Département de Mathématiques et Statistiques

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur (MAA106)

Devoir 1, à rendre pour la séance numéro 4, le 12 octobre 2021

Exercice 1 - Borne inférieure

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minorée de nombres réels, on rappelle que la borne inférieure $\inf_n a_n$ est le plus grand des minorants de cette suite.

a) Que vaut $\inf_n a_n$ si $a_n = \frac{1}{n+1}$?

On se donne $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites bornées de nombres réels.

b) Rappeler la définition du fait que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.

c) Démontrer, en justifiant soigneusement les diverses étapes du raisonnement, que l'on a l'inégalité $\inf_n (a_n + b_n) \geq \big(\inf_n a_n\big) + \big(\inf_n b_n\big)$.

Exercice 2 - Convergence d'une série de Riemann

On considère la suite v_n définie par $v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ pour $n \geq 1$. On définit la somme partielle S_n de la série (v_n) par $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$. On introduit également la suite $u_n = \frac{1}{n^2}$ et la somme partielle associée $\Sigma_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

a) Montrer que la série (v_n) est à termes positifs : on a $v_n \geq 0$ pour tout entier $n \geq 1$.

b) Montrer que l'on a $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

c) En déduire que la série de terme général v_n est convergente.

d) Quelle est sa limite ?

e) Montrer que pour n entier ≥ 1, on a $u_n \leq 2\, v_n$.

f) En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

François Dubois, 28 septembre 2021.