

Cours 7

Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites

- Applications linéaires continues

On se donne deux espaces vectoriels normés E et F . On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F . On peut le normer en définissant la norme $\|A\|$ d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(E, F)$ selon la relation $\|A\| = \sup \{ \|Ax\|_F, x \in E, \|x\|_E = 1 \}$.

Si l'espace F est complet, alors l'espace normé $\mathcal{L}(E, F)$ est également complet : c'est un espace de Banach.

- Algèbre de Banach

Si $F = E$, alors $\mathcal{L}(E) \equiv \mathcal{L}(E, E)$ est une algèbre de Banach : pour A et B deux applications linéaires continues de E dans E , on a la relation $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

- Inverse au voisinage de l'identité

Soit E un espace de Banach, id l'application identité de E dans E : $E \ni x \mapsto \text{id}x = x \in E$ et $\varepsilon \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire continue de norme strictement inférieure à l'unité : $\|\varepsilon\| < 1$. Alors la suite d'opérateurs $v_k = \text{id} + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ converge, pour k tendant vers l'infini, vers un opérateur $v \in \mathcal{L}(E)$ qui satisfait à la relation $v(\text{id} - \varepsilon) = (\text{id} - \varepsilon)v = \text{id}$.

- L'ensemble des isomorphismes est un ouvert

Soient E et F deux espaces de Banach, $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F et $\text{Isom}(E, F)$ l'ensemble des isomorphismes de E sur F . Si $u \in \text{Isom}(E, F)$, alors u est bijective de E sur F et l'application réciproque u^{-1} est une application linéaire continue de F dans E . L'ensemble $\text{Isom}(E, F)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E, F)$ et l'application $\text{Isom}(E, F) \ni u \mapsto u^{-1} \in \text{Isom}(E, F)$ est continue.

- Inégalité des accroissements finis

Soient $a < b$ deux nombres réels, F un espace de Banach, $f : [a, b] \rightarrow F$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications différentiables telles que $\forall x \in [a, b], \|df(x)\| \leq g'(x)$. Alors on a $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$.

- Application strictement différentiable

On considère deux espaces vectoriels normés E et F , $a \in E$ et f définie au voisinage de a et à valeurs dans F . On dit que f est strictement différentiable en a si et seulement si f est différentiable au point a et si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ de sorte que dans la boule de centre a et de rayon r , l'application φ définie par $\varphi(x) = f(x) - f(a) - df(a).(x - a)$ est lipschitzienne de constante ε : $\forall x, y \in B(a, r), \|f(x) - f(y) - df(a).(x - y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|$.

- Condition suffisante de stricte différentiabilité

Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert non vide de E et $f : U \rightarrow F$ une application de classe $\mathcal{C}^1(U, F)$: la différentielle $df(x)$ est une application continue de U à valeurs dans F . Si a est un point arbitraire de U , l'application f est strictement différentiable en a .

- Homéomorphie

Les hypothèses du théorème d'inversion locale sont les suivantes : on se donne deux espaces de Banach E et F , U un ouvert non vide de E et $f : U \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert U : $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$. On se donne un point $a \in U$ telle que la différentielle de f en a est un isomorphisme : $df(a) \in \text{Isom}(E, F)$.

Alors f est un homéomorphisme, c'est à dire une application bijective bi-continue. Quitte à réduire l'ouvert U en un ouvert V contenant toujours a , l'application f est un homéomorphisme de V sur un ouvert W de F qui contient $b = f(a)$. L'application f est bijective de V sur W et l'application réciproque f^{-1} est continue de W sur V .

La méthode du point fixe nous permet de démontrer ce résultat d'abord dans le cas simple d'une perturbation de l'identité.

- Théorème d'homéomorphie

On se donne un espace de Banach E , un nombre réel $r > 0$, f une application de $B(a, r)$ à valeurs dans E telle que la différence $\varphi(x) \equiv x - f(x)$ est contractante : il existe k , $0 \leq k < 1$ de sorte que $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq k \|x - y\|$. On pose $b = f(a)$. Alors il existe un ouvert V de E , $a \in V \subset B(a, r)$ tel que f soit un homéomorphisme de V sur la boule ouverte $B(b, (1 - k)r)$. De plus, l'application réciproque $g = f^{-1}$ définie sur $B(b, (1 - k)r)$ et à valeurs dans $B(a, r)$ est lipschitzienne de rapport $\frac{1}{1-k}$: $\|g(x) - g(y)\| \leq \frac{1}{1-k} \|x - y\|$.

- Un homéomorphisme

On se donne deux espaces de Banach E et F , U un ouvert non vide de E , $a \in U$, f une application continue de U dans F strictement différentiable en a . On suppose $df(a) \in \text{Isom}(E, F)$. Alors il existe un voisinage ouvert V de a inclus dans U , et un ouvert W de F contenant $b = f(a)$ tel que f soit un homéomorphisme de V sur W .

- Une forme préliminaire du théorème d'inversion locale

On considère deux espaces de Banach E et F , U un ouvert non vide de E et $f : U \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert U : $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$. On se donne un point $a \in U$ telle que la différentielle de f en a est un isomorphisme : $df(a) \in \text{Isom}(E, F)$. Alors il existe un ouvert $V_1 \subset V$ contenant a , un ouvert $W_1 \subset F$ contenant $b = f(a)$ tel que f soit un homéomorphisme de V_1 sur W_1 .

La question posée est ensuite la dérivabilité de l'application réciproque. Un homéomorphisme différentiable n'est pas forcément un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1 . Par exemple, l'application $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ est un homéomorphisme différentiable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Mais l'application réciproque n'est pas différentiable en $x = 0$.

- Critère de différentiabilité de l'application réciproque

On se donne deux espaces de Banach E et F , V un ouvert non vide de E , W un ouvert de F et f un homéomorphisme de V sur W . On suppose f différentiable en $a \in V$. Alors $g = f^{-1}$ est différentiable en $b = f(a)$ si et seulement si $df(a) \in \text{Isom}(E, F)$. Alors $dg(b) = (df(a))^{-1}$.

- Critère de difféomorphisme

On se donne deux espaces de Banach E et F , V un ouvert non vide de E , W un ouvert de F et f un homéomorphisme de V sur W . Alors f est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1 de V sur W si et seulement si pour tout $x \in V$, $df(x) \in \text{Isom}(E, F)$.

- Théorème d'inversion locale

On considère deux espaces de Banach E et F , U un ouvert non vide de E et $f : U \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert U : $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$. On se donne un point $a \in U$ telle que la différentielle de f en a est un isomorphisme : $df(a) \in \text{Isom}(E, F)$. Alors il existe un ouvert $V \subset U$ contenant a , un ouvert $W \subset F$ contenant $b = f(a)$ tel que f soit un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1 de V sur W : l'application réciproque f^{-1} est continuellement différentiable de W sur V .

- Théorème des fonctions implicites

On se donne trois espaces de Banach E , F et G , U un ouvert non vide du produit cartésien $E \times F$, f une application de U dans G de classe \mathcal{C}^1 et $(a, b) \in U \subset E \times F$ tel que $f(a, b) = 0$. On suppose de plus que $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \in \text{Isom}(F, G)$. Alors il existe un ouvert V inclus dans U et contenant le point (a, b) , il existe un ouvert $W \subset E$ et contenant a , il existe une application g de W dans F telle que toute solution $(x, y) \in V$ de l'équation $f(x, y) = 0$ peut s'écrire $y = g(x)$ avec $x \in W$. De plus, pour tout $x \in W$, on a $f(x, g(x)) = 0$. On résout dans l'ouvert V l'équation $f(x, y) = 0$ à l'aide de la "fonction implicite" $y = g(x)$.

La structure locale de l'ensemble des solutions de l'équation $f(x, y) = 0$ est une fonction de la forme $y = g(x)$. Attention : le résultat est local, c'est à dire au voisinage de la solution particulière (a, b) . Il ne dit rien dès que l'on s'éloigne trop de cette solution particulière !

- Théorème des fonctions implicites et théorème d'inversion locale

La preuve du théorème des fonctions implicites est fondée sur une utilisation appropriée du théorème d'inversion locale.

On définit F de $U \subset E \times F$ dans $E \times G$ par les relations $F(x, y) = (x, f(x, y))$. L'application F est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert U . On a d'une part $F(a, b) = (a, 0)$. D'autre part la différentielle de $dF(x, y)$ est donnée, pour $(h, k) \in E \times F$, par

$(dF(x, y)).(h, k) = (h, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).k) \in E \times G$. On vérifie qu'au point $(a, 0)$, c'est bien un difféomorphisme. En effet, pour $(p, q) \in E \times G$, il suffit de résoudre le système d'équations $(h, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b).h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).k) = (p, q)$. Donc $h = p$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b).k = q - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b).p$. Compte tenu de l'isomorphisme $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \in \text{Isom}(F, G)$, le vecteur $k \in F$ dépend continuellement du couple $(p, q) \in E \times G$.

Le théorème d'inversion locale nous dit alors qu'il existe un voisinage $V \subset U$ ouvert de (a, b) et un voisinage W_1 ouvert de $(a, 0)$ tel que F soit un difféomorphisme de V sur W_1 . Il existe donc une application régulière \tilde{g} de W_1 dans F telle que $((x, y) \in V \text{ et } z = f(x, y))$

équivalent à $((x, z) \in W_1 \text{ et } y = \tilde{g}(x, z))$. Soit $W = \{x \in E, (x, 0) \in W_1\}$. En prenant $z = 0$ dans les relations précédentes, la condition $((x, y) \in V \text{ et } f(x, y) = 0)$ est donc équivalente à $(x \in W \text{ et } y = \tilde{g}(x, 0))$. Il suffit de poser $g(x) = \tilde{g}(x, 0)$ et le théorème est démontré.

Exercices

- Perturbation de l'identité

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} continuellement dérivable de sorte qu'il existe k tel que $0 < k < 1$ et pour tout x dans \mathbb{R} , $|f'(x)| \leq k$. On définit l'application F de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 par $F(x, y) = (x + f(y), y + f(x))$.

a) Montrer que l'application F est bijective de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 .

b) Montrer que son application réciproque F^{-1} est également continuellement dérivable.

On dit que l'application F est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^2 .

- Système non linéaire d'équations

On considère le système de trois équations $x + y + z + t = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 + t = 2$ et $x^3 + y^3 + z^3 + t^2 = 0$.

a) Montrer que ce système a une unique solution de la forme $(x, y, z) = f(t)$ proche du point $(0, -1, 1)$ pour t assez petit.

b) Que vaut $f'(0)$?

- Construction d'un point d'une courbe algébrique

Soit D l'ensemble des points (x, y) de \mathbb{R}^2 de sorte que $x^4 - 5x^3y^2 + 6y^3 + 18 = 0$.

a) Montrer que'il existe deux intervalles ouverts I et J de sorte que $2 \in I$ et $1 \in J$ et une fonction assez régulière φ de I dans J de sorte que la condition $(x, y) \in D \cap (I \times J)$ équivaut à $y = \varphi(x)$.

b) Calculer $\varphi'(2)$.

- Racine carrée matricielle

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées réelles de dimension n , I_n la matrice identité et φ l'application de E dans E telle que $\varphi(A) = A^2$.

Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $\|A - I_n\| < \alpha$, la matrice A admet une unique racine carrée au voisinage de l'identité, que l'on peut noter \sqrt{A} ; $\sqrt{A} \sqrt{A} = A$.

- Fonctions implicites [février 2014]

On se donne un nombre réel x et on cherche à résoudre l'équation suivante d'inconnue réelle y $3y - 2x \tan\left(\frac{\pi}{4} + y\right) + y^3 = x$, où "tan" désigne la fonction "tangente" usuelle.

a) Montrer que cette équation peut s'écrire sous la forme $f(x, y) = 0$, où l'on précisera la fonction de deux variables f .

b) Que peut-on dire de $f(0, 0)$ et de $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$?

c) A l'aide d'un résultat vu en cours qui devra aussi être énoncé avec précision, montrer que l'équation $3y - 2x \tan\left(\frac{\pi}{4} + y\right) + y^3 = x$ peut-être résolue sous la forme $y = g(x)$.

d) On précisera les conditions pour avoir l'égalité $y = g(x)$.

e) On précisera la régularité de la fonction g .

- f) Que vaut $g(0)$?
 g) Que vaut $g'(0)$?
 h) On suppose g deux fois dérivable. Calculer $g''(0)$.

• Fonction implicite [avril 2014]

On se donne un nombre réel x et on cherche à résoudre l'équation suivante d'inconnue réelle y
 $4y - \sin(x+y) + y^2 = x$.

- a) Montrer que cette équation peut s'écrire sous la forme $f(x, y) = 0$, où l'on précisera la fonction de deux variables f .
 b) Que peut-on dire de $f(0, 0)$ et de $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$?
 c) A l'aide d'un résultat vu en cours qui devra aussi être énoncé avec précision, montrer que l'équation $4y - \sin(x+y) + y^2 = x$ peut-être résolue sous la forme $y = g(x)$.
 d) Préciser les conditions pour avoir l'égalité $y = g(x)$ ainsi que la régularité de la fonction g .
 e) Que vaut $g(0)$?
 f) Que vaut $g'(0)$?
 g) On suppose g deux fois dérivable. Calculer $g''(0)$.

• Fonction implicite [février 2016]

On se donne un nombre réel x et on cherche à résoudre l'équation suivante d'inconnue y
 $\sin y + y^2 = x$.

- a) Montrer que cette équation peut s'écrire sous la forme $f(x, y) = 0$, où l'on précisera la fonction f de deux variables réelles.
 b) Que peut-on dire de $f(0, 0)$ et de $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$?
 c) A l'aide d'un résultat vu en cours qui devra aussi être énoncé avec précision, montrer que l'équation $\sin y + y^2 = x$ peut-être résolue pour x voisin de zéro sous la forme $y = g(x)$.
 d) On précisera les conditions pour avoir l'égalité $y = g(x)$ ainsi que la régularité de la fonction g .
 e) Que valent $g(0)$ et $g'(0)$?
 f) On suppose g deux fois dérivable. Calculer $g''(0)$.

• Fonction implicite [avril 2016]

On se donne un nombre réel x et on cherche à résoudre l'équation suivante de donnée x et d'inconnue y : $y + x^3 y - y^2 - x^5 \sin y = x$.

- a) Montrer que cette équation peut s'écrire sous la forme $f(x, y) = 0$, où l'on précisera la fonction f de deux variables réelles.
 b) Que peut-on dire de $f(0, 0)$ et de $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$?
 c) A l'aide d'un résultat vu en cours qui devra aussi être énoncé avec précision, montrer que l'équation $y + x^3 y - y^2 - x^5 \sin y = x$ peut-être résolue pour x voisin de zéro sous la forme $y = g(x)$.
 d) Préciser les conditions pour avoir l'égalité $y = g(x)$ ainsi que la régularité de la fonction g .
 e) Que valent $g(0)$ et $g'(0)$?
 f) On suppose g deux fois dérivable. Calculer $g''(0)$.