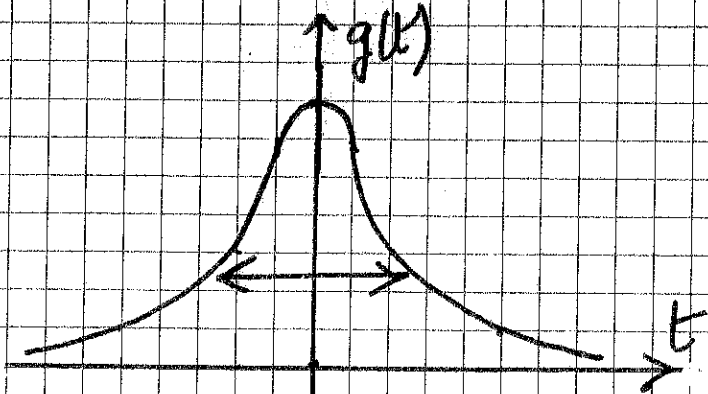
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \hat{g}(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi}\; g(-t) \quad \text{cf (21)}$$

$$= g(t) \quad \text{car } g \text{ est paire.}$$

La relation (25) est donc établie dans le cas particulier de la Gaussienne. $\square$

- <u>Dualité des largeurs.</u>

La transformée de Fourier de la Gaussienne est la Gaussienne. Cette fonction a pour "demi-largeur" l'unité pour fixer les idées



<u>Figure 3.</u> Gaussienne

On modifie la fonction g en $g_\sigma(t) \simeq g(\frac{t}{\sigma})$ de sorte que $\int_{\mathbb{R}} g_\sigma \, dt = 1$. On peut donc poser

(28) $$g_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma^2}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

La fonction g_σ est une gaussienne de "largeur" σ. On peut facilement calculer $\widehat{g_\sigma}$ à l'aide des relations (9) et (21) puisque $g_\sigma = \frac{1}{\sigma} g(\frac{t}{\sigma})$. Alors $\widehat{g_\sigma}(\xi) = \frac{1}{\sigma} \sigma \, \widehat{g}(\sigma\xi)$, ie

(29) $$\widehat{g_\sigma}(\xi) = \exp(-\sigma^2 \xi^2/2), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

La fonction $\widehat{g_\sigma}$ est encore une gaussienne, de largeur $\frac{1}{\sigma}$. On constate que le produit des largeurs de g_σ et de sa transformée de Fourier $\widehat{g_\sigma}$ est égal à l'unité. La propriété est en fait générale et donne lieu aux inégalités de Heisenberg.

- Dérivée de la transformée de Fourier.

On a vu que la transformation de Fourier transforme un produit de convolution en un produit ordinaire. On peut réinterpréter la dérivée d'une transformée de Fourier comme la transformée de Fourier d'une nouvelle fonction.

Prop. **Dérivation**

On suppose $f \in L^1$ et que f "dispose d'un premier moment", c'est à dire

(30) $\int_{\mathbb{R}} |t|\,|f(t)|\,dt < \infty$,

ce qu'on peut encore dire sous la forme $(t \mapsto t f(t)) \in L^1(\mathbb{R})$. On pose $g(t) = -it f(t)$. Alors $\xi \mapsto \hat{f}(\xi)$ est dérivable et

(31) $\frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi) = -\int_{\mathbb{R}} it f(t) e^{-i\xi t}\,dt$.

- La preuve consiste à utiliser le théorème de convergence dominée dans sa variante "dérivation". D'une part, $pp(t)$, la fonction $\xi \mapsto f(t)\exp(-it\xi)$ est dérivable et sa dérivée, c'est à dire la fonction $-it f(t) e^{-i\xi t}$ a un module majoré par une fonction $g_1(t) = |g(t)|$ elle même intégrable compte tenu de l'hypothèse (30). Alors la dérivée par rapport à ξ de l'intégrale par rapport à t est égale à l'intégrale par rapport à t de la dérivée partielle par rapport à ξ. Comme $\frac{\partial}{\partial \xi}\left(f(t)\exp(-i\xi t)\right) = -it f(t) e^{-i\xi t}$, la relation (31) en résulte. $\square$

- Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$.

Une première difficulté provient de la définition même de la transformée de Fourier $\hat{f}(\xi)$ si $f \in L^2(\mathbb{R})$. En effet, la relation (2) n'est a priori plus valable car il existe des fonctions f qui appartiennent à L^2 et qui ne sont pas dans L^1. Ainsi $f(t) = \frac{1}{1+|t|}$ n'appartient pas à L^1 alors qu'elle appartient clairement à $L^2(\mathbb{R})$

* Toutefois, fixons $A > 0$ et posons

$$(32) \quad \widehat{\varphi_A}(\xi) = \int_{-A}^{+A} f(t)\, e^{-i\xi t}\, dt, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

C'est la transformée de Fourier de $\varphi_A \equiv \chi_A f$ qui appartient bien à $L^1(\mathbb{R})$ puisque, compte tenu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_A|\, dt \leq \int_{-A}^{A} |f(t)|\, dt \leq \left(\int_{-A}^{A} |f|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{-A}^{A} dt \right)^{1/2}$$
$$\leq \sqrt{2A}\ \|f\|_2$$

qui est bien fini si $f \in L^2(\mathbb{R})$ (mais tend vers $+\infty$ si A tend vers $+\infty$).

* Si $A \to +\infty$, $\widehat{\varphi_A}(\xi)$ a une limite $pp(\xi)$; cette limite est notée $\hat{f}(\xi)$ et cette fonction $\hat{f}$ appartient elle aussi à $L^2(\mathbb{R})$.

(Th) Plancherel.

Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, on introduit $\widehat{\varphi_A}(\xi)$ à l'aide de la relation (32). Cette fonction converge (pour $A \to \infty$) dans $L^2(\mathbb{R})$ vers une fonction $\widehat{f}(\xi)$ et $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$:

(33) $\lim\limits_{A \to \infty} \| \widehat{\varphi_A} - \widehat{f} \|_2 = 0 , \quad f \in L^2(\mathbb{R})$.

L'application $L^2(\mathbb{R}) \ni f \longmapsto \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ définit un isomorphisme de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même ; on a conservation (à une constante multiplicative près) de la norme :

(34) $\| \widehat{f} \|_2 = \sqrt{2\pi} \; \| f \|_2$

ainsi que du produit scalaire (hermitien) :

(35) $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \; \overline{\widehat{g}(\xi)} \, d\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(t) \; \overline{g(t)} \, dt$.

- Le facteur $\sqrt{2\pi}$ de la relation (34) est déjà présent au sein du cas particulier (21) relatif à la Gaussienne. La preuve de ce résultat est délicate et n'est pas développée ici. Nous renvoyons le lecteur au cours de Rudin ("Analyse réelle et complexe").

- <u>Loi forte des grands nombres</u>.

La transformée de Fourier, via sa version probabiliste de "fonction caractéristique", est un des outils de base qui permet de prouver la convergence en loi vers la loi normale de Gauss. Mais nous devons rappeler rapidement le vocabulaire probabiliste.

- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité : $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable et P est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$ de sorte que $P(\Omega) = 1$. Une variable aléatoire X est une fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que X admet une densité de probabilité $f_X : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ de sorte que

(36) $P(a < X < b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$, $a < b$.

La fonction positive f_X appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et $\int_{\mathbb{R}} f_X(t)\,dt = 1$.

- Soit $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires ; on note f_j la densité de probabilité correspondante. On dit que X_j converge <u>en loi</u> vers la variable aléatoire X (de densité de probabilité f_X) si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction de répartition

(37) $F_j(x) = \int_{-\infty}^{x} f_j(t)\,dt$, $j \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$

converge (comme suite de nombres réels ; il s'agit d'une convergence simple) vers la fonction de répartition F ($F(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$) de la variable aléatoire X :

(38) $\int_{-\infty}^{x} f_j(t)\,dt \to \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$, $j \to \infty$, $x \in \mathbb{R}$ fixé

- Si $f_X \in L^1(\mathbb{R})$ est la densité de probabilité X, on note $\hat{f}(\xi)$ sa transformée de Fourier (cf la relation (2)). En langage probabiliste, la fonction $\varphi(\xi) \equiv \hat{f}_X(-\xi)$ s'appelle fonction caractéristique. On a le résultat (difficile !) qui suit

(14) Paul Lévy

Soit $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et X des variables aléatoires de densités de probabilités $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et f_X respectivement. On suppose ces fonctions positives appartenant à $L^1(\mathbb{R})$ d'avoir des moments d'ordre un et deux :

(39) $\int_{\mathbb{R}} |x|\, f_j(x)\,dx < \infty$; $\int_{\mathbb{R}} |x|^2 f_j(x)\,dx < \infty$

(et des relations analogues pour f_X). La suite X_j converge en loi vers X si et seulement si $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}_j(\xi)$ converge vers $\hat{f}_X(\xi)$; on a convergence simple des fonctions caractéristiques.

- Une notion fondamentale de théorie des probabilités concerne l'indépendance de deux variables aléatoires X et Y. On dit que les variables aléatoires X et Y (définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$) sont indépendants si et seulement si pour tout couple (A, B) de Boréliens de $\mathbb{R}$ ($A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$), la probabilité de l'événement joint $X \in A$ et $Y \in B$ est égale au produit des probabilités $P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$:

$$(40) \left\{ \begin{array}{l} P(X \in A \ \underline{\text{et}}\ Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B), \\ \qquad A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad X \text{ et } Y \text{ indépendants} \end{array} \right.$$

* Si f_X et f_Y sont les densités de probabilité de X et Y, si f_{X+Y} est celle de la variable "somme", on a

$$(41) \qquad \widehat{f_{X+Y}} = \widehat{f_X} \cdot \widehat{f_Y}, \quad X, Y \text{ v.a. } \underline{\text{indépendants}}$$

- La preuve de cette propriété repose sur l'indépendance des variables aléatoires X et Y. On a

$$(42) \qquad \int_\Omega \varphi(X,Y)\, dP = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y)\, f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy$$

si X et Y sont indépendants. On en déduit

$$\widehat{f_{X+Y}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\xi(x+y)} f_X(x)\, f_Y(y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\xi x} f_X(x)\, e^{-i\xi y} f_Y(y)\, dx\, dy$$

$$= \widehat{f_X}(\xi)\ \widehat{f_Y}(\xi)$$

grâce au théorème de Fubini, ce qui établit la relation (41). □

* Notons le lemme suivant. Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f_X et $\lambda > 0$. Soit $Y \equiv X/\lambda$ et $f_{X/\lambda}$ la densité de probabilité correspondante. On a la relation

(43) $$\widehat{f_{X/\lambda}}(\xi) = \widehat{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right), \qquad \lambda > 0,\ \xi \in \mathbb{R}$$

o La preuve de cette relation est initiée par la relation (36) :

$$P\left(a < \frac{X}{\lambda} < b\right) = P(\lambda a < X < \lambda b)$$

$$= \int_{\lambda a}^{\lambda b} f_X(x)\, dx = \int_a^b \lambda f_X(\lambda y)\, dy$$

et $f_{X/\lambda}(x) = \lambda f_X(x)$. On en déduit

$$\widehat{f_{X/\lambda}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f_{X/\lambda}(t)\, e^{-i\xi t}\, dt$$

$$= \lambda \int_{\mathbb{R}} f_X(\lambda t)\, e^{-i\xi t}\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f_X(\theta)\, e^{-i\frac{\xi}{\lambda}\theta}\, d\theta \qquad \text{avec } \theta = \lambda t$$

$$= \widehat{f_X}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$$

- Nous avons aussi le lemme élémentaire :
Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ une fonction telle que

(44) $\quad \varphi(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, x voisin de 0.

Alors on a

(45) $\quad \left(\varphi\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \longrightarrow e^{-x^2/2}$ si $n \to \infty$ (x fixé).

- La preuve de cette relation est essentiellement un exercice très élémentaire que nous ne détaillons pas ici. On a toutefois :

$$n \log \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) = n \log\left(1 - \frac{x^2}{2n} + o(x^2)\right)$$
$$= n\left[-\frac{x^2}{2n} + x^2 \varepsilon(x)\right] = -\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

On en déduit la relation (45) en passant aux exponentielles. $\square$

- On peut maintenant énoncer le théorème de convergence vers la loi de Gauss

Th. Loi forte des grands nombres.

Soient $X_1, \dots, X_n, \dots$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi, de moyenne nulle et d'écart type $\sigma = 1$; la densité de probabilité f_X des $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$ a des moments d'ordre $0, 1, 2$ et on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx = 0$; $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} x^2 f_X(x)\,dx = 1$.

La variable aléatoire Σ_n définie par

(46) $\Sigma_n = \frac{1}{\sqrt{n}} (X_1 + \cdots + X_n)$

converge <u>en loi</u> vers la loi normale réduite $N(0,1)$ de densité de probabilité $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

Pour $a<b$ deux réels, on a

(47) $P(a < \Sigma_n < b) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b e^{-t^2/2} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}$.

- La <u>preuve</u> de ce résultat est fondée sur le théorème de Paul Lévy ; il suffit d'étudier la limite simple de $\varphi_n(\xi) \equiv \widehat{f_{\Sigma_n}}(\xi)$ ($\xi \in \mathbb{R}$ fixé, $n \to \infty$). Comme les variables aléatoires X_j sont <u>indépendants</u>, la relation (41) peut se traduire par

(48) $\varphi_n(\xi) = \left(\widehat{f_{X/\sqrt{n}}}(\xi)\right)^n, \quad n \geq 1, \quad \xi \in \mathbb{R}$

et la relation (43) indique que $\widehat{f_{X/\sqrt{n}}}(\xi) = \widehat{f_X}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)$

on a donc $\varphi_n(\xi) = \left(\widehat{f_X}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$.

* Par ailleurs, la relation (31) étendue aux dérivées du second ordre entraîne

$$(49) \begin{cases} \frac{d}{d\xi}\widehat{f_X}(0) = -\int_{\mathbb{R}} ix\, f_X(x)\, dx = 0, \\ \frac{d^2}{d\xi^2}\widehat{f_X}(0) = -\int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\, dx = -1 \end{cases}$$

D'où le développement de la fonction caractéristique au voisinage de $\xi=0$:

(50) $\quad \widehat{f_X}(\xi) = 1-\frac{1}{2}\xi^2 + \xi^2\varepsilon(\xi), \quad \xi\in\mathbb{R}$

et $\widehat{f_X}$ satisfait au développement limité (44). On a alors (cf (48)) :

$$\varphi_n(\xi) = \left(\widehat{f_X}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)\right)^n, \quad n\geqslant 1, \quad \xi\in\mathbb{R}$$

qui <u>converge</u> vers $\exp-(\xi^2/2)$ si $n\to\infty$ compte tenu de la relation (45). La convergence simple de la transformée de Fourier entraîne la convergence en loi de la variable Σ_n et la loi forte des grands nombres en résulte. $\square$

<u>Corol.</u> Loi forte des grands nombres.

On suppose que les $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sont des variables <u>indépendantes de même loi</u> f_X, qui a des moments d'ordre 1 et 2 et on pose

(51) $\quad \int_{\mathbb{R}} x\, f_X(x)\,dx = m\,; \quad \int_{\mathbb{R}}(x-m)^2 f_X(x)\,dx = \sigma^2.$

Alors Σ_n défini par

(52) $\quad \Sigma_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(X_j-m)$

converge <u>en loi</u> vers la loi <u>gaussienne</u> de densité de probabilité $g_\sigma(x) \equiv \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ (cf (28)) :

(53) $\quad P(a<\Sigma_n<b) \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_a^b e^{-t^2/2\sigma^2}\,dt, \quad a<b.$

Dubois 6 février 2010.

Quelques coquilles corrigées le 5 juin 2011 à Versailles.