le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 5 Théorème du point fixe et applications

• Fonctions continues sur l'intervalle compact $[a, b]$

On se donne deux nombres réels $a < b$ et on rappelle que $\mathscr{C}([a, b]), \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues définies sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On munit cet espace d'une norme définie par $||\, f \,||_\infty = \sup\{|f(x)|, a \leq x \leq b\}$. Comme l'application f est continue sur le compact $[a, b]$, on sait que la borne supérieure qui définit cette norme est en fait un maximum : il existe $\xi \in [a, b]$, $|f(\xi)| = ||\, f \,||_\infty$.
L'espace $\big(\mathscr{C}([a, b]), \mathbb{R}), ||\ ||_\infty\big)$ est un espace normé. La preuve de cette propriété s'appuie sur le résultat préliminaire suivant.
Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé, on pose
$B = \lambda A = \{y \in \mathbb{R}, \exists x \in A, y = \lambda\, x\}$. Si $\lambda > 0$, l'ensemble B est aussi une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ et on a la relation $\sup B = \lambda \sup A$.

• Espace de Banach

Un espace de Banach $(E, ||\ ||)$ est un espace vectoriel normé complet : toute suite de Cauchy converge dans l'espace E.

• Exemples d'espaces de Banach

Les espaces usuels en dimension finie sont des espaces de Banach : $(\mathbb{R}, |\ |)$, $(\mathbb{C}, |\ |)$ et $(\mathbb{R}^n, ||\ ||_p)$ et $(\mathbb{C}^n, ||\ ||_p)$ avec $p \geq 1$. On rappelle que si $p \geq 1$ est un nombre réel et $x \equiv (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), la norme ℓ_p est définie par la relation $||\, x \,||_p = \big(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\big)^{1/p}$. La norme ℓ^∞ est définie sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ par $||\, x \,||_\infty = \max_{j=1,,\ldots,n} |x_j|$.
Pour p réel supérieur ou égal à 1, l'espace $\ell^p(\mathbb{N})$ est l'ensemble des séries (u_k) dont la puissance p^{e} est absolument convergente : $\big(\sum_{k=1}^\infty |u_k|^p\big)^{1/p} < \infty$. On peut montrer que l'expression $||\, u \,||_p = \big(\sum_{k=1}^\infty |u_k|^p\big)^{1/p}$ définit une norme sur $\ell^p(\mathbb{N})$ et que muni de cette norme, $\ell^p(\mathbb{N})$ est un espace de Banach.
Si $p = \infty$, l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N})$ est l'ensemble des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bornées :
$\exists\, C \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $|u_k| \leq C$. Alors une norme peut être définie sur cet espace vectoriel :
$||\, u \,||_\infty = \sup\{|u_k|, k \in \mathbb{N}\}$. Muni de cette norme, $\ell^\infty(\mathbb{N})$ est un espace de Banach.
Les deux exemples précédents s'étendent sans difficulté à $\ell^p(\mathbb{Z})$ pour $p \geq 1$. Si p est réel ≥ 1, $||\, u \,||_p = \big(\sum_{k=-\infty}^\infty |u_k|^p\big)^{1/p}$ et si $p = \infty$, $||\, u \,||_\infty = \sup\{|u_k|, k \in \mathbb{Z}\}$.
D'autres exemples, qui font appel à la théorie de l'intégrale de Lebesgue, sont construits dans la suite du cours.

François Dubois, octobre 2021.

• L'espace normé $\big(\mathscr{C}([a,b]),\mathbb{R}), ||\,||_\infty\big)$ est complet

Toute suite de Cauchy dans l'espace $\big(\mathscr{C}([a,b]),\mathbb{R}), ||\,||_\infty\big)$ est convergente dans cet espace ; en particulier, la limite f est une fonction continue et la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. L'espace $\big(\mathscr{C}([a,b]),\mathbb{R}), ||\,||_\infty\big)$ est complet.
On se donne une suite de Cauchy $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\big(\mathscr{C}([a,b]),\mathbb{R}), ||\,||_\infty\big)$:
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \geq N,\ \forall m \in \mathbb{N},\ ||\, f_k - f_{k+m}\, || < \varepsilon$. Alors pour tout $x \in [a,b]$, l'inégalité $|f_k(x) - f_{k+m}(x)| \leq ||\, f_k - f_{k+m}\, ||$ montre que la suite numérique $\big(f_k(x)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Donc elle converge vers un nombre réel $f(x)$ puisque $\mathbb{R}$ est complet. Si on fait maintenant tendre m vers l'infini dans l'inégalité $|f_k(x) - f_{k+m}(x)| \leq ||\, f_k - f_{k+m}\, || < \varepsilon$, on en déduit : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \geq N,\ ||\, f_k - f\, || \leq \varepsilon$ et la convergence vers la fonction f est uniforme. Mais rien ne dit *a priori* que la fonction f est continue ! On se donne donc deux nombres réels x et y dans l'intervalle $[a,b]$ et on écrit l'inégalité triangulaire :
$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)|$. On fixe alors l'entier k assez grand de sorte que $||\, f_k - f\, || < \frac{\varepsilon}{3}$ et on obtient $|f(x) - f(y)| \leq |f_k(x) - f_k(y)| + \frac{2}{3}\,\varepsilon$. La preuve utilise alors la propriété fondamentale que l'application f_k continue du compact $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ est uniformément continue : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in [a,b],\ |y - x| < \eta \Longrightarrow |f_k(y) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. On en déduit qu'avec $|y - x| < \eta$, on a $|f(x) - f(y)| \leq |f_k(x) - f_k(y)| + \frac{2}{3}\,\varepsilon\ <\ \frac{1}{3}\,\varepsilon + \frac{2}{3}\,\varepsilon = \varepsilon$ et la preuve est achevée. □

• Théorème du point fixe de Banach-Picard

Soit $(E, ||\,||)$ un espace normé complet, f une application contractante de E dans E : il existe un nombre k de sorte que $0 \leq k < 1$ et pour tout $x, y \in E$, $||\, f(y) - f(x)\, || \leq\ k\ ||\, y - x\, ||$. Alors il existe un et un seul point fixe ξ de l'application f : $\exists!\ \xi \in E,\ f(\xi) = \xi$.
La preuve de ce théorème consiste à se donner $x_0 \in E$ et à étudier la suite de ses itérés par l'application f : $x_{n+1} = f(x_n)$. Si on note $f^{(j)}$ l'itérée d'ordre $j \in \mathbb{N}$ de l'application f pour la loi de composition, on obtient sans difficulté $||\, f^{(j)}(y) - f^{(j)}(x)\, || \leq\ k^j\ ||\, y - x\, ||$. On montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme $x_n = f^{(n)}(x_0)$, on a grâce à l'inégalité triangulaire $||\, x_{n+m} - x_n\, || \leq\ (1 + k + \ldots + k^{m-1})\ ||\, x_{n+1} - x_n\, ||\ \leq\ \frac{1}{1-k}\ ||\, x_{n+1} - x_n\, ||$ en resommant la série géométrique de raison k. On a ensuite de proche en proche
$||\, x_{n+1} - x_n\, || = ||\, f(x_n) - f(x_{n-1})\, ||\ \leq k\ ||\, x_n - x_{n-1}\, || \leq \ldots \leq\ k^n\ ||\, x_1 - x_0\, ||$. On déduit de toutes ces inégalités que pour deux entiers n et m arbitraires,
$||\, x_{n+m} - x_n\, || \leq\ \frac{k^n}{1-k}\ ||\, x_1 - x_0\, ||$. Le membre de droite de l'inégalité précédente peut être rendu arbitrairement petit si n est assez grand et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy. Comme l'espace E est complet, elle converge vers un point $\xi \in E$ qui satisfait par continuité à la relation $f(\xi) = \xi$. Un tel point fixe est nécessairement unique : pour un autre point fixe ξ', on a $||\, \xi - \xi'\, || = ||\, f(\xi) - f(\xi')\, || \leq\ k\ ||\, \xi - \xi'\, ||$ avec $0 \leq k < 1$; l'inégalité précédente n'est possible que sous la condition $||\, \xi - \xi'\, || = 0$, c'est à dire pour $\xi' = \xi$. □
Les itérations de Picard $x_{n+1} = f(x_n)$ utilisées dans la preuve fournissent un procédé explicite d'approximation du point fixe : c'est l'"algorithme du point fixe".
Un exemple élémentaire est fourni par l'application $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ [exercice].
Si une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfait simplement à l'inégalité $|f(y) - f(x)|\ \leq\ |y - x|$, on peut construire facilement un contre-exemple à l'unicité d'un point fixe.

- Fonction lipschitzienne

Une fonction ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite lipschitzienne si il existe une constante $K \geq 0$ de sorte que pour tout $u, v \in \mathbb{R}$, $|\psi(v) - \psi(u)| \leq |v - u|$.
Si la constante de Lipschitz K est strictement inférieure à 1, l'application ψ est contractante.

- Etude d'une équation intégrale

On se donne $a > 0$, $K \geq 0$ de sorte que $Ka < 1$, $u_0 \in \mathbb{R}$ et une fonction ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ lipschitzienne et de constante de Lipschitz égale à K. On rappelle que mini de sa norme $|| \, ||_\infty$, l'espace $E = \mathscr{C}([0, a])$ est un espace de Banach. L'équation intégrale $u(t) = u_0 + \int_0^t \psi(u(\theta))\,\mathrm{d}\theta$ pout tout $t \in [0, a]$ et d'inconnue $u \in \mathscr{C}([0, a])$ a une solution unique $u \in \mathscr{C}([0, a])$. La fonction u solution de l'équation intégrale est une fonction continue sur $[0, a]$ et elle satisfait à la condition initiale $u(0) = u_0$.
Pour démontrer ce résultat, on construit d'abord une fonction f de E dans E qui à toute fonction continue v définie sur l'intervalle $[0, a]$ associe une nouvelle fonction $f(v)$ également définie sur l'intervalle $[0, a]$ par les relations $f(v(t)) = u_0 + \int_0^t \psi(v(\theta))\,\mathrm{d}\theta$ pour tout $t \in [0, a]$.
La fonction $f(v)$ est clairement continue donc f est une application de E dans E.
On montre ensuite que f est contractante : $|| \, f(v) - f(u) \, ||_\infty \leq Ka \, || \, v - u \, ||_\infty$. Il suffit enfin d'appliquer le théorème du point fixe : puisque $Ka < 1$, il existe une unique fonction $u \in E = \mathscr{C}([0, a])$ telle que $f(u) = u$, c'est à dire pour tout $t \in [0, a]$, $u(t) = u_0 + \int_0^t \psi(u(\theta))\,\mathrm{d}\theta$.
Le résultat est alors démontré.

- Equation différentielle

La solution $u \in \mathscr{C}([0, a])$ du problème $u(t) = u_0 + \int_0^t \psi(u(\theta))\,\mathrm{d}\theta$ pour tout $t \in [0, a]$ est une fonction dérivable puisque le membre de droite est dérivable. On en déduit que pour tout $t \in [0, a]$, on a la relation différentielle $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \psi(u(t))$. De plus, on a la condition initiale $u(0) = u_0$. Cette méthode permet de démontrer l'existence et l'unicité de la solution d'équations différentielles, au moins dans un intervalle de temps suffisamment petit.

- Théorème de Cauchy-Lipschitz

On se donne une fonction ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ localement lipschitzienne : $\forall u \in \mathbb{R}$, $\exists K_u \geq 0$, $\exists \eta_u > 0$, $\forall v, w \in \mathbb{R}$, $\big(|v - u| < \eta_u$ et $|w - u| < \eta_u\big) \Longrightarrow |\psi(v) - \psi(w)| \leq K_u \, |v - u|$. Alors pour toute condition initiale $u_0 \in \mathbb{R}$, il existe $a(u_0) > 0$ tel que le problème de chercher une fonction u définie sur l'intervalle $[0, a(u_0)]$ telle qu'on a d'une part l'équation d'évolution $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \psi(u(t))$ pour tout t tel que $0 \leq t \leq a(u_0)$ et d'autre part la condition initiale $u(0) = u_0$, a une solution unique.
On peut résoudre l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \psi(u(t))$ avec la condition initiale $u(0) = u_0$ sur un (petit) intervalle $[0, a(u_0)]$. De plus, la solution est unique.
En pratique, si la fonction ψ est continuement dérivable sur $\mathbb{R}$, c'est à dire si $\psi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction ψ est localement lipschitzienne.
La question suivante est, partant du "petit" intervalle $[0, a(u_0)]$, d'augmenter la taille de l'intervalle où la solution de l'équation différentielle est définie de façon unique. On peut alors construire un intervalle maximal (non unique *a priori*) où la solution de l'équation différentielle jointe à la condition initiale peut être définie. Nous renvoyons le lecteur à l'excellent

ouvrage de J.P. Demailly *Analyse numérique et équations différentielles*, publié aux Presses Universitaires de Grenoble en 1996.

• Exemples de solutions maximales d'équations différentielles

Si $u_0 = 1$ et $\psi(u) = -u$, on se convainc facilement que la solution maximale de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = 0$ pour tout réel $t \in \mathbb{R}$ et telle que $u(0) = 1$ est égale à la fonction $u(t) = \exp(-t)\, u_0$, qui est bien définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Il suffit de poser $v(t) = u(t)\exp(t)$ et de la dériver. On a alors $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, la fonction v est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et la valeur de cette constante est égale à $v(0) = 1$.

Si $u_0 = 0$ et $\psi(u) = 1 + u^2$, la fonction $v(t) = \arctan(u(t))$ a cette fois une dérivée égale à 1 et $u(t) = \tan(t)$. La fonction u ne peut donc pas être définie comme une fonction régulière hors de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, intervalle maximal de définition de l'équation différentielle pour la condition initiale $u_0 = 0$.

Exercices

• Une famille de fonctions lipschitziennes

On se donne une application continuement dérivable ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $K \geq 0$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\psi'(x)| \leq K$.

Démontrer que la fonction ψ est lipschitzienne.

• Exemple élémentaire de l'utilisation du théorème du point fixe

On se donne la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivante : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que la dérivée de f est majorée en valeur absolue par $\frac{3\sqrt{3}}{8}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

b) En déduire, à l'aide de l'exercice précédent, que l'application f est contractante.

c) Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ a une et une seule solution $x \in \mathbb{R}$.

• Un exemple de fonction localement lipshitzienne

On se donne ψ fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: ψ est dérivable et sa dérivée ψ' est une application continue sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a l'inégalité $|\psi(y) - \psi(x)| \leq |\int_x^y |\psi'(\xi)|\, \mathrm{d}\xi|$.

On se donne $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer qu'il existe $K_x \geq 0$ tel que $\forall\, \xi \in [x-1, x+1]$, $|\psi'(\xi)| \leq K_x$.

c) En déduire que la fonction ψ est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

d) Donner un exemple de fonction de classe $\mathscr{C}^1$ non lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

• L'espace des séries absolument convergentes est complet

On rappelle que $\ell^1(\mathbb{N})$ est l'espace des séries absolument convergentes ; $u \in \ell^1(\mathbb{N})$ si et seulement si $\sum_{k=0}^{\infty} < \infty$. On pose $||\,u\,|| = \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| < \infty$.

a) Rappeler pourquoi $\ell^1(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel et pourquoi il est normé avec l'expression $||\,u\,||$ introduite ci-dessus.

On se donne une suite de Cauchy $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\ell^1(\mathbb{N})$.

b) À l'aide de la définition d'une suite de Cauchy, rappeler quelles sont les relations satisfaites par les nombres u_k^n, où ce nombre est le k^{o} terme de la n^{o} série de la suite $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite u_k^n converge pour $n \longrightarrow \infty$ vers un nombre $u_k \in \mathbb{R}$.
d) Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall p \geq N$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{m} |u_k^p - u_k| \leq \varepsilon$.
e) En déduire que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall p \geq N$, $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k^p - u_k| \leq \varepsilon$.
f) En déduire que $u \in \ell^1(\mathbb{N})$.
g) En déduire que la suite $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u dans l'espace $\ell^1(\mathbb{N})$.

- Normes matricielles

Pour tout l'exercice, on se fixe une norme sur $\mathbb{R}^n$ qui est notée $| \bullet |$. Soit A une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ($A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$) , qu'on peut donc identifier à une matrice A si on munit l'espace $\mathbb{R}^n$ de sa base canonique pour fixer les idées. Pour un tel opérateur, on pose $\| A \| = \sup\{ |A\xi|, |\xi| \leq 1\}$.
a) Montrer que le nombre $\|A\|$ est bien défini par la relation proposée juste au dessus.
b) Montrer que $\|A\|$ est bien une norme sur l'espace vectoriel $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$: c'est une grandeur toujours positive ou nulle ; si elle est nulle, alors A est nul et enfin on a l'inégalité triangulaire $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
c) Montrer de plus qu'on a compatibilité de cette norme avec la multiplication dans l'algèble $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$: $\|AB\| \leq \|A\| \, \|AB\|$.

- Formule de Duhamel

Cet exercice fait suite du précédent. On se donne une matrice A réelle à n lignes et n colonnes ($A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$) et un nombre réel θ arbitraire.
a) Montrer que la série de terme général $\frac{\theta}{n!} A^n$ est "normalemant convergente", ce qui signifie que la série (à termes positifs !) des normes $\| \frac{\theta}{n!} A^n \|$ est convergente.
On note $\exp(\theta A)$ sa somme, qui est une matrice à n lignes et n colonnes. Si φ est un vecteur arbitraire (mais fixé) de $\mathbb{R}^n$, monter que le vecteur $y(t)$ fonction du temps défini par $y(t) = \exp(tA) \bullet \varphi$ est en fait une fonction dérivable et calculer la dérivée $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.
b) En déduire une expression de la solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + A \bullet u = 0$, munie de la condition initiale $u(0) = \varphi$.
Sans changer la condition initiale, on se donne un vecteur $f(t)$ de $\mathbb{R}^n$ et on remplace l'équation d'évolution $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + A \bullet u = 0$ par la dynamique $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + A \bullet u = f(t)$.
c) Montrer qu'alors le vecteur solution $u(t)$ est donné par la relation suivante, connue sous le nom de "formule de Duhamel" : $u(t) = \exp(-tA) \bullet \varphi + \int_0^t \exp(-(t-s)A) \bullet f(s) \, \mathrm{d}s$.

- Résolution d'une famille d'équations [février 2016]

Pour $X \equiv (x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$, on pose $|| X || = \max(|x|, |y|)$. On se donne t réel arbitraire et on définit l'application f_t de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par :
$f_t(X) = \big(\frac{1}{2} y + \frac{1}{6} \sin(x+y) + t - 3 \, , \, -\frac{1}{3} x + \frac{1}{4} \cos(x-y) + t^2 + 7 \big)$.
a) Montrer que pour tout x, y, x', y' dans $\mathbb{R}$, on a les estimations
$| \sin(x+y) - \sin(x'+y') \, | \leq 2 \, | \sin\big(\frac{x-x'+y-y'}{2} \big) |$ et
$| \cos(x-y) - \cos(x'-y') \, | \leq 2 \, | \sin\big(\frac{x-x'-(y-y')}{2} \big) |$.
b) En déduire que pour $X \equiv (x, y)$ et $X' \equiv (x', y')$, on a
$| \sin(x+y) - \sin(x'+y') \, | \leq 2 \, || X - X' ||$ et $| \cos(x-y) - \cos(x'-y') \, | \leq 2 \, || X - X' ||$.

c) Déduire des questions précédentes que l'application f_t est contractante : pour X et X' arbitraires dans $\mathbb{R}^2$, on a $|| \, f(X) - f(X') \, || \leq \frac{5}{6} \, || \, X - X' \, ||$.
d) Montrer que pour tout réel t, il existe un unique couple de réels $(x_t \, , \, y_t)$ de sorte que
$\frac{1}{2} y_t - x_t + \frac{1}{6} \sin(x_t + y_t) + t = 3, \quad \frac{1}{3} x_t + y_t - \frac{1}{4} \cos(x_t - y_t) - t^2 = 7.$