le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 7
Inversion locale et fonctions implicites

- Applications linéaires continues

On se donne deux espaces vectories normés E et F. On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F. On peut le normer en définissant la norme $||A||$ d'un opérateur $A \in \mathscr{L}(E,F)$ selon la relation $||A|| = \sup\{\,||Ax||_F,\, x \in E,\, ||x||_E = 1\}$.
Si l'espace F est complet, alors l'espace normé $\mathscr{L}(E,F)$ est également complet : c'est un espace de Banach.

- Algèbre de Banach

Si $F = E$, alors $\mathscr{L}(E) \equiv \mathscr{L}(E,E)$ est une algèbre de Banach : pour A et B deux applications linéaires continues de E dans E, on a la relation $||AB|| \leq ||A||\, ||B||$.

- Inverse au voisinage de l'identité

Soit E un espace de Banach, id l'application identité de E dans E: $E \ni x \longmapsto \mathrm{id}\, x = x \in E$ et $\varepsilon \in \mathscr{L}(E)$ une application linéaire continue de norme strictement inférieure à l'unité : $||\varepsilon|| < 1$. Alors la suite d'opérateurs $v_k = \mathrm{id} + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ converge, pour k tendant vers l'infini, vers un opérateur $v \in \mathscr{L}(E)$ qui satisfait à la relation $v\,(\mathrm{id} - \varepsilon) = (\mathrm{id} - \varepsilon)\, v = \mathrm{id}$.

- L'ensemble des isomorphismes est un ouvert

Soient E et F deux espaces de Banach, $\mathscr{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F et $\mathrm{Isom}\,(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes de E sur F. Si $u \in \mathrm{Isom}\,(E,F)$, alors u est bijective de E sur F et l'application réciproque u^{-1} est une application linéaire continue de F dans E. L'ensemble $\mathrm{Isom}\,(E,F)$ est un ouvert de $\mathscr{L}(E,F)$ et l'application $\mathrm{Isom}\,(E,F) \ni u \longmapsto u^{-1} \in \mathrm{Isom}\,(E,F)$ est continue.

- Inégalité des accroissements finis

Soient $a < b$ deux nombres réels, F un espace de Banach, $f : [a,b] \longrightarrow F$ et $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications différentiables telles que $\forall x \in [a,b]$, $||\mathrm{d}f(x)|| \leq g'(x)$. Alors on a
$||f(b) - f(a)|| \leq g(b) - g(a)$.

- Application strictement différentiable

On considère deux espaces vectoriels normés E et F, $a \in E$ et f définie au voisinage de a et à valeurs dans F. On dit que f est strictement différentiable en a si et seulement si f est différentiable au point a et si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ de sorte que dans la boule de centre a et de rayon r, l'application φ définie par $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \mathrm{d}f(a).(x-a)$ est lipschizienne de constante ε: $\forall x, y \in B(a,r)$, $||f(x) - f(y) - \mathrm{d}f(a).(x-y)|| \leq \varepsilon\, ||x-y||$.

François Dubois, novembre 2021.

• Condition suffisante de stricte différentiabilité

Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert non vide de E et $f : U \longrightarrow F$ une application de classe $\mathscr{C}^1(U, F)$: la différentielle $\mathrm{d}f(x)$ est une application continue de U à valeurs dans F. Si a est un point arbitraire de U, l'application f est strictement différentiable en a.

• Homéomorphie

Les hypothèses du théorème d'inversion locale sont les suivantes : on se donne deux espaces de Banach E et F, U un ouvert non vide de E et $f : U \longrightarrow F$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U : $f \in \mathscr{C}^1(U, F)$. On se donne un point $a \in U$ telle que la différentielle de f en a est un isomorphisme : $\mathrm{d}f(a) \in \mathrm{Isom}(E, F)$.
Alors f est un homéomorphisme, c'est à dire une application bijective bi-continue. Quitte a réduire l'ouvert U en un ouvert V contenant toujours a, l'application f est un homéomorphisme de V sur un ouvert W de F qui contient $b = f(a)$. L'application f est bijective de V sur W et l'application réciproque f^{-1} est continue de W sur V.
La méthode du point fixe nous permet de démontrer ce résultat d'abord dans le cas simple d'une perturbation de l'identité.

• Théorème d'homéomorphie

On se donne un espace de Banach E, un nombre réel $r > 0$, f une application de $B(a, r)$ à valeurs dans E telle que la différence $\varphi(x) \equiv x - f(x)$ est contractante : il existe k, $0 \leq k < 1$ de sorte que $|| \varphi(x) - \varphi(y) || \leq k \, ||x - y||$. On pose $b = f(a)$. Alors il existe un ouvert V de E, $a \in V \subset B(a, r)$ tel que f soit un homéomorphisme de V sur la boule bouverte $B(b, (1-k)\, r)$.
De plus, l'application réciproque $g = f^{-1}$ définie sur $B(b, (1-k)\, r)$ et à valeurs dans $B(a, r)$ est lipschizienne de rapport $\frac{1}{1-k}$: $|| g(x) - g(y) || \leq \frac{1}{1-k} \, ||x - y||$.

• Un homéomorphisme

On se donne deux espaces de Banach E et F, U un ouvert non vide de E, $a \in U$, f une application continue de U dans F strictement différentiable en a. On suppose $\mathrm{d}f(a) \in \mathrm{Isom}(E, F)$.
Alors il existe un voisinage ouvert V de a inclus dans U, et un ouvert W de F contenant $b = f(a)$ tel que f soit un homéomorphisme de V sur W.

• Une forme préliminaire du théorème d'inversion locale

On considère deux espaces de Banach E et F, U un ouvert non vide de E et $f : U \longrightarrow F$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U : $f \in \mathscr{C}^1(U, F)$. On se donne un point $a \in U$ telle que la différentielle de f en a est un isomorphisme : $\mathrm{d}f(a) \in \mathrm{Isom}(E, F)$. Alors il existe un ouvert $V_1 \subset V$ contenant a, un ouvert $W_1 \subset F$ contenant $b = f(a)$ tel que f soit un homéomorphisme de V_1 sur W_1.
La question posée est ensuite la dérivabilité de l'application réciproque. Un homéomorphisme différentiable n'est pas forcément un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$, c'est dire une application de classe $\mathscr{C}^1$ bijective telle que l'application réciproque est également de classe $\mathscr{C}^1$. Cette dernière condition n'est en effet pas automatique ! Par exemple, l'application $\mathbb{R} \ni x \longmapsto x^3 \in \mathbb{R}$ est un homéomorphisme différentiable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Mais l'application réciproque n'est pas différentiable en $x = 0$.

- Critère de différentiabilité de l'application réciproque

On se donne deux espaces de Banach E et F, V un ouvert non vide de E, W un ouvert de F et f un homéomorphisme de V sur W. On suppose f différentiable en $a \in V$. Alors $g = f^{-1}$ est différentiable en $b = f(a)$ si et seulement si $\mathrm{d}f(a) \in \mathrm{Isom}(E, F)$. Alors $\mathrm{d}g(b) = \big(\mathrm{d}f(a)\big)^{-1}$.

- Critère de difféomorphisme

On se donne deux espaces de Banach E et F, V un ouvert non vide de E, W un ouvert de F et f un homéomorphisme de V sur W. Alors f est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de V sur W si et seulement si pour tout $x \in V$, $\mathrm{d}f(x) \in \mathrm{Isom}(E, F)$.

- Théorème d'inversion locale

On considère deux espaces de Banach E et F, U un ouvert non vide de E et $f : U \longrightarrow F$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U: $f \in \mathscr{C}^1(U, F)$. On se donne un point $a \in U$ telle que la différentielle de f en a est un isomorphisme : $\mathrm{d}f(a) \in \mathrm{Isom}(E, F)$. Alors il existe un ouvert $V \subset U$ contenant a, un ouvert $W \subset F$ contenant $b = f(a)$ tel que f soit un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de V sur W: l'application réciproque f^{-1} est continuement différentiable de W sur V.

- Théorème des fonctions implicites

On se donne trois espaces de Banach E, F et G, U un ouvert non vide du produit cartésien $E \times F$, f une application de U dans G de classe $\mathscr{C}^1$ et $(a, b) \in U \subset E \times F$ tel que $f(a, b) = 0$. On suppose de plus que $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \in \mathrm{Isom}(F, G)$. Alors il existe un ouvert V inclus dans U et contenant le point (a, b), il existe un ouvert $W \subset E$ et contenant a, il existe une application g de W dans F telle que toute solution $(x, y) \in V$ de l'équation $f(x, y) = 0$ peut s'écrire $y = g(x)$ avec $x \in W$. De plus, pour tout $x \in W$, on a $f(x, g(x)) = 0$. On résout dans l'ouvert V l'équation $f(x, y) = 0$ a l'aide de la "fonction implicite" $y = g(x)$.
La structure locale de l'ensemble des solutions de l'équation $f(x, y)$ est une fonction de la forme $y = g(x)$. Attention : le résultat est local, c'est à dire au voisinage de la solution particulière (a, b). Il ne dit rien dès que l'on s'éloigne trop de cette solution particulière !

- Théorème des fonctions implicites et théorème d'inversion locale

La preuve du théorème des fonctions implicites est fondée sur une utilisation appropriée du théorème d'inversion locale.
On définit $\widetilde{f}$ de $U \subset E \times F$ dans $E \times G$ par les relations $\widetilde{f}(x, y) = (x, f(x, y))$. L'application $\widetilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U. On a d'une part $\widetilde{f}(a, b) = (a, 0)$. et d'autre part, la différentielle de $\mathrm{d}\widetilde{f}(x, y)$ est donnée, pour $(h, k) \in E \times F$, par
$(\mathrm{d}F(x, y)).(h, k) = (h, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).k) \in E \times G$. On vérifie qu'au point $(a, 0)$, c'est bien un difféomorphisme. En effet, pour $(p, q) \in E \times G$, il suffit de résoudre le système d'équations $(h, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b).h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).k) = (p, q)$. Donc $h = p$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b).k = q - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b).p$. Compte tenu de l'isomorphisme $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \in \mathrm{Isom}(F, G)$, le vecteur $k \in F$ dépend contiement du couple $(p, q) \in E \times G$.
Le théorème d'inversion locale nous dit alors qu'il existe un voisinage $V \subset U$ ouvert de E contenant le point (a, b) et un voisinage W_1 ouvert de F contenant $(a, 0)$ tel que $\widetilde{f}$ soit un difféomorphisme de V sur W_1. Il existe donc une application régulière $\widetilde{g}$ de W_1 dans F telle

que $((x,y) \in V \text{ et } z = f(x,y))$ équivaut à $((x,z) \in W_1 \text{ et } y = \widetilde{g}(x,z))$. Soit $W = \{x \in E, (x,0) \in W_1\}$. En prenant $z = 0$ dans les relations précédentes, la condition $((x,y) \in V \text{ et } f(x,y) = 0)$ est donc équivalente à $(x \in W \text{ et } y = \widetilde{g}(x,0))$. Il suffit de poser $g(x) = \widetilde{g}(x,0)$ et le théorème est démontré.

Exercices

• Perturbation de l'identité

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continuement dérivable de sorte qu'il existe k tel que $0 < k < 1$ et pour tout x dans $\mathbb{R}$, $|\, f'(x)\,| \leq k$. On définit l'application F de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $F(x,y) = \big(x + f(y), y + f(x)\big)$.

a) Montrer que l'application F est bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que son application réciproque F^{-1} est également continuement dérivable.

On dit que l'application F est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$.

• Système non linéaire d'équations

On considère le système de trois équations $x+y+z+t = 0$, $x^2+y^2+z^2+t = 2$ et $x^3+y^3+z^3+t^2 = 0$.

a) Montrer que ce système a une unique solution de la forme $(x,y,z) = \varphi(t)$ proche du point $(0,-1,1)$ pour t assez petit.

b) Que vaut $\varphi'(0)$?

• Construction d'un point d'une courbe algébrique

Soit D l'ensemble des points (x,y) de $\mathbb{R}^2$ de sorte que $x^4 - 5x^3y^2 + 6y^3 + 18 = 0$.

a) Montrer qu'il existe deux intervalles ouverts I et J de sorte que $2 \in I$ et $1 \in J$ et une fonction assez régulièle φ de I dans J de sorte que la condition $(x,y) \in D \cap (I \times J)$ équivaut à $y = \varphi(x)$.

b) Calculer $\varphi'(2)$.

• Racine carrée matricielle

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées réelles de dimension n, I_n la matrice identité et φ l'application de E dans E telle que $\varphi(A) = A^2$.

Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $||A - \mathrm{I}_n|| < \alpha$, la matrice A admet une unique racine carrée au voisinage de l'identité, que l'on peut noter $\sqrt{A}$; $\sqrt{A}\,\sqrt{A} = A$.

• Fonctions implicites [février 2014]

On se donne un nombre réel x et on cherche à résoudre l'équation suivante d'inconnue réelle y $3y - 2x\tan\left(\frac{\pi}{4} + y\right) + y^3 = x$, où "tan" désigne la fonction "tangente" usuelle.

a) Montrer que cette équation peut s'écrire sous la forme $f(x,y) = 0$, où l'on précisera la fonction de deux variables f.

b) Que peut-on dire de $f(0,0)$ et de $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$?

c) A l'aide d'un résultat vu en cours qui devra aussi être énoncé avec précision, montrer que l'équation $3y - 2x\tan\left(\frac{\pi}{4} + y\right) + y^3 = x$ peut-être résolue sous la forme $y = g(x)$.

d) On précisera les conditions pour avoir l'égalité $y = g(x)$.

e) On précisera la régularité de la fonction g.
f) Que vaut $g(0)$?
g) Que vaut $g'(0)$?
h) On suppose g deux fois dérivable. Calculer $g''(0)$.

- Fonction implicite [avril 2014]

On se donne un nombre réel x et on cherche à résoudre l'équation suivante d'inconnue réelle y
$4y - \sin(x+y) + y^2 = x$.
a) Montrer que cette équation peut s'écrire sous la forme $f(x,y) = 0$, où l'on précisera la fonction de deux variables f.
b) Que peut-on dire de $f(0,0)$ et de $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$?
c) A l'aide d'un résultat vu en cours qui devra aussi être énoncé avec précision, montrer que l'équation $4y - \sin(x+y) + y^2 = x$ peut-être résolue sous la forme $y = g(x)$.
d) Préciser les conditions pour avoir l'égalité $y = g(x)$ ainsi que la régularité de la fonction g.
e) Que vaut $g(0)$?
f) Que vaut $g'(0)$?
g) On suppose g deux fois dérivable. Calculer $g''(0)$.

- Fonction implicite [février 2016]

On se donne un nombre réel x et on cherche à résoudre l'équation suivante d'inconnue y
$\sin y + y^2 = x$.
a) Montrer que cette équation peut s'écrire sous la forme $f(x,y) = 0$, où l'on précisera la fonction f de deux variables réelles.
b) Que peut-on dire de $f(0,0)$ et de $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$?
c) A l'aide d'un résultat vu en cours qui devra aussi être énoncé avec précision, montrer que l'équation $\sin y + y^2 = x$ peut-être résolue pour x voisin de zéro sous la forme $y = g(x)$.
d) On précisera les conditions pour avoir l'égalité $y = g(x)$ ainsi que la régularité de la fonction g.
e) Que valent $g(0)$ et $g'(0)$?
f) On suppose g deux fois dérivable. Calculer $g''(0)$.

- Fonction implicite [avril 2016]

On se donne un nombre réel x et on cherche à résoudre l'équation suivante de donnée x et d'inconnue y : $y + x^3 y - y^2 - x^5 \sin y = x$.
a) Montrer que cette équation peut s'écrire sous la forme $f(x,y) = 0$, où l'on précisera la fonction f de deux variables réelles.
b) Que peut-on dire de $f(0,0)$, de $f(0,1)$ et de $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$?
c) A l'aide d'un résultat vu en cours qui devra aussi être énoncé avec précision, montrer que l'équation $y + x^3 y - y^2 - x^5 \sin y = x$ peut-être résolue pour x voisin de zéro sous la forme $y = g(x)$.
d) Quelle sont les conditions pour avoir l'égalité $y = g(x)$?
e) Préciser quelle est la régularité de la fonction g.
f) Que valent $g(0)$ et $g'(0)$?